Théorie des Catégories et Introduction à l'homologie

MÉMOIRE DE FIN DE LICENCE

Owen GARNIER

Université de Picardie Jules Verne

Département de Mathématiques

Sous la direction de M. Yann PALU

2017-2018

Table des matières

Introduction

Le présent mémoire a pour but de donner une introduction élémentaire au concept de catégories. Notion qui a pris une importance cruciale, notamment en algèbre, depuis son introduction par Samuel Eilenberg et Saunders MacLane dans les années 1940.
Les catégories fournissent en effet un formalisme souple et profond, s'adaptant à une grande variété de domaines, et permettant une étude globale et applicable (jusqu'en topologie : la catégorie des espaces topologiques, théorie de l'homotopie, topologie algébrique, etc...). Ceci dit, les catégories reposent sur des classes qui ne sont pas toujours des ensembles, il existe donc de nombreuses définitions qui posent certains problèmes ensemblistes. Nous choisissons de ne pas prêter attention à ces problèmes par manque de temps.

Ce mémoire ayant surtout un but de définitions, il comporte peu d'exemples pratiques et a surtout pour rôle de fournir du vocabulaire et certaines propriétés élémentaires utiles avant d'accéder à des notions plus poussées.
Nous donnons en premier lieu les définitions de catégories, foncteurs et transformations naturelles dans le cadre le plus général, pour introduire les concepts fondamentaux (morphismes, limites...) qui seront primordiaux dans la suite.
Ensuite, nous explorons plus avant des cas particuliers de catégories aux axiomes plus exigeants : les catégories abéliennes, exactes et triangulées. Nous en donnons certaines propriétés élémentaires, avant de tenter de voir dans quels cas ces différentes notions peuvent se chevaucher. Nous utilisons pour ce faire la construction des catégories des complexes et homotopique des complexes, qui fournissent un pont entre catégories abéliennes et triangulées. Nous finissons par une section sur les catégories dérivées, donnant une introduction à la localisation dans les catégories.

Je tiens à remercier M.Yann Palu, pour avoir accepté de diriger ce mémoire et pour lui avoir donné son but, ainsi que pour son aide précieuse et pour les nombreuses références passionnantes qu'il m'a fourni. Je tiens ègalement a remercier mon frère Arthur, pour ses conseils avisés et son jugement mathématique très sur ; ainsi que ma mère, pour son calme et son écoute. Enfin, je remercie ma compagne Camille, pour sa patiente et son attention permanentes, même dans les pires moments.

Prérequis et notations

Dans ce travail,

1. $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$) désigne les entiers naturels (resp. relatifs) incluant l'entier 0.

2. $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$) désigne le corps des rationnels (resp. des réels, ou des complexes).

3. Par convention, tout corps sera supposé commutatif, on parlera de 'corps gauche' dans le cas contraire.

4. En revanche, un anneau ne sera pas supposé commutatif en général.

5. On admettra qu'un anneau possède une unité multiplicative, on parlera de 'pseudo-anneau' dans le cas contraire. Par conséquent, on admettra qu'un morphisme d'anneau doit préserver l'unité multiplicative (on parle de morphisme de pseudo-anneau dans le cas contraire).

6. Le cardinal d'un ensemble E sera noté $\#(E)$.

7. L'ensemble $\{n, \cdots, m\} \subset \mathbb{Z}$ sera noté $[\![n, m]\!]$.

Les définitions en catégories reposent fortement sur la notion de propriété universelle : on veut qu'un objet satisfasse une certaine condition, de manière optimale, au sens où tout autre objet satisfaisant cette condition se factoriserait de manière unique au travers de notre premier objet (dans un sens à préciser). Donc un tel objet serait unique à unique isomorphisme près : tous les objets 'optimaux' sont canoniquement isomorphes entre eux.

Première partie

Introduction aux Catégories

1.1 Définition et premières propriétés

Définition 1. Une ***catégorie*** $\mathcal{C}$ est la donnée de :

- Une classe $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ de ses ***objets***.
- Pour A et B des objets de $\mathcal{C}$, une classe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, les ***morphismes*** de A dans B (suivant les auteurs, on peut aussi parler de flèches).
- Pour trois objets de $\mathcal{C}$ A, B et C, une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

  appelée ***composition***, qui doit être associative. On notera $f \circ g$ ou encore fg la composition de $g \in \mathrm{Hom}\,(A, B)$ et $f \in \mathrm{Hom}\,(B, C)$.

De plus, pour A un objet de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ doit contenir un élément noté 1_A tel que pour tout morphisme f de A dans un objet B, on ait $1_B f = f = f 1_A$.

Remarque.

1. Ici on parle de classes et non pas forcément d'ensembles, on choisit de ne pas considérer les problèmes ensemblistes par manque de temps, ceci dit, on utilisera (de manière abusive) les notations $\in$ et $\subset$.
2. En pratique, on notera $A \in \mathcal{C}$ pour $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ et $f : A \to B$ pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (ou encore $A \xrightarrow{f} B$ dans les diagrammes).
3. Les classes de morphismes peuvent également être notées $\mathcal{C}(A, B)$ ou $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (comme dans [1] ou [2]).

Pour f un morphisme de A dans B, on dit que A est le ***domaine*** de f et B le ***codomaine***. Tout morphisme possède un unique (co)domaine.

Exemple. Une construction catégorique élémentaire est celle de ***catégorie produit*** : On considère deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, on pose alors $\mathcal{C} \times D$ la catégorie dont les objets sont les couples (C, D) avec $C \in \mathcal{C}$ et $D \in \mathcal{D}$, et avec

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, Y), (X', Y')) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$$

La composition est définie composante par composante et $1_{(X,Y)} := (1_X, 1_Y)$; on vérifie immédiatement qu'il s'agit bien d'une catégorie (on remarque cependant que cette construction est faite en négligeant tout problème ensembliste posé par la construction des classes $\mathrm{Obj}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, Y), (X', Y'))$).

La définition très générale de catégorie fait que cette notion apparait partout en mathématiques, par exemple la plupart (sinon toutes) les 'structures' d'ensembles connues peuvent se voir comme au sein d'une catégorie, dont les morphismes seraient les applications qui 'préservent la structure', c'est par exemple le cas des catégories suivantes (dans tous les cas suivants, la composition est la composition des fonctions au sens des ensembles et l'identité est la fonction identité de l'ensemble considéré).

- $\mathfrak{Ens}$ la catégorie des ensembles, dont les objets sont les ensembles, les morphismes sont les fonctions.
- $\mathfrak{Grp}$ la catégorie des groupes, les morphismes sont les morphismes de groupes.
- $\mathfrak{Ann}$ la catégorie des pseudo-anneaux, les morphismes sont les morphismes d'anneaux (on notera $\mathfrak{Ann}_1$ la catégorie des anneaux, dont les morphismes seront les morphismes d'anneaux préservant l'unité).
- $\mathfrak{Top}$ la catégorie des espaces topologiques, les morphismes sont les applications continues.
- $\mathfrak{vect}(K)$ la catégorie des K-espaces vectoriels sur un corps K fixé, les morphismes sont les applications linéaires.

Cela dit, on aurait tort de croire qu'il s'agit là d'une situation générale. Les objets d'une catégorie n'ont a priori aucune raison d'être des ensembles, encore moins des ensembles munis d'une structure, et donc les morphismes n'ont pas de raison d'être des applications entre ensembles :

Exemple. Soit $n \geqslant 1$ un entier, on construit la catégorie $[n]$ à n objets (indicés par $[\![0, n]\!]$) et telle qu'il existe un unique morphisme $i \to j$ si et seulement si $j \leqslant i$ (l'unique morphisme $i \to i$ étant 1_i).
Un autre exemple plus subtil est celui de la catégorie des correspondances (qui sont à la base de la théorie des foncteurs de correspondances). Ses objets sont les ensembles finis. Les morphismes $X \to Y$ sont les parties de $Y \times X$, qui ne sont pas nécessairement des applications.

Il n'y a donc à priori pas de raison de pouvoir parler des 'éléments' d'un objet dans une catégorie, non plus que de l'image d'un élément d'un objet par un morphisme. (On dira qu'une catégorie dont les objets sont des ensembles et les morphismes des applications est une catégorie ***concrète***).

Cependant, en pratique, il existe deux restrictions de la notion de catégorie :

- Quand la classe $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ est un ensemble, on dit que $\mathcal{C}$ est ***petite***.
- Quand les classes de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ sont des ensembles, on dit que $\mathcal{C}$ est ***localement petite***.

Dans la suite, on admettra par défaut qu'une catégorie est non petite et localement petite (c'est par exemple le cas des 5 exemples donnés au dessus). On essaiera de préciser les énoncés restant vrais en général.

Définition 2. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $X, Y \in \mathcal{C}$ et $\alpha : X \to Y$, on dit que α est un :

- ***Monomorphisme*** si pour tout objet Z de $\mathcal{C}$ et $\beta, \gamma \in \mathrm{Hom}\,(Z, X)$, on a :

$$\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$$

  Moralement, α 'n'oublie pas trop d'information' sur son domaine X. On notera alors $\alpha : X \hookrightarrow Y$

- ***Épimorphisme*** si pour tout objet Z de $\mathcal{C}$ et $\beta, \gamma \in \mathrm{Hom}\,(Y, Z)$, on a :

$$\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha \Rightarrow \beta = \gamma$$

  Moralement, α 'donne suffisamment d'informations' sur son codomaine Y. On notera alors $\alpha : X \twoheadrightarrow Y$

- ***Monomorphisme scindé*** si

$$\exists \beta : Y \to X \mid \beta \circ \alpha = 1_X$$

  ce qui revient à dire qu'il existe un morphisme 'inverse' de α à gauche.

- ***Épimorphisme scindé*** si

$$\exists \beta : Y \to X \mid \alpha \circ \beta = 1_Y$$

  ce qui revient à dire qu'il existe un morphisme 'inverse' de α à droite.

- ***Isomorphisme*** si α est à la fois un épimorphisme scindé et un monomorphisme scindé. On note alors $X \simeq Y$ ou plus précisément $X \overset{\alpha}{\simeq} Y$.

Il découle de cette définition qu'un épimorphisme (resp. monomorphisme) scindé est toujours un épimorphisme (resp. monomorphisme), il suffit de composer par les morphismes 'inverses' pour le montrer.
Les notions se monomorphismes et épimorphismes semblent étendre aux monde des catégories les concepts ensemblistes d'injection et de surjection. Ce sont en fait des concepts plus généraux dans le sens ou un épimorphisme (s'il est une application ensembliste) peut ne pas être surjectif :

Exemple. Dans $\mathfrak{Ann}$, l'unique morphisme $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est un épimorphisme, clairement non surjectif. En effet, soient $\beta, \gamma : \mathbb{Q} \to A$ tels que $\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha$, on aurait alors, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$:

$$\beta\left(\frac{p}{q}\right) = \beta(p)(\beta(p))^{-1} = \gamma(p)(\gamma(q))^{-1} = \gamma\left(\frac{p}{q}\right)$$

($\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha$ revient en effet à dire que β et γ coïncident sur les entiers).

Cela dit, il existe des catégories ou les épimorphismes sont toujours des applications surjectives (c'est le cas dans $\mathfrak{Grp}$).

Une fois introduites les notions de morphismes, on est tenté d'introduire les notions de noyau et d'image d'un morphisme, ce qui n'est pas simple dans un cadre général (on y revient dans la 2ème partie). Nous allons néanmoins pouvoir définir la notion de noyau d'un morphisme.

Définition 3. Un objet A d'une catégorie $\mathcal{C}$ est dit ***initial*** (resp. ***terminal***) si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(A, X)$ (resp. $\mathrm{Hom}\,(X, A)$) est réduit à un singleton.
Un ***objet zéro*** est alors un objet à la fois terminal et initial.

La définition permet d'affirmer que dans une catégorie, les objets initiaux, terminaux, ou zéro sont, s'ils existent, uniques à unique isomorphismes près. Considérons par exemple deux objets terminaux T_1 et T_2 [1]. On note α l'unique élément de $\mathrm{Hom}\,(T_1, T_2)$ et β l'unique élément de $\mathrm{Hom}\,(T_2, T_1)$. Les ensembles $\mathrm{Hom}\,(T_1, T_1)$ et $\mathrm{Hom}\,(T_2, T_2)$ ne contiennent que les identitées [2], on a donc $\alpha \circ \beta \in \mathrm{Hom}\,(T_2, T_2)$ et $\beta \circ \alpha \in \mathrm{Hom}\,(T_1, T_1)$, d'où $\alpha \circ \beta = 1_{T_2}$ et $\beta \circ \alpha = 1_{T_1}$. On a donc bien par définition un unique isomorphisme entre T_1 et T_2.

Exemple. Nous ne l'avons pas précisé plus haut, mais pour faire de $\mathfrak{Ens}$ une catégorie, on doit entre autre admettre l'existence d'une application de $\varnothing$ dans lui même pour avoir $1_\varnothing$, en fait ceci découle de la définition formelle d'une application. Une application $f : X \to Y$ est en fait définie par une partie $U \subset X \times Y$ (son graphe) telle que

$$\forall x \in X, \exists!\; y \in Y \mid (x, y) \in U$$

En particulier si $X = \varnothing$, $X \times Y = \varnothing$ et $\varnothing$ définit bien l'unique application $\mathcal{E} \to \varnothing$, en revanche, si $Y = \varnothing$, $X \times Y = \varnothing$ et on ne peut pas définir d'application $X \to Y$, sauf si $X = \varnothing$ également.
Avec cette définition d'application, $\varnothing$ devient un objet initial non terminal dans $\mathfrak{Ens}$ car $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ens}}(E, \varnothing)$ est toujours vide si $E \neq \varnothing$. Par ailleurs, les singletons sont des objets terminaux non initiaux de $\mathfrak{Ens}$ (on remarque qu'ils sont bien 'isomorphes' entre eux au sens de $\mathfrak{Ens}$ puisque qu'il existe une bijection entre tout couple de singletons).
On voit donc que $\mathfrak{Ens}$ est une catégorie possédant objet terminal et initial, mais pas d'objet zéro.

On note que si une catégorie $\mathcal{C}$ possède 0 un objet zéro, alors il existe toujours au moins un morphismes entre deux objets X et Y de $\mathcal{C}$, donné par la composée du morphisme de $\mathrm{Hom}\,(X, 0)$ par celui de $\mathrm{Hom}\,(0, Y)$. Ce morphisme est noté 0 est appelé le ***morphisme nul***.

Définition 4. Soient $X, Y \in \mathcal{C}$ une catégorie, et $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$. On dit qu'un objet Z muni de $\beta \in \mathrm{Hom}\,(Z, X)$ est un ***égalisateur*** des (α_i) si

(1) $\forall i, j \in I,\ \alpha_i \circ \beta = \alpha_j \circ \beta$

(2) Pour tout autre couple (U, γ) respectant le point (1), il existe un unique $\delta : U \to Z$ tel que $\beta \circ \delta = \gamma$. La situation est donc celle du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r, shift left, bend left, "\alpha_i"] \arrow[r, shift right, bend right, "\alpha_j"'] & Y \\ U \arrow[u, dashed, "\exists!\delta"] \arrow[ur, "\gamma"'] & & \end{tikzcd}$$

1. le cas des objets initiaux se règle de manière semblable, et le cas des objets zéro découle immédiatement des deux premiers
2. il contiennent un seul élément par hypothèse et ils doivent toujours contenir l'identité par définition d'une catégorie

Soient $X, Y \in \mathcal{C}$ une catégorie, et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathrm{Hom}\,(X,Y)$. On dit d'un objet W muni de $\beta' \in \mathrm{Hom}\,(Y,W)$ est un ***coégalisateur*** des (α_i) si

(1) $\forall i, j \in I,\ \beta' \circ \alpha_i = \beta' \circ \alpha_j$

(2) Pour tout autre couple (U, γ') respectant le point (1), il existe un unique $\delta' : W \to U$ tel que $\delta' \circ \beta' = \gamma'$. La situation est donc celle du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\alpha_i"] \arrow[r, bend right, "\alpha_j"'] & Y \arrow[r, "\beta'"] \arrow[dr, "\gamma'"'] & W \arrow[d, dashed, "\exists! \delta'"] \\ & & U \end{tikzcd}$$

Là encore, il est facile de vérifier que l'égalisateur et le coégalisateurs sont, s'ils existent, uniques à unique isomorphisme près.

Définition 5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant un objet zéro et $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(A,B)$ un morphisme.

- Le ***noyau*** de α est l'égalisateur de α et de 0, il est noté $\mathrm{Ker}\ \alpha$.
- Le ***conoyau*** de α est le coégalisateur de α et de 0, il est noté $\mathrm{Coker}\,\alpha$. Comme ce sont des égalisateurs, on peut écrire les diagrammes correspondant aux propriétés universelles du noyau et du conoyau comme des diagrammes d'égalisateur et de coégalisateur :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}\ \alpha \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "0"'] & Y \\ U \arrow[u, dashed, "\exists! \delta"] \arrow[ur, "\gamma"'] & & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "0"'] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\gamma'"'] & \mathrm{Coker}\,\alpha \arrow[d, dashed, "\exists! \delta'"] \\ & & U \end{tikzcd}$$

Le noyau d'un morphisme $\alpha : A \to B$ est donc un couple (K, ι) avec $\iota : K \to X$ tel que entre autres, $\alpha \circ \iota = 0 \circ \iota = 0$.
Dans le cadre de $\mathfrak{Grp}$, K est le noyau au sens classique et ι l'injection canonique de K dans le domaine X de α.

On remarque que les définitions d'égalisateur et de coégalisateur semblent d'une certaine manière symétrique l'une de l'autre, ceci est en fait du à la notion de catégorie opposée, que nous allons introduire maintenant :

Définition 6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (pas forcément localement petite). On appelle ***catégorie opposée*** de $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathcal{C}^{op}$ dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$ et les morphismes sont donnés par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$, et la composition par $f \circ^{op} g = g \circ f$.

Ainsi le coégalisateur d'une famille (α_i) de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ se voit comme l'égalisateur dans $\mathcal{C}^{op}$ de la famille $(\alpha_i) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y,X)$.
Ce même raisonnement consistant à travailler dans la catégorie opposée donne le ***principe de dualité*** : en théorie des catégories, toute définition/théorème/preuve possède un dual obtenu en 'retournant les flèches'. (le noyau et le conoyau sont un autre exemple de dualité).

Après ces quelques points théoriques, nous pouvons donner quelques exemples de catégories particulières, décrites explicitement en donnant leurs objets et leurs morphismes. On peut ainsi parler de la catégorie 1, possédant un seul objet $\bullet$ et son identité $1_\bullet$.
On peut aussi décrire la catégorie à un seul objet $E = \{1,2\}$ et dont les morphismes sont les bijections de E dans lui même, et alors $\mathrm{Hom}\,(E,E)$ est une façon de voir le groupe $\mathfrak{S}_2$, cette méthode peut en fait s'étendre pour visualiser tout groupe :

Exemple. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (localement petite) admettant un seul objet $\bullet$, on peut voir $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$ comme un monoïde pour la composition des morphismes (le neutre serait $1_\bullet$). Et si tous les morphismes sont en fait des isomorphismes, alors $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$ peut se voir comme un groupe.

De manière plus générale, une catégorie dont tous les morphismes sont des isomorphismes est appelée un ***groupoïde***.
Un autre exemple de visualisation d'ensemble comme une catégorie est donné par les ensembles préordonnés, c'est à dire muni d'un préordre (relation binaire réflexive transitive). En effet pour $(E, \leqslant)$ un ensemble préordonné, on peut considérer la catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets sont les éléments de E, et $\mathrm{Hom}(x, y)$ contient un élément si et seulement si $x \leqslant y$. La réflexivité donne l'existence des identitées, et la transitivité donne la composition.
Enfin, un exemple extrême de catégorie est celui des catégories discrètes, c'est à dire ne possédant pas d'autres morphismes que les identitées. Une façon lyrique de voir ceci est de dire qu'une catégorie modélise des objets et leurs relations (par leurs morphismes) et qu'une catégorie discrète est un cas particulier, où tout objet est totalement isolé des autres.

Enfin, avant de passer à la section suivante, nous donnons une nouvelle définition par une propriété universelle (ainsi que sa définition duale).

Définition 7. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\mathcal{C}$

1. Un couple $(P, (\varphi_i)_{i \in I})$, constitué d'un objet de $\mathcal{C}$ et d'une famille de morphismes $\varphi_i \in \mathrm{Hom}(P, X_i)$, est un ***produit*** des X_i si pour tout autre couple $(Y, (\psi_i)_{i \in I})$ semblable, il existe un unique morphisme $\psi : Y \to P$ faisant commuter pour tout $i \in I$ le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\exists ! \psi"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & P \arrow[d, "\varphi_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

   On note alors $P = \prod_{i \in I} X_i$ (en omettant les morphismes (φ_i)).

2. Un couple $(C, (\iota_i)_{i \in I})$, constitué d'un objet de $\mathcal{C}$ et d'une famille de morphismes $\iota_i \in \mathrm{Hom}(X_i, C)$, est un ***coproduit*** des X_i si pour tout autre couple $(Z, (\chi_i)_{i \in I})$ semblable, il existe un unique morphisme $\chi : C \to Z$ faisant commuter pour tout $i \in I$ le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, dashed, "\exists ! \chi"] & Z \arrow[dl, "\chi_i"] \\ X_i \arrow[u, "\iota_i"] & \end{tikzcd}$$

   On note alors $C = \coprod_{i \in I} X_i$ (en omettant les morphismes (ι_i)).

3. Si $\prod_{i \in I} X_i \simeq \coprod_{i \in I} X_i$, on parle alors de ***biproduit*** (ou somme directe), on notera souvent $\oplus_{i \in I} X_i$ les biproduits.

Remarque. Par définition, pour $X \in \mathcal{C}$, on a :

$$\mathrm{Hom}\left(X, \prod_{i\in I} X_i\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}\,(X, Xi)$$

$$\mathrm{Hom}\left(\coprod_{i\in I} X_i, X\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}\,(Xi, X)$$

(les termes à droite sont des produits cartésiens d'ensembles). Ceci permet notamment d'écrire les morphismes entre produits/coproduits/biproduits comme des matrices, une méthode qui sera réutilisée dans la suite : ainsi l'injection $\iota : X \to X \oplus Y$ serait notée $\binom{1_X}{0}$ et la projection $\pi : X \oplus Y \to Y$ serait notée $(0\ 1_Y)$

Dans certaines catégories usuelles, les notions de produit donnent des notions connues : dans $\mathfrak{Ens}$ par exemple, les produits sont les produits cartésiens et les coproduits sont les unions disjointes.
On note cependant que les produits/coproduits n'existent pas toujours : Dans les catégories d'espaces vectoriels, le produit est la somme directe, et si on considère la catégorie des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel E donné, la somme directe de sous-espaces n'est pas toujours définie (il faut que deux sous-espaces aient une intersection triviale).

Exemple. Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble pré-ordonné. Comme pour la catégorie $[n]$, on peut considérer la catégorie $\mathcal{E}$, dont les objets sont les éléments de E et si il existe un morphisme $x \to y$ si et seulement si $x \leqslant y$. Par définition, un produit $p = x \prod y$ serait un sup de x et de y : on a $p \geqslant x$ et $p \geqslant y$ et pour tout q tel que $q \geqslant x$ et $q \geqslant y$, on a $q \geqslant p$. De la même manière, un coproduit $x \coprod y$ serait un inf de x et de y. Un ensemble préordonné est donc un treillis si et seulement si sa catégorie correspondante admet produits finis et coproduits finis (plus généralement, si tous les produits et coproduits existent, on a un treillis complet, où toute partie, pas nécessairement finie, admet un sup et un inf).

Enfin, les produits/coproduits étant définis par une propriété universelle, ils le sont à unique isomorphisme près : dans $\mathfrak{Ens}$ par exemple, on a une bijection entre $A \times B$ et $B \times A$ qui satisfont tous les deux la propriété universelle du produit.

1.2 Foncteurs et Transformations Naturelles

1.2.1 Foncteurs

À présent que nous avons vu quelque constructions catégoriques, nous sommes en droit de nous demander si on peut construire une notion de morphismes entre les catégories. C'est effectivement le cas : la notion en question est celle de foncteur.

Définition 8. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, un ***foncteur covariant*** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée de :

- Une 'application'
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Obj}(\mathcal{D}) \\ A & \longmapsto & F(A) \end{array}$$
- Pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$, une application $\mathrm{Hom}\,(X,Y) \to \mathrm{Hom}\,(F(X), F(Y))$ telle que :
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$
pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ et $f : X \to Y, g : Y \to Z$ des morphismes. On doit de plus avoir $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

On appellera ***foncteur contravariant*** tout foncteur $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ (il s'agit donc de la notion duale du foncteur covariant).

Dans la suite, le terme foncteur désignera par défaut un foncteur covariant.
Là encore, on a un problème de définition : associer un objet de la classe $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ à un objet de la classe $\mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ n'est en général par permis (ces classes ne sont pas des ensemble à moins que les catégories considérées soient petites), à nouveau nous évitons ces problèmes ensemblistes.

Remarque. Un foncteur contravariant F donne une application
$$F : \mathrm{Hom}\,(X,Y) \to \mathrm{Hom}\,(F(Y), F(X))$$
telle que $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

On note également que les foncteurs peuvent être 'composés' de manière naturelle : Pour $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ trois catégories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ des foncteurs on peut définir $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ par :
$$G \circ F : \begin{array}{rcl} \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Obj}(\mathcal{E}) \\ A & \longmapsto & G(F(A)) \end{array}$$
$$G \circ F : \begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}\,(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\,(G(F(X)), G(F(Y))) \\ f & \longmapsto & G(F(f)) \end{array}$$
Il est alors immédiant que $G \circ F$ est bien un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$. Il existe bien-sûr une construction semblable pour les foncteurs contravariants. On note que pour toute catégorie $\mathcal{C}$, on a un foncteur canonique $1_{\mathcal{C}}$ envoyant les objets, ainsi que les morphismes, sur eux-mêmes. Tout ceci permet en principe de construire une catégorie des catégories, dont les morphismes seraient les foncteurs, ce qui pose à nouveau des problèmes ensemblistes.
Une fois passées ces premières définitions, nous pouvons donner quelques exemples de foncteurs plus ou moins canoniques :

Exemple.

- Pour toute catégorie $\mathcal{C}$, on a un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{op}$, appelé ***foncteur opposé***, associant les objets à eux mêmes et 'retournant le sens des flèches', associant tout morphisme $f : X \to Y$ au morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y, X)$. Il s'agit d'un foncteur contravariant, en effet, pour $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, on a par définition $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.
- Dans les catégories dont les objets peuvent être vus comme des ensembles (comme $\mathfrak{Grp}$ ou $\mathfrak{Top}$) on a un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathfrak{Ens}$, dit ***foncteur d'oubli***, qui à chaque objet associe son ensemble sous-jacent, et à tout morphisme l'application sous-jacente.
- Si $\mathcal{C}$ est une catégorie localement petite et X un objet de $\mathcal{C}$, on pose $\mathrm{Hom}\,(X, -) : \mathcal{C} \to \mathfrak{Ens}$ le ***foncteur covariant représenté par*** X, il associe à tout objet $Y \in \mathcal{C}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$ [3] et a tout morphisme $f : Y \to Z$ l'application :

  $$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}\,(X, f) : & \mathrm{Hom}\,(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\,(X, Z) \\ & g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

  (bien-sûr, on peut considérer de la même manière un foncteur $\mathrm{Hom}\,(-, X)$, qui est contravariant : le ***foncteur contravariant représenté par X***)

Remarque. Il existe dans le cas des groupes une sorte de notion 'adjointe' [4] du foncteur d'oubli : un foncteur $\mathfrak{Ens} \to \mathfrak{Grp}$, qui à tout ensemble S associe le groupe libre $F(S)$. Pour la construction des groupes libres, on pourra consulter [5].

Exemple. On a vu dans la première section qu'un groupe G pouvait se voir comme un groupoïde $\mathfrak{G}$ à un seul objet $\bullet$ et dont un morphisme $\mathfrak{g} \in \mathrm{Hom}\,(\bullet, \bullet)$ modélise l'élément $g \in G$. Sous ce formalisme, un G-ensemble peut se voir comme un foncteur $S : \mathfrak{G} \to \mathfrak{Ens}$, en effet un tel foncteur est la donnée d'un ensemble $S(\bullet)$ (le G-ensemble proprement dit), et d'applications $S(\mathfrak{g}) : S(\bullet) \to S(\bullet)$ pour $\mathfrak{g} \in \mathrm{Hom}\,(\bullet, \bullet)$. En notant $g.x := S(\mathfrak{g})(x)$ pour $x \in S(\bullet)$, les axiomes d'un foncteur donnent que l'on a bien défini une action de G sur $S(\bullet)$.

La notion de foncteur permet de faciliter l'explicitation d'un diagramme, que l'on peut maintenant considérer comme la donnée d'une catégorie $\mathcal{D}$ (le plus souvent petite) et d'un foncteur $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ (les objets/morphismes de $\mathcal{D}$ ont pour image par ce foncteur les éléments de notre diagramme).

Définition 9. Soit un diagramme dans une catégorie $\mathcal{C}$, donné par $\mathcal{D}$ une catégorie petite, et $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur. Un ***cône*** est la donnée d'un objet N de $\mathcal{C}$ et d'une famille de morphismes $\varphi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, F(X))$ indexés par les objets de $\mathcal{D}$, telle que pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{D}$, on doit avoir $F(f) \circ \varphi_X = \varphi_Y$, ou encore faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\varphi_X"'] \arrow[dr, "\varphi_Y"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y) \end{tikzcd}$$

(d'où l'appellation de cône).

3. on a bien besoin que $\mathcal{C}$ soit localement petite pour $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$ soit un ensemble et que la définition ait un sens

4. La notion d'adjonction est centrale en théorie des catégories, néanmoins nous ne l'explorerons pas ici, on pourra consulter [1]

Une ***limite*** du diagramme est un cône (L, ψ) 'universel' au sens où tout autre cône (N, φ) se factorise de manière unique au travers d'un morphisme $\delta : N \to L$ faisant commuter le diagramme total : pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{D}$: le diagramme suivant doit être commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[d, dashed, "\exists!\delta"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi_X"'] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_Y"] & \\
& L \arrow[dl, "\psi_X"'] \arrow[dr, "\psi_Y"] & \\
F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Les définitions duales sont respectivement celles de ***cocône*** et de ***colimite***, respectivement données par les diagrammes suivants (qui doivent êtres commutatif pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{D}$) :

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\gamma_X"'] & & F(Y) \arrow[dl, "\gamma_Y"] \\
& K &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] \arrow[dr, "\psi_X"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_X"'] & & F(Y) \arrow[dl, "\psi_Y"'] \arrow[ddl, bend left, "\gamma_Y"] \\
& C \arrow[d, dashed, "\exists!\delta"] & \\
& K &
\end{tikzcd}$$

Où (K, γ) est un cocône du diagramme et (C, ψ) la colimite du diagramme.

Comme toujours, les limites et colimites sont, quand elles existent, uniques à unique isomorphisme près.
Les notions de limite et de colimite se retrouvent partout en théorie des catégories car elles sont très générales (on n'a rien imposé à la catégorie petite $\mathcal{D}$ qui définit le diagramme de départ), ainsi certaines définitions déjà croisées sont en fait des cas particuliers de limites/colimites. Par exemple si la catégorie $\mathcal{D}$ est discrète, on retrouve la définition de produit/coproduit, et si $\mathcal{D}$ possède deux objets X et Y et l'un ou l'autre des ensembles $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$ et $\mathrm{Hom}\,(Y, X)$ est vide, on retrouve la définition d'égalisateur/coégalisateur.
Bien-sûr, il existe d'autres constructions basées sur les limites/colimites, nous en introduisons deux maintenant :
On a vu dans la permière section que l'on peut voir un ensemble préordonné comme une catégorie, on considère une catégorie $\mathcal{D}$ représentant un ensemble E partiellement ordonné. Si tout couple d'élements de E admet une borne sup (resp. une borne inf), on dit que $\mathcal{D}$ est un ***système codirect*** (resp. ***système direct***).

<u>Définition</u> 10. Soit un diagramme dans une catégorie $\mathcal{C}$, donné par $\mathcal{D}$ une catégorie petite, et $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un foncteur.
Si $\mathcal{D}$ est un système codirect (resp. système direct), on dit que la colimite (resp. la limite) du diagramme est une ***limite inductive*** (resp. ***limite projective***). La limite inductive (resp. projective) d'une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de $\mathcal{C}$ est notée $\varinjlim_{i \in I} X_i$ (resp. $\varprojlim_{i \in I} X_i$)

Si $\mathcal{D}$ est constituée de trois objets Y_1, Y_2 et X, ainsi que de deux morphismes $\alpha_1 : Y_1 \to X$ et $\alpha_2 : Y_2 \to X$, les définitions de limites/colimites deviennent celle de ***pullback/pushout***[5], notées respectivement $Y_1 \times_X Y_2$ et $Y_1 \sqcup_X Y_2$. Les propriétés universelles des produits fibrés/sommes amalgamées sont résumées dans les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dashed, "\exists!\delta"] \arrow[drr, bend left, "\gamma_2"] \arrow[ddr, bend right, "\gamma_1"'] & & \\
& Y_1 \times_X Y_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\beta_1"'] & Y_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
& Y_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & Y_2 \arrow[d, "\beta_2"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma_2"] & \\
Y_1 \arrow[r, "\beta_1"'] \arrow[drr, bend right, "\gamma_1"'] & Y_1 \sqcup_X Y_2 \arrow[dr, dashed, "\exists!\delta"] & \\
& & S
\end{tikzcd}$$

Exemple. (Groupes Profinis, cf. [5]) On considère $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de groupes avec pour tout $n \geqslant 1$, un épimorphisme $f_n : G_n \twoheadrightarrow G_{n-1}$ (en un sens, on peut dire que la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 'croissante'). On pose alors :

$$G := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x_{n+1}) = x_n \right\}$$

On veut montrer que $G = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} G_n$ (bien-sûr, les G_n munis des morphismes f_n forment un système direct).
Pour commencer, G est bien un groupe pour la loi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (la vérification est immédiate). On montre que G muni des projections canoniques π_n forme bien un cône sur le diagramme des G_n[6] :
Soit $f : G_n \to G_m$ un morphisme obtenu seulement par composition à partir des (f_n). Par définition, ceci n'est possible que si $m < n$, et on a alors $f = f_{m+1} \circ \cdots \circ f_{n-1} \circ f_n$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on a par définition de G :

$$f \circ \pi_n(x) = f(x_n) = f_{m+1} \circ \cdots \circ f_{n-1} \circ f_n(x_n) = f_{m+1}(x_{m+1}) = x_m = \pi_m(x)$$

Donc (G, π_n) forme bien un cône sur les G_n, soit $(\widetilde{G}, \widetilde{\pi_n})$ un autre cône, on pose $\psi : \widetilde{G} \to G$ le morphisme de groupe défini par $\psi(X) := (\widetilde{\pi_n}(X))_{n\in\mathbb{N}}$, il s'agit clairement d'un morphisme faisant commuter le diagramme des G_n, muni de G et $\widetilde{G}$.
De plus, tout autre morphisme δ faisant commuter ce diagramme serait tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{\pi_n}(X) = \pi_n(\delta(X))$$

Donc la n-ème coordonnée de $\delta(X)$ ne peut être que $\widetilde{\pi_n}(X)$, donc ψ est bien unique, et (G, π_n) est bien la limite projective des G_n.
Plus généralement, on appelle ***groupe profini*** toute limite projective de groupes finis.

Remarque. La structure des groupes profinis est tellement proche de celle des groupes finis qu'il est possible d'y adapter les théorèmes de Sylow.

5. en français 'produit fibré' et 'somme amalgamée' respectivement, cette terminologie est due à N.Bourbaki, on utilisera la terminologie anglophone dans la suite.
6. la loi de groupe sur G donne directement que les π_n sont des morphismes de groupe

Exemple. On cherche à donner les constructions explicites de Pullback et Pushout dans $\mathfrak{Ens}$: On se donne trois ensembles A, B et C, si on a des applications $f : A \to C$ et $g : B \to C$, le pullback est donné par

$$A \times_C B = \{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$$

muni des projections canoniques π_A, π_B dans A et B. Il est évident que le diagramme du pullback commute, il reste à montrer l'unicité : soit (P, γ_A, γ_B) un autre candidat. On a pour tout $x \in P$, que $f(\gamma_A(x)) = g(\gamma_B(x))$ par commutativité, on peut donc considérer l'application $\delta : P \to A \times_C B$ qui à x associe $(\gamma_A(x), \gamma_B(x))$, cette application est bien un morphisme dans $\mathfrak{Ens}$ et est clairement unique pour avoir la commutativité.
De manière analogue, on montre que le pushout est donné (quand le coproduit de A et B existe) par

$$A \sqcup_C B = {}^{A \sqcup B}/_{\sim}$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence $f(z) \sim g(z)$ pour tous $z \in C$.

1.2.2 Transformations Naturelles

Nous savons maintenant comparer les objets d'une catégorie entre eux avec des morphismes, ainsi que des catégories entre elles avec des foncteurs (que l'on peut voir comme des morphismes entre catégories). La prochaine étape logique est de vouloir comparer les foncteurs entre eux, c'est là qu'intervient la notion de transformation naturelle.

Définition 11. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Une ***transformation naturelle*** (on parle aussi de morphisme fonctoriel) $\eta : F \to G$ est la donnée, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, d'un morphisme $\eta_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),\eta_Y)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X),G(Y)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\eta_X,G(Y))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),G(Y))
\end{tikzcd}$$

Les morphismes η_X sont les ***composants*** de η.

- Si pour tout $X \in \mathcal{C}$, le morphisme η_X est un isomorphisme, η devient un ***isomorphisme naturel*** (ou fonctoriel) et on dit que F et G sont isomorphes.
- Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathfrak{Ens}$ est dit ***représentable*** s'il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que F soit isomorphe à $\mathrm{Hom}(X, -)$.
- Les catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont dites ***équivalentes*** s'il existe des foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tels que $F \circ G$ et $G \circ F$ soient respectivement isomorphes aux foncteurs identités sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$. On dit alors que F et G sont des ***équivalences*** et qu'ils sont quasi-inverses l'un de l'autre.

On a à nouveau un conflit ensembliste puisque η est défini comme une collection de morphismes, ce qui n'est à priori pas possible.
Il est possible de composer les transformations naturelles entre elles : pour trois foncteurs $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et deux transformations naturelles $\eta : G \to H$ et $\zeta : F \to G$, on construit la transformation naturelle $\eta \circ \zeta : F \to H$ en posant $(\eta \circ \zeta)_X := \eta_X \circ \zeta_X$ (on vérifie immédiatement qu'on a bien défini une transformation naturelle).On notera en général cette composition (dite ***composition verticale***) de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"{name=G, description}] \arrow[r, bend right=60, "H"'{name=H}] & \mathcal{D}
\arrow[Rightarrow, from=F, to=G, "\zeta"]
\arrow[Rightarrow, from=G, to=H, "\eta"]
\end{tikzcd}$$

De plus il existe toujours une transformation naturelle $1_F : F \to F$ définie par
$(1_F)_X := 1_{F(X)} \in \mathrm{Hom}(F(X), F(X))$.
Tout ceci permet de parler d'une catégorie $\mathrm{Fon}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ des foncteurs entre deux catégories fixées, dont les morphismes sont les transformations naturelles. De plus, on note $\mathcal{N}(F, G)$ les transformations naturelles entre deux foncteurs fixés F et G.

Proposition 1.1. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs, alors $\eta : F \to G$ est une transformations naturelle si et seulement si pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $f : X \to Y$, dire que notre carré commute est équivalent à

$$\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X$$

Mais par définition, on a

$$\eta_Y \circ F(f) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), \eta_Y) \circ F(f) \quad \text{et} \quad G(f) \circ \eta_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\eta_X, G(Y)) \circ G(f)$$

, donc la commutativité est équivalente à

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\eta_X, G(Y)) \circ G(f) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x), \eta_Y) \circ F(f)$$

Ce qui est par définition équivalent à dire que η est une transformation naturelle. $\square$

Cette dernière caractérisation d'une transformation naturelle peut se voir comme une définition ; elle peut d'ailleurs sembler plus naturelle et intuitive.

La notion d'équivalence de catégories apparait comme une notion plus souple que l'isomorphisme de catégorie, qui en pratique est beaucoup trop exigeant.

Exemple. La catégorie des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie (on considère qu'on a fixé des bases) et la catégorie des espaces vectoriels $\mathbb{C}^n$ munis de leurs bases canoniques sont clairement en relation, sans pour autant êtres isomorphes. On peut construire des foncteurs allant de l'une vers l'autre qui sont en fait des équivalences de catégorie.

Exemple. On se rappelle de l'exemple du groupe vu comme un groupoïde à un seul objet $\bullet$. Dans ce contexte, la donnée d'une transformation naturelle η entre deux foncteurs $S, T : \mathfrak{G} \to \mathfrak{Ens}$ est équivalente à celle d'un morphisme de G-ensembles entre $S(\bullet)$ et $T(\bullet)$. C'est en effet la donnée d'un morphisme $\eta_\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ens}}(S(\bullet), T(\bullet))$ (une application donc) telle que :

$$\forall \mathfrak{g} \in \mathrm{Hom}\,(\bullet, \bullet), T(\mathfrak{g}) \circ \eta_\bullet = \eta_\bullet \circ S(\mathfrak{g})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in S(\bullet), g \in G, g.\eta_\bullet(x) = \eta_\bullet(g.x)$$

Qui est bien la définition d'un morphisme de G-ensembles.

On a vu qu'on pouvait composer des transformations naturelles entre des foncteurs entre deux mêmes catégories (c'est la composition verticale) mais il existe une autre notion de composition, la ***composition horizontale***, qui part d'un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\zeta"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

On construit une nouvelle transformation naturelle

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "H \circ F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "L \circ G"'{name=D}] & \mathcal{E} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\eta * \zeta"] \end{tikzcd}$$

définie par $\eta * \zeta_X := \eta_{G(A)} \circ H(\zeta_A) = L(\zeta_A) \circ \eta_{F(A)}$. On a en effet égalité : $\eta * \zeta_X$ est en fait défini comme la diagonale du carré suivant :

$$\begin{tikzcd} H(F(A)) \arrow[r, "H(\zeta_A)"] \arrow[d, "\eta_{F(A)}"'] & H(G(A)) \arrow[d, "\eta_{G(A)}"] \\ L(F(A)) \arrow[r, "L(\zeta_A)"'] & L(G(A)) \end{tikzcd}$$

qui est commutatif par la proposition 1.1. La composition horizontale permet en particulier de construire des transformations naturelles entre des foncteurs de la forme $F \circ L$ et $G \circ L$ ou $K \circ F$ et $K \circ G$ à partir d'une transformation $F \to G$ (ce cas particulier de composition horizontale assez répandu est appelé ***whiskering***).
Par ailleurs, on note que les compositions verticales et horizontales interagissent bien entre elles : pour un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"{name=G, description}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=H}] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "F'"{name=F2}] \arrow[r, "G'"{name=G2, description}] \arrow[r, bend right=50, "H'"'{name=H2}] & \mathcal{E} \arrow[Rightarrow, from=F, to=G, "\zeta"] \arrow[Rightarrow, from=G, to=H, "\eta"] \arrow[Rightarrow, from=F2, to=G2, "\zeta'"] \arrow[Rightarrow, from=G2, to=H2, "\eta'"] \end{tikzcd}$$

On a la relation de commutativité : $(\eta \circ \zeta) * (\eta' \circ \zeta') = (\eta' * \eta) \circ (\zeta' * \zeta)$.
Remarque. Une structure de catégorie possédant des 'morphisme entre morphismes' (ici les transformations naturelles). Et possédant une composition entre ces morphismes, compatible avec celle des morphismes de base est appelée 2-catégorie.

Définition 12. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. On dit que F est

- ***Dense*** (ou essentiellement surjectif) si pour tout $D \in \mathcal{D}$, il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que
$$F(C) \simeq D$$
(i.e tout objet de $\mathcal{D}$ est isomorphe à l'image d'un certain objet de $\mathcal{C}$)
- ***Fidèle*** si pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$ l'application
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$
est injective (définition limitée au cas localement petit).[7]
- ***Plein*** si pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$ l'application
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$
est surjective (définition limitée au cas localement petit).

On dira qu'un foncteur est ***pleinement fidèle*** s'il est à la fois plein et fidèle (c'est à dire que les applications induites sur les ensembles de morphismes sont des bijections).

7. On peut montrer qu'une action d'un groupe G est fidèle si le foncteur $\mathfrak{G} \to \mathfrak{Ens}$ qui donne cette action est un foncteur fidèle

Ces nouvelles définitions de foncteurs vont nous permettre de parler de sous catégorie pleine (si le foncteur d'"injection" est un foncteur plein) et aussi de donner une caractérisation utile des équivalences de catégories.

Proposition 1.2. *Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Alors les assertions suivantes s'équivalent :*

(i) Le foncteur F est une équivalence.

(ii) Le foncteur F est pleinement fidèle et dense.

Démonstration. Si F est une équivalence, on doit clairement avoir que F est pleinement fidèle pour pouvoir définir G le quasi-inverse de F. Montrons que F est dense : par hypothèse, on a η un isomorphisme naturel entre $F \circ G$ et $1_{\mathcal{D}}$, donc pour tout X dans $\mathcal{D}$, on a η_X un isomorphisme entre $F(G(X))$ et X, donc F est bien dense.
Montrons maintenant $(ii) \Rightarrow (i)$: par densité de F, pour $D \in \mathcal{D}$, on peut considérer $C_D \in \mathcal{C}$ tel qu'on ait $\alpha_D : F(C_D) \to D$ un isomorphisme ; on pose $G(D) := C_D$ [8].
Pour deux objets D_1 et D_2 de $\mathcal{D}$, on obtient ainsi deux bijections

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(D_1)), F(G(D_2))) \\ \varphi & \longmapsto & \alpha_{D_2}^{-1} \circ \varphi \circ \alpha_{D_1} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(G(D_1)), F(G(D_2))) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(D_1), G(D_2)) \\ \alpha_{D_2}^{-1} \circ \varphi \circ \alpha_{D_1} & \longmapsto & \overline{\varphi} := F^{-1}(\alpha_{D_2}^{-1} \circ \varphi \circ \alpha_{D_1}) \end{array}$$

(on utilise que F induit une bijection entre les ensembles de morphismes). On pose alors $G(\varphi) := \overline{\varphi}$. Soient maintenant $D_1 \xrightarrow{\varphi_2} D_2 \xrightarrow{\varphi_1} D_3$ des morphismes, on a :

$$\begin{aligned} G(\varphi_1 \circ \varphi_2) &= F^{-1}(\alpha_{D_3}^{-1} \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \alpha_{D_1}) \\ &= F^{-1}(\alpha_{D_3}^{-1} \circ \varphi_1 \circ \alpha_{D_2}) \circ F^{-1}(\alpha_{D_2}^{-1} \circ \varphi_2 \circ \alpha_{D_1}) \\ &= G(\varphi_1) \circ G(\varphi_2) \end{aligned}$$

(comme F est un foncteur plein et fidèle, les bijections induites sur les ensembles de morphismes sont compatibles avec la composition). Nous avons donc construit un foncteur $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, reste à montrer qu'il est quasi inverse de F. On doit trouver deux isomorphismes naturels $\eta : F \circ G \to 1_{\mathcal{D}}$ et $\zeta : G \circ F \to 1_{\mathcal{C}}$.
On pose $\eta_X := \alpha_X$, montrons qu'il s'agit d'une transformation naturelle : soit $f : X \to Y$ dans $\mathcal{D}$, on a

$$\eta_Y \circ G(F(f)) = \alpha_Y \circ (\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X) = f \circ \alpha_X = f \circ \eta_X$$

Donc η est bien une transformation naturelle par la proposition 1.1 puisque le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd} F(G(X)) \arrow[r, "F(G(f))"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(G(Y)) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Et η est un isomorphisme naturel par définition de α_X. Il reste à construire ζ : on sait qu'il existe pour tout $C \in \mathcal{C}$ un isomorphisme

$$\alpha_{F(C)} : F(G(F(C))) \to F(C)$$

8. On vient ici d'utiliser l'axiome du choix pour les classes, ce qui pose à nouveau des problèmes de définition

Comme F induit une bijection sur les ensembles de morphismes, il existe un unique $\zeta_C : G(F(C)) \to C$ tel que $F(\zeta) = \alpha_{F(C)}$. Définir ζ de cette manière donne une transformation naturelle car, pour un morphisme $\tau : C_1 \to C_2$, on a

$$\begin{aligned} F\left(\zeta_{C_2} \circ G(F(\tau))\right) = F(\zeta_{C_2}) \circ F(G(F(\tau))) &= \alpha_{F(C_2)} \circ F(G(F(\tau))) \\ &= \alpha_{F(C_2)} \circ \alpha^{-1}_{F(C_2)} \circ F(\tau) \circ \alpha_{F(C_1)} \\ &= F(\tau \circ \zeta_1) \end{aligned}$$

Et comme F induit une bijection sur les morphismes, on a bien $\zeta_{C_2} \circ G(F(\tau)) = \tau \circ \zeta_1$ et le résultat (puisque ζ_X est bien un isomorphisme par définition). $\square$

Nous terminons cette section par un important résultat à propos des transformations naturelles, à savoir le lemme de Yoneda, qui va nous permettre (de manière plutôt anecdotique) de montrer le théorème de Cayley en théorie des groupes.

Lemme 1.3. *(Lemme de Yoneda)*
Soient $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et $F : \mathcal{C} \to \mathfrak{Ens}$ un foncteur. Pour tout $C \in \mathcal{C}$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}(\mathrm{Hom}\,(X,-), F) & \longrightarrow & F(X) \\ \eta & \longmapsto & \eta_X(1_X) \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. On note α l'application définie dans l'énoncé. Cette application est bien définie car η_X est une application $\mathrm{Hom}_C(X, X) \to F(X)$, donc on a bien $\eta_X(1_X) \in F(X)$. Pour $Y \in \mathcal{C}$, et $x \in F(X)$, on pose :

$$\begin{array}{rrcl} h^x_Y : & \mathrm{Hom}\,(X,Y) & \longrightarrow & F(Y) \\ & f & \longmapsto & F(f)(x) \end{array}$$

On construit ainsi une collection h_Y de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ens}}(\mathrm{Hom}\,(X,Y), F(Y))$. Soient ensuite $A, B \in \mathcal{C}$, $f : A \to B$ et $g : X \to A$ des morphismes. On a

$$\begin{aligned} h^x_B \circ \mathrm{Hom}\,(X,f)(g) = h^x_B(\mathrm{Hom}\,(X,f)(g)) = h^x_B(f \circ g) = F(f \circ g)(x) \\ = (F(f) \circ F(g))(x) = F(f)(F(g)(x)) = F(f) \circ h^x_A \end{aligned}$$

donc le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}\,(X,A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}\,(X,f)"] \arrow[d, "h^x_A"'] & \mathrm{Hom}\,(X,B) \arrow[d, "h^x_B"] \\ F(A) \arrow[r, "F(f)"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

Et donc h^x définit bien une transformation naturelle de $\mathrm{Hom}\,(X,-)$ vers F. On définit maintenant

$$\begin{array}{rrcl} \beta : & F(X) & \longrightarrow & \mathcal{N}(\mathrm{Hom}\,(X,-), F) \\ & x & \longmapsto & h^x \end{array}$$

Et pour $x \in F(X)$, on a

$$\alpha(\beta(x)) = \alpha(h^x) = h^x_X(1_X) = F(1_X)(x) = 1_{F(X)}(x)$$

Donc $\alpha \circ \beta = 1_{F(X)}$ et β doit être injective. On montre enfin que β est surjective pour avoir le résultat. Considérons donc $\eta \in \mathcal{N}(\mathrm{Hom}\,(C,-),F)$ et soit $x := \eta_X(1_X)$, pour tout $Y \in \mathcal{C}, f \in \mathrm{Hom}\,(X,Y)$, on a :

$$h^x_Y(f) = F(f)(x) = F(f)(\eta_X(1_X)) = \eta_y \circ \mathrm{Hom}\,(X,f)(1_X) = \eta_Y(f)$$

Donc $h^x_Y = \eta_Y$ et $h^x = \eta = \beta(x)$. □

Corollaire 1.4. *Pour $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite, on a une bijection entre $\mathcal{N}(\mathrm{Hom}\,(X,-),\mathrm{Hom}\,(Y,-))$ et $\mathrm{Hom}\,(Y,X)$*

Exemple. Pour illustrer, reprenons notre groupe G vu comme un groupoïde $\mathfrak{G}$. Dans ce contexte, le Lemme de Yoneda dit qu'à un G-ensemble S fixé, il existe autant de G-morphismes de G agissant sur lui même par translation vers S que d'éléments dans S.

Nous allons maintenant donner une démonstration du théorème de Cayley dans un langage catégorique, issue de [2] :

Proposition 1.5. *(Théorème de Cayley)*
Soit G un groupe fini d'ordre n, on a un morphisme de groupe injectif[9]

$$G \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$$

Démonstration. On note G^S l'ensemble sous-jacent au groupe G, $\mathfrak{G}$ le groupoïde associé à G, dont on note $\bullet$ l'unique objet. On pose $h := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ens}}(\bullet,-)$ (on a donc $h(\bullet) = G^S$ et $h(\mathfrak{g})$ est la multiplication a droite par $g \in G$). Définissons ensuite un foncteur $F : \mathfrak{G} \to \mathfrak{Ens}$ par $F(\bullet) = G^S$ et $F(\mathfrak{g}) = \eta^{\mathfrak{g}}_\bullet$ où $\eta^{\mathfrak{g}} \in \mathcal{N}(h,h)$ est une transformation naturelle avec $\eta^{\mathfrak{g}}_\bullet : G^S \to G^S$ telle que $\eta_\bullet(1_\bullet) = g$ (qui existe par surjectivité de l'application donnée dans le Lemme de Yoneda). On veut montrer que F est bien un foncteur.
On rappelle que dans la démonstration du Lemme de Yoneda, on a définit $\eta^{\mathfrak{g}}$ comme étant

$$\begin{array}{rccl} \eta^{\mathfrak{g}}_\bullet : & G^S & \longrightarrow & G^S \\ & x & \longmapsto & h(x)(\mathfrak{g}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Ens}}(\bullet,x)(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \circ x \end{array}$$

Alors pour $\mathfrak{f},\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ et $x \in G^S$, on a

$$F(\mathfrak{f}\circ\mathfrak{g})(x) = \eta^{\mathfrak{f}\circ\mathfrak{g}}_\bullet(x) = \mathfrak{f}\circ\mathfrak{g}\circ x = \eta^{\mathfrak{f}}_\bullet(\mathfrak{g}\circ x) = (\eta^{\mathfrak{f}}_\bullet \circ \eta^{\mathfrak{g}}_\bullet)(x) = (F(\mathfrak{f})\circ F(\mathfrak{g}))(x)$$

donc $F(\mathfrak{f}\circ\mathfrak{g}) = F(\mathfrak{f})\circ F(\mathfrak{g})$ et $F(1_\bullet) = 1_{G^S}$ est clair, donc F est bien un foncteur, fidèle car l'application donnée par le Lemme de Yoneda est injective. On peut donc voir F comme un monomorphisme de monoïde $G \to \mathrm{Hom}\,(G^S,G^S)$ et comme un foncteur préserve les isomorphismes, F est en fait 'à valeurs' dans $\mathfrak{S}(G^S) \simeq \mathfrak{S}_n$ d'où le résultat. □

Notons toutefois que l'on n'a pas utilisé toute la puissance du Lemme de Yoneda : on n'a pas utilisé que η est une transformation naturelle. Et si on regarde de plus près, on voit que $F(\mathfrak{f})$ peut se réinterpréter comme la translation par f. Donc on a plus ou moins une réécriture de la démonstration classique utilisant des actions de groupes. Il reste cependant instructif d'utiliser un formalisme catégorique pour traiter ce type de questions relativement concrètes.

9. On note que dans $\mathfrak{Grp}$ les monomorphismes sont exactement les morphismes injectifs

1.3 Notion de module

1.3.1 Définitions et premières constructions

Avant de continuer vers des notions catégoriques plus poussées, nous introduisons rapidement la notion de module, qui nous sera utile dans la suite, non seulement pour fournir des exemples particuliers de catégories aux propriétés agréables, mais aussi pour les rudiments d'algèbre homologique qui interviendront dans la troisième partie. Cette section est tirée en majorité de [3], [4] et [5].

Définition 13. Soit A un anneau commutatif. Une ***A-algèbre*** est la donnée d'un anneau B et d'un morphisme d'anneau

$$\varepsilon_B : A \to Z(B)$$

Où $Z(B)$ désigne le centre de B [10]

Dans la pratique, on notera $\lambda.a$ au lieu de $\varepsilon_B(\lambda)(a)$. On remarque que la notion d'algèbre généralise celle d'anneau puisqu'un anneau A peut toujours se voir comme une $\mathbb{Z}$-algèbre : il existe toujours un morphisme (unique) de $\mathbb{Z}$ dans $Z(A)$ (morphisme qui sert à définir la caractéristique).
Bien-sûr, nous sommes tentés de rechercher une notion de morphisme entre algèbres dans l'espoir de construire des catégories d'algèbres :

Définition 14. Soit K un anneau commutatif, A et B des K-algèbres, munis de morphismes ε_A et ε_B. Un ***morphisme d'algèbres*** est un morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ tel que

$$\forall \lambda \in K, a \in A,\ \varphi(\lambda.a) = \lambda.\varphi(a)$$

ce qui revient à dire que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "\varepsilon_A"'] \arrow[dr, "\varepsilon_B"] & \\ A \arrow[rr, "\varphi"] & & B \end{tikzcd}$$

On remarque alors que l'identité ensembliste est toujours un morphisme d'algèbres de A dans lui-même et que la composée de deux morphismes d'algèbres est un morphisme d'algèbres. Ceci permet d'introduire $K - \mathfrak{alg}$ la catégorie des algèbres sur K un anneau commutatif fixé. On note alors qu'un morphisme d'algèbres $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(A, B)$ est un monomorphisme (resp. épimorphisme, isomorphisme) si et seulement si c'en est un en tant que morphisme d'anneaux.

Exemple. L'anneau des nombres complexes $\mathbb{C}$ peut se voir comme $\mathbb{C}$-algèbre de deux manières différentes par les deux morphismes

$$z \mapsto z \quad \text{et} \quad z \mapsto \overline{z}$$

Ces deux algèbres sont en fait isomorphes par le morphisme $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à z associe $\overline{z}$.

On peut maintenant introduire la notion de module sur une algèbre, qui peut se voir comme une généralisation de la notion d'espace vectoriel sur un corps.

10. Les éléments de B qui commutent à tous les autres en multiplication, qui forme un sous-anneau commutatif de B

Définition 15. Soient K un anneau commutatif, A une K-algèbre. Un ***A-module à gauche*** M est un groupe abélien (que par défaut on notera additivement) muni d'une loi de composition externe $A \times M \to M$ (que l'on notera par $a.m$ ou encore am pour $(a, m) \in A \times M$) telle que, pour tous $m_1, m_2 \in M$ et $a_1, a_2 \in A$, on ait

- $1_A.m_1 = m_1$ (Neutralité)
- $(a_1a_2).m_1 = a_1.(a_2.m)$ (Associativité)
- $(a_1 + a_2).m_1 = a_1.m + a_2.m$ (Distributivité à droite)
- $a_1.(m_1 + m_2) = a_1.m_1 + a_2.m_1$ (Distributivité à gauche)

On définit de manière analogue la notion de ***A-module à droite***. Si l'anneau A est commutatif, alors les modules à gauche et à droite coïncident. Par défaut, le terme module sous-entendra module à gauche.
Comme un anneau commutatif est toujours muni d'une structure d'algèbre sur lui-même (par l'identité), on peut parler de A-module pour tout anneau commutatif A, et bien sur A peut alors lui-même être vu comme un A-module.
On remarque enfin que si K est un corps, un K-module n'est jamais qu'un K-espace vectoriel.

Remarque. Il sera utile dans la suite de noter qu'une structure de groupe abélien sur un ensemble S est équivalente à celle d'un $\mathbb{Z}$-module, en posant $n.a := a + a + a + a + \cdots + a$, n fois et $-1.a := -a$

Si K est un anneau commutatif, A et B sont deux K-algèbres, et $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'algèbres, alors un B-module M est naturellement muni d'une structure de A-module en posant $a.m := \varphi(a).m$ pour $a \in A, m \in M$.

À nouveau, nous sommes tentés de chercher une notion de morphismes entre modules, cette notion est donnée par la définition suivante :

Définition 16. Soient K un anneau commutatif, A une K-algèbre, M et N des A-modules. Un ***morphisme de A-modules*** $\alpha : A \to B$ est un morphisme de groupes abéliens respectant la condition suivante

$$\forall a \in A, m \in M, \alpha(a.m) = a.\alpha(m)$$

(condition qui rappelle celle des applications linéaires entres espaces vectoriels).

Ici aussi, la composition de morphismes de modules est encore un morphisme de modules, et l'identité ensembliste est clairement un morphisme de modules, ce qui permet de considérer $A - \mathfrak{Mod}$ la catégorie des A-modules[11] pour A une algèbre fixée sur un certain anneau commutatif K (là encore les monomorphismes/épimorphismes/monomorphismes sont ceux des groupes abéliens).

Pour un A-module M fixé, on dit que N un sous-groupe de M est un ***sous-module*** de M s'il est stable par la loi de composition externe, c'est à dire si

$$\forall a \in A, n \in N, a.n \in N$$

(on a alors que N est naturellement muni d'une structure de A-module par la restriction à N de la multiplication scalaire sur M). Il découle immédiatement de cette définition que les sous-modules de A vu comme A-module sont exactement ses idéaux.

11. Modules à gauche, on notera $\mathfrak{Mod} - A$ la catégorie formée par les modules à droite

Soit M un A-module et N un sous-module de M. Comme M est un groupe abélien, on peut toujours considérer M/N le quotient de M par N et $\pi : M \to M/N$ la projection canonique, dont on sait qu'il s'agit d'un morphisme de groupes.
On peut munir M/N d'une structure de A-module telle que π soit également d'un morphisme de A-modules en considèrant la loi de composition externe définie par $a.(m+N) := (a.m)+N$ pour $a \in A$ et $m \in M$, on doit montrer que cette loi est bien définie :
Soient $m_1, m_2 \in M$ tels que $m_1 - m_2 \in N$, on a $a.m_1 - a.m_2 = a.(m_1 - m_2) \in N$ car N est un sous-module, donc $a.m_1$ et $a.m_2$ sont également dans la même classe modulo N : l'opération est bien définie. Il est alors clair que M/N muni de cette loi forme un A-module et que π est un morphisme de A-modules.
On peut alors étendre la propriété universelle du groupe quotient pour obtenir celle du module quotient : Soit $\varphi : M \to M'$ un morphisme de A-modules contenant N dans son noyau [12], alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & M' \\ M/N \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

En fait, cette propriété universelle fait de M/N le conoyau de l'injection canonique $N \hookrightarrow M$.

D'autres constructions utiles qui réapparaitront dans la suite sont celles des produits directs et des sommes directes de modules :
Considérons K un anneau commutatif, A une K-algèbre fixée, I un ensemble d'indices et $(M_i)_{i\in I}$ une famille de A-modules. On considère le produit direct ensembliste $\prod M_i$ que l'on munit d'une structure de A module en construisant les lois de compositions composantes par composantes, on constate facilement que ce module, muni des projections canoniques dans $\mathfrak{Ens}$ est un produit dans la catégorie $A - \mathfrak{Mod}$.
La ***somme directe*** des $(M_i)_{i\in I}$ est quand à elle définie de la façon suivante :

$$\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{ (m_i) \in \prod_{i\in I} M_i \;\middle|\; \#(\{i \in I \mid m_i \neq 0\}) < +\infty \right\}$$

que l'on voit comme un sous-module de $\prod_{i\in I} M_i$ (car il s'agit clairement d'un sous-module).
La somme directe telle que définie ici est en fait le coproduit des M_i dans la catégorie $A - \mathfrak{Mod}$: l'injection canonique $\iota_i : M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ est bien-sûr un morphisme de modules, et si M est un autre candidat, avec $\chi_i : M_i \to M$ les injections, alors on définit :

$$\chi : \begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in I} M_i & \longrightarrow & M \\ \sum_{i\in I} \iota_i(m_i) & \longmapsto & \sum_{i\in I} \chi_i(m_i) \end{array}$$

Qui est clairement l'unique morphisme de modules tel que $\chi \circ \iota_i = \chi_i$ pour tout $i \in I$ (il est bien défini car il dépend d'une somme <u>finie</u> par définition de la somme directe). On conclut alors par la propriété universelle du coproduit.
On remarque que si l'ensemble I est fini, nos deux définitions coïncident ; ce qui revient à dire que l'on a toujours existence des biproduits finis dans $A - \mathfrak{Mod}$, ce qui sera nécessaire pour dire que $A - \mathfrak{Mod}$ est une catégorie abélienne (cf partie 2).

12. On ne sait pas encore que le noyau d'un morphisme de modules existe dans un contexte catégorique, on en reste pour l'instant aux notions classiques de noyau d'un morphisme de groupes/d'anneaux

1.3.2 Semi-simplicité, noethérianité, artinianité

Dans cette sous-section, on se donne K un anneau commutatif et A une K-algèbre.

Définition 17. Soit M un A-module, on dit que M est

- ***De type fini*** si il existe une famille finie $(m_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ d'éléments de M telle que

$$\forall m \in M, \exists (a_i) \in A \mid m = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$$

(i.e tout élément de M est combinaison linéaire (finie) des m_i, on dira que les m_i ***engendrent*** M, ou qu'il s'agit d'une partie génératrice finie de M). On note $A - \mathfrak{mod}$ la sous-catégorie de $A - \mathfrak{Mod}$ formée par les modules de type fini sur A.
- ***Simple*** si il est non nul et n'admet aucun sous-module propre (c'est à dire différent de $\{0\}$ et de M).
- ***Semi-simple*** si il est de type fini et si il est somme directe finie de A-modules simples [13]. (De plus, l'algèbre A est dite ***semi-simple*** si tout A-module de tupe fini est semi-simple).

Parfois dans la littérature, un module (non supposé de type fini) est dit 'semi-simple' si il est somme directe (non nécessairement finie) de modules simples. De même, une algèbre serait dite 'semi-simple' si tout module sur cette algèbre est semi-simple. On peut montrer qu'en fait ces deux définitions d'algèbres semi-simples sont équivalentes, au moins dans le cas des algèbres noethériennes. Nous utiliseront ici la définition donnée dans [3], donnant lieu à des démonstrations plus simples et élégantes.

Pour simplifier quelques unes des preuves à venir, nous introduisons rapidement la notion de ***sous-module engendré*** par une partie d'un module : On se donne $\{x_i\}_{i\in I}$ une partie d'un A-module M, on pose

$$A\{x_i\}_{i\in I} := \left\{ \sum_{j\in J} a_j x_j \mid a_j \in A \forall j \in J, J \subset I \text{ est fini} \right\}$$

Il s'agit d'un sous-module de M, formé de toutes les combinaisons linéaires finies des x_i. En effet, si $m_1 = \sum_{j\in J} a_j x_j$ et $m_2 = \sum_{j\in J'} b_j x_j$ sont deux éléments de $A\{x_i\}_{i\in I}$, alors, en posant $b_j = 0$ pour $j \in J \cap J'^c$ et $a_j = 0$ pour $j \in J' \cap J^c$, on obtient, par linéarité,

$$m_1 - m_2 = \sum_{j\in J\cup J'} (a_j - b_j) x_j$$

Qui est toujours une combinaison linéaire finie, donc $m_1 - m_2 \in A\{x_i\}_{i\in I}$ qui est bien un sous-groupe de M, stable par multiplication extérieure car pour $a \in A$, on a

$$a.m_1 = a \sum_{j\in J} a_j x_j = \sum_{j\in J} (a a_j).x_j$$

par associativité, donc $A\{x_i\}_{i\in I}$ est bien un sous-module de M [14].
On peut donc reformuler la définition précédente en disant qu'un module M est de type fini si et seulement s'il existe une famille finie $\{m_1, \cdots, m_n\}$ telle que $M = A\{m_1, \cdots, m_n\}$.

13. Cette définition n'est pas optimale, en effet le fait que M soit somme directe finie entraîne directement qu'il est de type fini, ceci est montré dans la preuve de la proposition 1.7

14. on peut montrer que $A\{x_i\}_{i\in I}$ est le plus petit sous-module de M contenant les x_i, ou encore qu'il est l'intersection de tous les sous-modules de M contenant les x_j

Lemme 1.6. *Tout A-module simple M est de type fini et engendré par tout élément non nul.*

Démonstration. Soit $m \in M$ non nul. On peut considérer $A\{m\}$ le sous-module engendré par m ; comme il s'agit d'un sous-module de M, on a par simplicité que $A\{m\} = \{0\}$ ou $A\{m\} = M$. Mais $m \neq 0$ entraine $A\{m\} \neq \{0\}$, d'où le résultat. □

Proposition 1.7. *Soit M un A-module semi-simple. Alors*

(a) Tout sous-module de M est semi simple.

(b) Tout quotient de M par un de ses sous-module est semi-simple.

Démonstration. (a) Soit $N \subset M$ un sous-module de M, on écrit $M = \bigoplus_{i=1}^n S_i$, on peut alors écrire tout élément de M sous la forme $(m_1, \cdots, m_n)$ avec $m_i \in S_i$, et comme les S_i sont simples, ils sont engendrés respectivement par des éléments s_i, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $m_i = a_i s_i$ pour un certain $a_i \in A$. On a donc

$$m = \sum_{i=1}^{n} a_i \iota_i(s_i)$$

où ι_i désigne l'injection canonique de S_i dans $\bigoplus_{i=1}^n S_i$. Tout ceci montre que la famille $\{\iota_i(s_i)\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ engendre M (donc M est bien finiment engendré dés qu'il est somme directe finie de modules simples).
Ensuite, par définition de la somme directe, on a

$$N = M \cap N = \bigoplus_{i=1}^{n} (S_i \cap N)$$

Comme pour tout $I \in [\![1, n]\!]$, $S_i \cap N$ est clairement un sous-module de S_i, on a $S_i \cap N = \{0\}$ ou S_i, donc en posant $I := \{i \in [\![1, n]\!] \mid S_i \cap N = S_i\}$, on obtient $N \simeq \bigoplus_{i\in I} S_i$. Et donc N est de type fini comme somme directe de modules simples.
(b) On a clairement que les classes $\iota_i(s_i) + N$ sont une partie génératrice finie de M/N, ensuite on a $M/N \simeq \bigoplus_{i\notin I} S_i$ par l'isomorphisme $\iota_i(s_i) \mapsto \iota_i(s_i)$ si $i \notin I$ et 0 sinon. □

Définition 18. Soit M un A-module.

- On dit que M est ***noethérien*** (resp. ***artinien***) si toute suite croissante pour l'inclusion (resp. décroissante pour l'inclusion) de sous-modules de M est stationnaire.
- L'algèbre A est dite ***noethérienne*** (resp. ***artinienne***) si A vu comme A-module est noethérien (resp. artinien).

Comme on l'a dit, un anneau commutatif est naturellement muni d'une structure d'algèbre sur lui-même, ce qui redonne les définitions classiques d'anneau noethérien/artinien (on a vu que dans ce cas les sous-module sont exactement les idéaux de l'anneau considéré).

Exemple. L'anneau $\mathbb{Z}$ est noethérien non artinien, en effet, toute suite croissante de sous-modules (donc d'idéaux) est de la forme $n_1\mathbb{Z} \subset n_2\mathbb{Z} \subset n_3\mathbb{Z} \subset \cdots$ avec $n_i | n_j$ pour tout $i \geqslant j$, comme n_1 admet un nombre fini de diviseurs, la suite est stationnaire. En revanche la suite d'idéaux $(2^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante infinie de sous-modules de $\mathbb{Z}$.

Nous donnons ensuite une caractérisation des modules noethériens et artiniens, qui rappelle fortement le cas des anneaux, la preuve repose d'ailleurs sur des arguments semblables.

Proposition 1.8. *Soit M un A-module, on a équivalence entre les trois assertions suivantes*

(i) M est noethérien.

(ii) Tout sous-module de M est de type fini.

(iii) Tout sous-module/quotient de M est noethérien.

Et équivalence entre les deux assertions suivantes

(a) M est artinien.

(b) Tout sous-module/quotient de M est artinien.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ On commence par montrer que M est de type fini : Soit $x_0 \in M$, on considère $A\{x_0\}$ le sous-module engendré par x : si $A\{x_0\} = M$, on a terminé, sinon on peut choisir $x_1 \notin A\{x_0\}$. On considère alors $A\{x_0, x_1\}$. On applique le même argument pour construire des sous-modules de la forme $A\{x_1, \cdots, x_n\}$, qui donne une suite croissante de sous-modules de M, stationnaire par hypothèse. Il existe donc un rang n_0 a partir duquel on ne peut plus choisir $x_{n_0+1} \notin A\{x_1, \cdots, x_{n_0}\}$ (sans quoi on aurait un terme plus grand) ; on a alors $A\{x_1, \cdots, x_{n_0}\} = M$ par définition.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit $N_1 \subset N_2 \subset \cdots$ une suite croissante de sous-modules de M, on pose

$$\widetilde{N} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$$

dont on vérifie facilement qu'il est un sous-module de M, donc finiment engendré par une famille finie $\{x_1, \cdots, x_m\}$. Par définition de $\widetilde{N}$ il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\{x_1, \cdots, x_m\} \in N_q$. On a alors

$$\widetilde{N} = A\{x_1, \cdots, x_m\} \subset N_q$$

Donc $\widetilde{N} = N_q$ et la suite (N_n) est stationnaire, d'où M noethérien.
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Découle directement de l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ (car elle montre que tout module noethérien est de type fini).
$(i) \Rightarrow (iii)$ Soit $N \subset M$ un sous-module de M et N_i une suite croissante de sous-modules de N. Il s'agit également d'une suite croissante de sous-modules de M, et donc c'est une suite stationnaire. Soit ensuite $\overline{N_1} \subset \overline{N_2} \subset \cdots$ une suite croissante de sous modules du quotient M/N. On considère alors $\pi^{-1}(\overline{N_i})$, qui est clairement une suite croissante de sous-modules de M, donc stationnaire. Donc $\overline{N_n}$ est également stationnaire.
$(a) \Rightarrow (b)$ se montre de la même manière que $(iii) \Rightarrow (ii)$.
$(b) \Rightarrow (a)$ est immédiat (puisque M est un sous-module de M). □

Proposition 1.9. *Soit M un A-module. Alors M est noethérien si et seulement si toute famille non vide de sous-modules de M admet un élément maximal.*

Démonstration. Supposons M noethérien et soit χ une famille non vide de sous-modules de M. On ordonne χ par inclusion : soit Y un sous-ensemble totalement ordonné de χ, on peut alors choisir une suite croissante de sous-modules de M dans Y, suite stationnaire par noethérianité, donc admettant un plus grand élément. On applique alors le Lemme de Zorn. La réciproque est immédiate. □

Proposition 1.10. *Tout endomorphisme surjectif d'un A-module noethérien M est un automorphisme*

Démonstration. Soit $\varphi : M \to M$ surjectif ; on veut montrer que φ est injectif (car un morphisme de groupe est un isomorphisme si et seulement s'il est bijectif). On pose φ^n la composée de φ par lui même n fois pour $n \in \mathbb{N}$. La suite Ker φ^n est alors une suite croissante de sous-modules de M, donc stationnaire : on choisit n_0 tel que Ker φ^{n_0} soit maximal. Soit ensuite $m \in$ Ker φ^{n_0}, comme φ est surjectif, c'est aussi le cas de tous les φ^k, donc on peut choisir $x \in M$ tel que $\varphi^{n_0}(x) = m$. Donc

$$0 = \varphi^{n_0}(m) = \varphi^{n_0+1}(x) \Rightarrow x \in \text{Ker } \varphi^{n_0+1} = \text{Ker } \varphi^{n_0}(x) \Rightarrow \varphi^{n_0} = m = 0$$

comme souhaité. □

Deuxième partie
Catégories Abéliennes

2.1 Définition et suites exactes

Nous avons vu que les catégories étaient des objets courants en algèbre. Seulement les définitions peu exigeantes font qu'on a peu de résultats forts sans imposer de restrictions (par exemple, on ne pouvait pas dire grand chose sans exiger la petitesse locale). Il existe donc des notions spécifiques de catégories plus exigeantes, mais aussi plus efficaces dans la pratique. C'est typiquement le cas des catégories abéliennes, qui constituent un outil commode et très répandu (dans la pratique, beaucoup de catégories sont abéliennes). Par défaut, les résultats de cette section sont issus de [2]. Par défaut dans cette partie, on considérera qu'une catégorie est localement petite.

Définition 19. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un monomorphisme (resp. épimorphisme) dans $\mathcal{C}$ qui réalise le noyau (resp. conoyau) d'un autre morphisme dans $\mathcal{C}$ est dit ***normal***.

Définition 20. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et A un anneau commutatif. On dit que $\mathcal{C}$ est

- ***A-linéaire*** si
  - Pour tous objets $X, Y \in \mathcal{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$ est un A-module.
  - La composition dans $\mathcal{C}$ est A-bilinéaire.
- ***Additive*** si
  - $\mathcal{C}$ est $\mathbb{Z}$-linéaire.
  - Les produits/coproduits finis existent et coïncident (ce qui revient à dire que les biproduits finis existent).
- ***Pré-abélienne*** si
  - $\mathcal{C}$ est additive.
  - Tout morphisme dans $\mathcal{C}$ admet un noyau et un conoyau.
- ***Abélienne*** si
  - $\mathcal{C}$ est pré-abélienne.
  - Tout monomorphisme et tout épimorphisme dans $\mathcal{C}$ est normal.

Remarque. Nous tenons là l'explication au fait que $\mathfrak{Ann}$ soit la catégorie des pseudo-anneaux et non pas des anneaux unitaires : le noyau classique d'un morphisme d'anneaux unitaires ne contient jamais 1 donc ne pourrait être lui-même un anneau unitaire ; il s'agit cependant d'un pseudo-anneau.

Lemme 2.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive, alors*

- *$\mathcal{C}$ admet un objet zéro.*
- *Pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$, le morphisme nul $X \to Y$ est le neutre du $\mathbb{Z}$-module* $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$.
- *Un morphisme $f : X \to Y$ est un monomorphisme si et seulement si*

$$\forall Z \in \mathcal{C}, g : Z \to X, f \circ g = 0 \Rightarrow g = 0$$

- *Un morphisme $f : X \to Y$ est un épimorphisme si et seulement si*

$$\forall Z \in \mathcal{C}, g : Y \to Z, g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0$$

Démonstration. Comme $\mathcal{C}$ est additive, on peut considérer le biproduit d'une famille vide, il s'agit par définition d'un objet $P \in \mathcal{C}$ tel que, pour tout autre objet $X \in \mathcal{C}$, on ait un unique morphisme $P \to X$ et $X \to P$ (par propriété universelle du biproduit), ce qui est bien la définition d'un objet 0.
Ensuite, considérons $X, Y \in \mathcal{C}$, et notons ${}_Xe$ et e_Y respectivement les uniques morphismes $X \to P$ et $P \to Y$. On veut montrer $e_Y \circ {}_Xe + e_Y \circ {}_Xe = e_Y \circ {}_Xe$ (il s'agira bien du neutre par simplification). On utilise la $\mathbb{Z}$-bilinéarité de la composition :

$$\begin{aligned} e_Y \circ {}_Xe + e_Y \circ {}_Xe &= e_Y \circ ({}_Xe + {}_Xe) \\ &= e_Y \circ {}_Xe \end{aligned}$$

puisque ${}_Xe + {}_Xe$ est un morphisme de X dans P, il doit être égal à ${}_Xe$.
Enfin, les conditions données pour monomorphismes et épimorphismes sont nécessaires par définitions, nous devons montrer qu'elles sont suffisantes : soient $\alpha, \beta : Z \to X$ tels que $f\alpha = f\beta$. Par linéarité, on obtient $f\alpha - f\beta = f(\alpha - \beta) = 0$ donc $\alpha - \beta = 0$ par hypothèse et f est donc un monomorphisme. Le cas des épimorphismes se règle par le même argument. □

Lemme 2.2. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie pré-abélienne, $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$ et $Z \in \mathcal{C}$. On a*

- $0 \circ f = 0 : X \to Z$ *et* $f \circ 0 = 0 : Z \to Y$.
- *Si f est un monomorphisme (resp. épimorphisme), on a* $\operatorname{Ker} f = 0$ *(resp.* $\operatorname{Coker} f = 0$*).*

Démonstration. La première assertion découle directement du fait que 0 soit neutre pour l'addition :

$$0 \circ f + 0 \circ f = (0 + 0) \circ f = 0 \circ f \quad \text{et} \quad f \circ 0 + f \circ 0 = f \circ (0 + 0) = f \circ 0$$

on conclut par simplification. Ensuite, si f est un monomorphisme, supposons avoir $g : Z \to X$ tel que $g \circ f = 0$. Par le lemme précédent, on obtient $g = 0$, donc l'unique morphisme $Z \to 0$ fait bien commuter le diagramme de la propriété universelle du noyau, on raisonne de la même manière pour le cas des épimorphismes. □

Lemme 2.3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pré-abélienne et $\varphi : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$, alors*

- *Si φ est un monomorphisme normal, alors il est le noyau du morphisme canonique* $Y \to \operatorname{Coker} \varphi$
- *Si φ est un épimorphisme normal, alors il est le conoyau du morphisme canonique* $\operatorname{Ker} \varphi \to X$

Démonstration. Soit $f : Y \to Z$ un morphisme dans $\mathcal{C}$ tel que le couple (X, φ) soit le noyau $\operatorname{Ker} f$ (un tel f existe par hypothèse de normalité). On pose $\rho : Y \to \operatorname{Coker} \varphi$ le morphisme canonique et $\iota : \operatorname{Ker} \rho \to Y$ le morphisme canonique.
On a $\rho \circ \varphi = 0$ et $f \circ \varphi = 0$, donc par propriété universelle de $\operatorname{Coker} \varphi$, il existe un unique $\alpha : \operatorname{Coker} \varphi \to Z$ tel que $\alpha \circ \rho = f$.
Par ailleurs, on a $\rho \circ \varphi = 0$ car $g = \operatorname{Coker} \varphi$, par propriété universelle de $\operatorname{Ker} \rho$, il existe un unique $\beta : X \to \operatorname{Ker} \rho$ tel que $\iota \circ \beta = \varphi$.
On a également $f \circ \iota = \alpha \circ \rho \circ \iota = \alpha \circ 0 = 0$ donc il existe un unique $\gamma : \operatorname{Ker} \rho \to X$ tel que

$\varphi \circ \gamma = \iota$ par propriété universelle de $X = \text{Ker } f$.
On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\text{Ker } \rho \arrow[dr, "\iota"] \arrow[dd, bend left, "\gamma"] & & Z \\
& Y \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & \\
X \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[uu, bend left, "\beta"] & & \text{Coker } \varphi \arrow[uu, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

On a alors $\iota \circ \beta \circ \gamma = \varphi \circ \gamma = \iota$ et $\varphi \circ \gamma \circ \beta = \iota \circ \beta = \varphi$, par unicité des morphismes des propriétés universelles respectivement de $X = \text{Ker } f$ et $\text{Ker } \rho$, on obtient $\beta \circ \gamma = 1_X$ et $\gamma \circ \beta = 1_{\text{Ker } \rho}$. Donc on a bien $X \simeq \text{Ker } \rho$ et le résultat.
Le cas des épimorphismes suit un raisonnement dual, reposant sur le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\text{Ker } \varphi \arrow[dr, "\rho"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & Y \arrow[dd, bend left, "\gamma"] \\
& X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \\
Z \arrow[ur, "f"'] & & \text{Coker } \rho \arrow[uu, bend left, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

$\square$

À présent, comme annoncé dans la première partie, nous allons définir l'image (et la coimage) d'un morphisme et introduire la notion de suite exacte, fondamentale en algèbre homologique.

<u>Définition</u> 21. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pré-abélienne et $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$, on définit

- $\text{Im } f := \text{Ker } (\text{Coker } f)$ l'***image*** de f.
- $\text{Coim } f := \text{Coker } (\text{Ker } f)$ la ***coimage*** de f.

<u>Lemme</u> 2.4. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie pré-abélienne et $X \in \mathcal{C}$, alors*

(a) L'image (resp. le noyau) du morphisme $0 \to X$ est 0 (resp. 0).

(b) L'image (resp. le noyau) du morphisme $X \to 0$ est 0 (resp. X).

Démonstration. (a) Soit $f : Y \to 0$ un morphisme tel que $0 \circ f = 0$, on a forcément $f = 0$ (car 0 est l'unique morphisme $Y \to 0$) donc par le Lemme 2.1, 0 est un monomorphisme, et donc $\text{Ker } 0 = 0$ par le Lemme 2.2.
Ensuite, on montre que $\text{Coker } 0 = X$ en effet, on a $1_X \circ 0 = 0$ et si $g : X \to Y$ annule 0, alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] & X \arrow[r, "1_X"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[d, "g"] \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Enfin on montre $\operatorname{Ker} 1_X = 0$, on a par le Lemme 2.1, $h \circ 1_X = 0 \Rightarrow h = 0$ et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & X \arrow[r, "1_X"] & X \\ Y \arrow[u, "0"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

On raisonne de la même manière pour $X \to 0$. □

Définition 22. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie pré-abélienne et $a, b \in \mathbb{Z}$. On considère $(X_i)_{i \in [\![a,b]\!]}$ une famille d'objets, munie de $f_i : X_i \to X_{i+1}$ des morphismes ? On forme ainsi une ***suite*** écrite sous la forme

$$\cdots \xrightarrow{f_{i-2}} X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

Si pour tout $i \in [\![a,b]\!]$, on a $\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Im} f_{i-1}$, on dit que les (X_i, f_i) forment une ***suite exacte***[15 16].
Si une suite exacte est de la forme

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

alors on parle de ***suite exacte courte***.

Dans la suite de cette section, on fixe $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

Lemme 2.5. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{A}$, alors*

(a) f est un monomorphisme si et seulement si la suite $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ est exacte.

(b) f est un épiomorphisme si et seulement si la suite $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$ est exacte.

Démonstration. (1)($\Rightarrow$) On veut montrer que $\operatorname{Ker} f = 0 = \operatorname{Im} 0$, ceci découle directement du Lemme 2.2
($\Leftarrow$) Par le Lemme 2.1, il suffit de traiter le cas $f \circ g = 0$ pour un certain morphisme $g : K \to X$. Mais comme $\operatorname{Ker} f = 0$ on a par propriété universelle du noyau que $0 \circ 0 = g$.
(2)($\Rightarrow$) On veut montrer $\operatorname{Coker} f = 0$ (on aura alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} 0 = Y$), mais ceci découle directement du Lemme 2.2.
($\Leftarrow$) Par le Lemme 2.1, il suffit de traiter le cas $g \circ f = 0$ pour un certain morphisme $g : Y \to L$. La propriété universelle du conoyau donne alors un unique morphisme $h : \operatorname{Coker} f \to L$ tel que $h \circ \pi = g$ où π est le morphisme canonique $Y \to \operatorname{Coker} f$, on a alors $g \circ \iota = 0$ avec $\iota : \operatorname{Im} f \to Y$ le morphisme canonique, mais comme $\operatorname{Im} f = Y$ on a $\iota = 1_Y$ et donc $g = 0$. □

Remarque. On a déjà commencé à le faire dans la démonstration précédente, mais on utilisera souvent dans la suite égalité pour dire unique isomorphie, ce qui peut se comprendre, étant donné qu'au sein d'une catégorie, deux objets isomorphes ont les mêmes connections aux autres objets, une information sur l'un est tout à fait équivalente à une information sur l'autre, si l'isomorphisme est canonique (c'est le cas si il est unique).

15. on parlera aussi de suite exacte longue si plus de quatre des X_i sont non nuls.
16. La condition $\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Im} f_{i-1}$ est équivalente à $\operatorname{Coim} f_{i+1} = \operatorname{Coker} f_i$.

Définition 23. Soit $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ une suite exacte courte dans $\mathcal{A}$.

- Si f est un monomorphisme scindé, on dit que f admet une ***rétraction*** : son inverse à gauche)
- Si g est un épimorphisme scindé, on dit que g admet une ***section*** : son inverse à droite.

Lemme 2.6. *(Lemme de Scindage) (cf [6])*

Soit $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte dans* $\mathcal{A}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *admet une rétraction* α*.*

(ii) g *admet une section* β*.*

(iii) L'objet Y *est le biproduit de* X *et* Y*, avec* $g = \pi_Z$ *et* $f = \iota_X$*.*

Si l'une de ces conditions est réalisée, on dit que la suite exacte courte est **scindée***.*

Démonstration. On montre que $(ii) \Rightarrow (i)$, l'implication réciproque se fait en passant au dual. Supposons donc qu'il existe $\beta : Z \to Y$ tel que $g \circ \beta = 1_Z$. On pose $\delta = 1_Y - \beta \circ g : Y \to Y$, on a $g \circ \delta = g - g \circ \beta \circ g = g - g = 0$, donc il existe un unique morphisme $\alpha : B \to \operatorname{Ker} g$ tel que $f \circ \alpha = \delta$, mais on a donc

$$f \circ \alpha \circ f = \delta \circ f = f - \beta \circ g \circ f = f$$

et donc $\alpha \circ f = 1_X$ car f est un monomorphisme, d'où l'implication. De plus, on remarque que

$$f \circ \alpha \circ \beta = (1_Y - \beta \circ \delta) \circ \beta = \beta - \beta \circ \delta \circ \beta = \beta - \beta = 0$$

Et donc $\alpha \circ \beta = 0$ car f est un monomorphisme.
Ensuite, l'implication $(iii) \Rightarrow (ii)$ est claire puisqu'on sait que $\pi_X \circ \iota_X = 1_X$, donc le morphisme π_X donné par définition du biproduit est une rétraction de $f = \iota_X$. Réciproquement, on montre que (i) et (ii) impliquent (iii). Sous les conditions (i) et (ii), on obtient un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "g"] & C \arrow[l, bend left, "\beta"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Avec $\alpha \circ f = 1_X$ et $\beta \circ g = 1_Z$. On va montrer qu'alors $Y \simeq X \prod Z$, on a bien sur α et g qui font de Y un candidat, soit (P, π_X, π_Z) un autre candidat. On pose $\psi : P \to Y$ par $\psi = f \circ \pi_X + \beta \circ \pi_Z$, premièrement, on a bien

$$g \circ \psi = g \circ (f \circ \pi_X + \beta \circ \pi_Z) = 0 + g \circ \beta \circ \pi_Z = \pi_Z$$

$$\alpha \circ \psi = \alpha \circ (f \circ \pi_X + \beta \circ \pi_Z) = \pi_X + \alpha \circ \beta \circ \pi_Z = \pi_X$$

Et si on a un autre morphisme $\varphi : P \to Y$ faisant commuter le diagramme, alors

$$\varphi = 1_P \circ \varphi = (f \circ \alpha + \beta \circ g) \circ \varphi)$$

$$= f \circ \alpha \circ \varphi + \beta \circ g \circ \varphi$$

$$= f \circ \pi_X + \beta \circ \pi_Z = \psi$$

Donc $Y \simeq X \prod Y$, la situation peut être résumée dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\binom{\alpha}{g}"] & Z \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "\iota_X"'] & X \oplus Z \arrow[r, "\pi_Z"'] & Z
\end{tikzcd}$$

De manière duale, on montre que $Y \simeq X \coprod Y$ avec f et β les injections, on a donc le résultat. $\square$

Lemme 2.7. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{A}$. Alors les morphismes canoniques $i : \operatorname{Ker} f \to X$ et $j : Y \to \operatorname{Coker} f$ sont respectivement un monomorphisme et un épimorphisme.*

Démonstration. On se donne un objet $K \in \mathcal{A}$. Soit $k : \operatorname{Coker} f \to K$ tel que $k \circ j = 0$. Comme $0 \circ f = 0$, on sait par propriété universelle de $\operatorname{Coker} f$, il existe un unique $\gamma : \operatorname{Coker} f \to K$ tel que $\gamma \circ j = 0$. Par unicité de γ, on conclut $k = 0$, donc j est un épimorphisme par le Lemme 2.1.
Soit ensuite $\ell : K \to \operatorname{Ker} f$ tel que $i \circ \ell = 0$, comme $f \circ 0 = 0$, il existe par la propriété universelle de $\operatorname{Ker} f$ un unique $\gamma : K \to \operatorname{Ker} f$ tel que $i \circ \gamma = 0$, par unicité de γ, on conclut $\ell = 0$ et donc i est un monomorphisme. $\square$

Proposition 2.8. *Un morphisme dans une catégorie abélienne est un isomorphisme si et seulement si c'est à la fois un épimorphisme et un monomorphisme.*

Démonstration. La condition est bien-sûr nécessaire car un monomorphisme (resp. épimorphisme) scindé est un monomorphisme (resp. épimorphisme). Soit réciproquement $f : X \to Y$ un épimorphisme qui soit également un monomorphisme. Par le Lemme 2.3, comme f est un monomorphisme, il est le noyau de $j : Y \to \operatorname{Coker} f$, mais par le Lemme 2.2, on a $j = 0 : Y \to 0$, dont le noyau est $(Y, 1_Y)$, par propriété universelle du noyau, on a donc un isomorphisme $\varphi : X \to Y = \operatorname{Ker} j$ tel que $f = 1_Y \circ \varphi = f$ et donc f est un isomorphisme. $\square$

Corollaire 2.9. *Un morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{A}$ est un isomorphisme si et seulement si la suite*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0$$

Est exacte

Démonstration. Simple combinaison du Lemme 2.5 et de la propriété 2.8 $\square$

Théorème 1. *(Premier théorème d'isomorphisme)*
Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{A}$.
Il existe un unique isomorphisme γ rendant commutatif le carré suivant

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\ell"'] & Y \\
\operatorname{Coim} f \arrow[r, "\gamma"'] & \operatorname{Im} f \arrow[u, hook, "k"']
\end{tikzcd}$$

où ℓ et k sont les morphismes canoniques. En particulier, on a $\operatorname{Im} f \simeq \operatorname{Coim} f$ par un unique isomorphisme, ce qui revient à dire que dans une catégorie abélienne, noyau et conoyau commutent.

Démonstration. Tout d'abord, les morphismes k et ℓ existent par propriété universelle de $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} f)$ et $\operatorname{Coim} f = \operatorname{Coker}(\operatorname{Ker} f)$ et sont respectivement un monomorphisme et un épimorphisme par le Lemme 2.7. De plus, les propriétés universelles de l'image et de la coimage donnent l'existence et l'unicité de morphismes $\alpha : \operatorname{Coim} f \to Y$ et $\beta : X \to \operatorname{Im} f$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
& & \operatorname{Im} f \arrow[dr, hook, "k"] & & \\
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "i"] & X \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\ell"'] & & Y \arrow[r, "j"] & \operatorname{Coker} f \\
& & \operatorname{Coim} f \arrow[ur, "\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

On a donc

- $jf = 0 = j\alpha\ell$, donc $j\alpha = 0$ car ℓ est un épimorphisme.
- $fi = 0 = k\beta i$, donc $\beta i = 0$ car k est un monomorphisme.

Par définition de l'image et de la coimage, on a $jk = 0 = j\alpha$ et $\ell i = 0 = \beta i$, donc les propriétés universelles donnent l'existence et l'unicité de $\gamma, \widetilde{\gamma} : \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ tels que $k\gamma = \alpha$ et $\widetilde{\gamma}\ell = \beta$. Donc $k\gamma\ell = \alpha\ell = f = k\beta = k\widetilde{\gamma}\ell$, donc $\gamma = \tilde{\gamma}$ par k monomorphisme et ℓ épimorphisme. On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& & \operatorname{Im} f \arrow[dr, hook, "k"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "i"] \arrow[urr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & X \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\ell"'] & & Y \arrow[r, "j"] & \operatorname{Coker} f \\
& & \operatorname{Coim} f \arrow[ur, "\alpha"'] \arrow[uu, "\gamma"'] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

On va montrer que γ est un isomorphisme :

Étape 1 : α est un monomorphisme : Soit $u : U \to \operatorname{Coim} f$ tel que $\alpha u = 0$. Par propriété universelle de $\operatorname{Coker} u$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "u"] & \operatorname{Coim} f \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "j_u"'] & Y \\
& & \operatorname{Coker} u \arrow[u, dashed, "\exists!\chi"']
\end{tikzcd}$$

Et par le Lemme 2.7, j_u (et ℓ) sont des épimorphismes, donc $j_u \circ \ell$ en est également un. Par abélianité de $\mathcal{A}$, $j_u \circ \ell$ est normal, donc il existe $h : H \to X$ tel que $j_u \circ \ell = \operatorname{Coker} h$. Et on a $f \circ h = \alpha \circ \ell \circ h = \chi \circ j_u \circ l \circ h = 0$. Par propriété universelle de $\operatorname{Ker} f$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
H \arrow[u, dashed, "\exists!\sigma"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Donc $\ell \circ h = \ell \circ i \circ \sigma = 0 \circ \sigma = 0$. Donc par propriété universelle de $\operatorname{Coker} h$:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, two heads, "j_u \circ \ell"] \arrow[dr, "\ell"'] & \operatorname{Coker} h \arrow[d, dashed, "\exists!\tau"] \\
& & \operatorname{Coim} f
\end{tikzcd}$$

Donc $\tau \circ j_u \circ \ell = \ell$ et $\tau \circ j_u = 1_{\mathrm{Coim}\, f}$ car ℓ est un épimorphisme, donc j_u est un monomorphisme (scindé) donc $j_u \circ u = 0$ entraine $u = 0$ et α est donc un monomorphisme.

Étape 2 : Duale : β est un épimorphisme : soit $u : \mathrm{Im}\, f \to U$ tel que $u \circ \beta = 0$. Par propriété universelle de Ker u, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\ u \arrow[r, "i_u"] & \mathrm{Im}\, f \arrow[r, "u"] & U \\
X \arrow[u, dashed, "\exists ! \chi"] \arrow[ur, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Et par le Lemme 2.7, i_u (et k) sont des monomorphismes, donc $k \circ i_u$ en est également un. Par abélianité de $\mathcal{A}$, $k \circ i_u$ est normal donc il existe $h : Y \to H$ tel que $k \circ i_u = \mathrm{Ker}\ h$. Et on a $h \circ f = h \circ k \circ \beta = h \circ k \circ i_u \circ \chi = 0 \circ \chi = 0$. Par propriété universelle de Coker f, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "h"'] & \mathrm{Coker}\, f \arrow[d, dashed, "\exists ! \sigma"] \\
& & H
\end{tikzcd}$$

Donc $h \circ k = \sigma \circ j \circ k = \sigma \circ 0 = 0$. Donc par propriété universelle de Ker h :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\ h \arrow[r, "k \circ i_u"] & Y \arrow[r, "h"] & H \\
\mathrm{Im}\, f \arrow[u, dashed, "\exists ! \tau"] \arrow[ur, "k"']
\end{tikzcd}$$

Donc $k \circ i_u \circ \tau = k$ et $i_u \circ \tau = 1_{\mathrm{Im}\, f}$ car k est un monomorphisme, donc i_u est un épimorphisme (scindé) donc $u \circ i_u = 0$ entraine $u = 0$ donc β est un épimorphisme.

Étape 3 : γ est un épimorphisme et un monomorphisme.

- Soit $u : \mathrm{Im}\, f \to U$ tel que $u \circ \gamma = 0$, on a $u \circ \gamma \circ \ell = 0 = u \circ \beta$, donc $u = 0$ car β est un épimorphisme, d'où γ est un épimorphisme.
- Soit $u : U \to \mathrm{Coim}\, f$ tel que $\gamma \circ u = 0$, on a $k \circ \gamma \circ u = 0 = \alpha \circ u$, donc $u = 0$ car α est un monomorphisme, d'où γ est un monomorphisme.

On conclut par la proposition 2.8 que γ est bien un isomorphisme. $\square$

On peut se demander quel est le lien entre le théorème que nous avons énoncé et le premier théorème d'isomorphisme dans sa forme habituelle : Nous allons pour cela avoir besoin d'exemples de catégories abéliennes, il est donc temps de montrer que les catégories de modules sont abéliennes : Soient K un anneau commutatif et A une K-algèbre. Il est clair que les ensembles de morphismes sont des groupes abéliens et que la composition est bilinéaire, et on a vu dans la section 1.3 que les biproduits finis existent, donc $A - \mathfrak{Mod}$ est additive.
Soit ensuite $f : M \to N$ un morphisme dans $A - \mathfrak{Mod}$, on veut montrer que le noyau catégorique de f est son noyau au sens classique, muni de l'injection canonique ι dans M : on a clairement $f \circ \iota = 0$ et pour tout morphisme $k : K \to M$ tel que $f \circ k = 0$, on a que $k(K)$ est un sous-ensemble (donc un sous module) du noyau classique, le morphisme k peut alors se voir comme à valeur dans ce noyau, d'où la factorisation unique : les noyaux classiques et catégoriques coïncident.

On veut maintenant montrer que $\mathrm{Coker}\, f$ est $N/f(M)$, muni de π la projection canonique, on a bien $\pi \circ f = 0$ par définition du quotient, et pour tout morphisme $k : Y \to K$ tel que $k(f(X)) = 0$, on a une factorisation unique par propriété universelle du module quotient.
Il ne reste plus qu'a montrer que tout monomorphisme/épimorphisme est normal : soit $f : X \to Y$ un monomorphisme, il s'agit alors d'un morphisme injectif, qui est alors le noyau de la projection $Y \to Y/f(X)$. Soit $f : X \to Y$ un épimorphisme, il s'agit d'un morphisme surjectif, qui est alors le conoyau de l'injection $\ker f \to X$ ($\ker f$ désigne le noyau classique).

Soit $f : M \to N$ un morphisme de module, le conoyau de l'injection $\iota : \mathrm{Ker}\ f \to X$ est bien sur le morphisme $X \to X/\iota(\mathrm{Ker}\ f) = X/\mathrm{Ker}\ f$, donc $\mathrm{Coim}\, f = X/\mathrm{Ker}\ f$, et le noyau de la projection $\pi : Y \to N/f(M)$ est bien $f(M)$ l'image classique de f, d'où $f(M) = \mathrm{Im}\, f$ ce qui est attendu. Mais alors le théorème 1 nous donne $\mathrm{Im}\, f \simeq X/\mathrm{Ker}\ f$ le théorème d'isomorphisme bien connu dans les groupes abéliens.

Cet argument permet aussi de montrer que $\mathbb{Z} - \mathfrak{Mod}$, qui est en fait $\mathfrak{Ab}$ la catégorie des groupes abéliens est une catégorie abélienne, ce qui nous donne aussi le premier théorème d'isomorphisme classique.
Cependant, la catégorie $\mathfrak{Grp}$ quant à elle n'est pas une catégorie abélienne, en effet, le quotient dont on a besoin pour définir le conoyau n'est pas toujours un groupe (il faudrait que le sous-groupe par lequel on quotiente soit distingué, ce qui est toujours vrai dans le cas des groupes abéliens mais pas dans le cas général). Donc le théorème d'isomorphisme dans les groupes ne découle pas directement du théorème 1 que nous avons montré (par ailleurs, la catégorie $\mathfrak{Grp}$ n'est même pas additive).

Remarque. Il existe une autre définition de catégorie abélienne, qui consiste a demander à une catégorie pré-abélienne non pas que les épimorphismes/monomorphismes soient normaux, mais que le morphisme naturel $\gamma : \mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ soit un isomorphisme pour tout morphisme f (c'est la définition donnée par A. Grothendieck dans [7]).

Proposition 2.10. *Ces deux définitions de catégorie abélienne sont en fait équivalentes.*

Démonstration. Nous avons déjà montré que la définition donnée dans [2] impliquait celle de [7] : c'est le théorème 1. Pour la réciproque, soit $f : X \to Y$ un monomorphisme au sein d'une catégorie abélienne selon [7], comme f est un monomorphisme dans une catégorie pré-abélienne, on a $\mathrm{Ker}\ f = 0$, donc $\mathrm{Coim}\, f = X$, et donc le diagramme commutatif construit au début de la démonstration du théorème 1 devient

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Im}\, f \arrow[dr, hook, "k"] & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "1_X"'] & & Y \arrow[r, "j"] & \mathrm{Coker}\, f \\
 & & X \arrow[uu, "\gamma"] \arrow[ur, "\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

On obtient alors $k \circ \gamma = f$ mais donc f est bien le noyau de j car γ est un isomorphisme. On raisonne de manière duale pour la cas des épimorphismes. □

Nous allons maintenant exploiter certaines 'bonnes' propriétés des catégories abéliennes, mais avant cela, nous énonçons le puissant théorème de Freyd-Mitchell, que nous nous contenterons d'admettre compte tenu de la complexité de la démonstration. On pourra néanmoins consulter [8].

Théorème 2. *(Freyd-Mitchell) cf [8], section 4.14*
Pour toute catégorie abélienne petite $\mathcal{A}$, il existe un anneau commutatif K, une K-algèbre A et un foncteur plein et fidèle et exact[17] $F : \mathcal{A} \to A - \mathfrak{Mod}$.
Autrement dit, tout catégorie abélienne petite est une sous catégorie pleine d'une catégorie de modules.

Remarque. Dans [2] et [3], l'enoncé du théorème de Freyd-Mitchell comporte un faute de typo : la catégorie abélienne $\mathcal{A}$ n'est pas supposée petite.

Théorème 3. *(Lemme du Serpent), cf [9]*
On se place dans $A - \mathfrak{Mod}$ une catégorie de modules. On considère le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont supposées exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\rho"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\sigma"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \arrow[r, "\beta'"'] & C &
\end{tikzcd}$$

Il existe alors une suite exacte

$$\text{Ker } \rho \longrightarrow \text{Ker } \sigma \longrightarrow \text{Ker } \tau \xrightarrow{\delta} \text{Coker } \rho \longrightarrow \text{Coker } \sigma \longrightarrow \text{Coker } \tau$$

On illustre ceci par le 'diagramme du Serpent'

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \text{Ker } \rho \arrow[r] \arrow[d] & \text{Ker } \sigma \arrow[r] \arrow[d] & \text{Ker } \tau \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
 & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\rho"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\sigma"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\tau"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha'"'] \arrow[d] & B' \arrow[r, "\beta'"'] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & \text{Coker } \rho \arrow[r] \arrow[d] & \text{Coker } \sigma \arrow[r] \arrow[d] & \text{Coker } \tau \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & & 0 & 0 & 0 \\
\text{Ker } \rho \arrow[r] \arrow[d] & \text{Ker } \sigma \arrow[r] \arrow[d] & \text{Ker } \tau \arrow[rrr, "\delta"] \arrow[d] & & & \text{Coker } \rho \arrow[r] \arrow[u] & \text{Coker } \sigma \arrow[r] \arrow[u] & \text{Coker } \tau \arrow[u] \\
A \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[rrrrr, bend right, "\rho"'] & B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[rrrrr, bend right, "\sigma"'] & C \arrow[r] \arrow[rrrrr, bend right, "\tau"'] & 0 & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"'] \arrow[u] & B' \arrow[r, "\beta'"'] \arrow[u] & C \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

17. La notion de foncteur exact sera introduite à la fin de cette section

Démonstration. Comme on travaille avec des modules et que le diagramme de départ est commutatif, on peut considérer les restriction des morphismes α et β aux noyaux, ce qui donne une suite exacte

$$\text{Ker } \rho \to \text{Ker } \sigma \to \text{Ker } \tau$$

On obtient de même la suite exacte

$$\text{Coker}\,\rho \to \text{Coker}\,\sigma \to \text{Coker}\,\tau$$

Il reste à construire le morphisme de connexion δ, ce qu'on fait explicitement : Soit $x \in \text{Ker } \tau \subset C$, β étant un épimorphisme de modules (Lemme 2.5) il est surjectif, donc il existe $b \in B$ tel que $\beta(b) = x$. Par commutativité du diagramme de départ, on a $\beta' \circ \sigma(b) = \tau \circ \beta(b) = \tau(x) = 0$. Donc $\sigma(b) \in \text{Ker } \beta' = \text{Im}\,\alpha'$ par exactitude des lignes du premier diagramme. De plus, α' est un monomorphisme et est donc injectif, donc il existe un unique $a' \in A'$ tel que $\alpha'(a') = \sigma(b)$, on pose alors

$$\delta(x) := \pi_\rho(a')$$

Où $\pi_\rho : A' \to \text{Coker}\,\rho$ est le morphisme canonique.
Tout d'abord, montrons que δ est bien défini : soit $\widehat{b} \in B$ tel que $\beta(\widehat{b}) = x = \beta(b)$, on veut montrer $\pi_\rho(\widehat{a'}) = \pi_\rho(a')$, ou encore $\pi_\rho(\widehat{a'} - a') = 0$. On a

$$0 = \beta(\widehat{b}) - \beta(b) = \beta(\widehat{b} - b)$$

donc $\widehat{b} - b \in \text{Ker } \beta$, donc $\tau \circ \beta(\widehat{b} - b) = \beta' \circ \sigma(\widehat{b} - b) = 0$ et $\sigma(\widehat{b} - b) \in \text{Ker } \beta'$. De plus, $\widehat{b} - b \in \text{Ker } \beta$ entraîne par exactitude l'existence de $u \in A$ tel que $\alpha(u) = \widehat{b} - b$, donc $\sigma(\widehat{b} - b) = \sigma \circ \alpha(u) = \alpha' \circ \rho(u)$. Il s'ensuit $\pi_\rho(\rho(u)) = 0$, mais $\rho(u) = \widehat{a'} - a$ par unicité, donc δ est bien défini.
Montrons que δ est un morphisme : Soit $\lambda \in A$, on a $\lambda x = \beta(\lambda b)$ et $\delta(\lambda x) = \lambda\delta(x)$ (tous les morphismes considérés ici sont A-linéaires, de même, on a $\delta(x + x') = \delta(x) + \delta(x')$ puisque $x + x' = \beta(b + b')$.
Montrons que la suite obtenue est exacte : On veut montrer Ker $\delta = \text{Im}\,\beta_{|\text{Ker } \sigma}$. Par construction de δ, on a

$$x \in \text{Ker } \delta \Leftrightarrow \pi_\rho(a') = 0 \Leftrightarrow a' = \rho(a)$$

pour un certain $a \in A$. Ce qui est équivalent à $b = \alpha(a)$, et donc $x = \beta(b) \in \text{Im}\,\beta_{|\text{Ker } \sigma}$ d'où l'égalité.
Il reste à établir Ker $(\text{Coker}\,\rho \to \text{Coker}\,\sigma) = \text{Im}\,\delta$. On a

$$a' + \rho(A) \in \text{Ker } (\text{Coker}\,\rho \to \text{Coker}\,\sigma) \Leftrightarrow \alpha'(a') \in \sigma(B)$$

$$\Leftrightarrow \alpha'(a') = \sigma(b) \text{ avec } b \in B$$

$$\Leftrightarrow a' + \rho(A) = \delta(\beta(b))$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. On peut montrer que le Lemme du serpent est également valable dans une catégorie abélienne arbitraire $\mathcal{A}$, en considérant la plus petite sous-catégorie abélienne de $\mathcal{A}$ contenant le diagramme de départ, et en la plongeant dans une catégorie de modules par le théorème de Freyd-Mitchell (voir [9]). On admet le Lemme du serpent dans les catégories abéliennes de manière générale

Corollaire 2.11. *(Lemme des 3)*
Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\rho"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\sigma"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \arrow[r, "\beta'"'] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes. Si deux des trois morphismes ρ, σ et τ sont des isomorphismes, alors c'est aussi le cas du troisième.

Démonstration. Les lignes étant exactes, les suites induites

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \rho \xrightarrow{\alpha\circ\iota_\rho} \text{Ker } \sigma \quad \text{et} \quad \operatorname{Coker}\sigma \xrightarrow{\beta'\circ\pi_\sigma} \operatorname{Coker}\tau \longrightarrow 0$$

sont exactes (elles sont bien définies par commutativité du premier diagramme). On a alors (par le Lemme du Serpent) un suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \rho \longrightarrow \text{Ker } \sigma \longrightarrow \text{Ker } \tau \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\rho \longrightarrow \operatorname{Coker}\sigma \longrightarrow \operatorname{Coker}\tau \longrightarrow 0$$

Si l'on suppose que ρ et σ sont des isomorphismes alors cette suite exacte devient

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \tau \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{Coker}\tau \longrightarrow 0$$

On a alors Ker $\tau = \operatorname{Coker}\tau = 0$ et τ est un isomorphisme par le corollaire 2.9. Les autres cas se traitent avec le même argument. $\square$

On note qu'il est tout à fait possible de montrer le Lemme des 3 sans faire appel au Lemme du Serpent :

Démonstration. Soit $f : K \to B$ tel que $\sigma \circ f = 0$. On va montrer qu'alors $f = 0$ (σ sera donc un monomorphisme, on montrera de façon duale qu'il s'agit également d'un monomorphisme). On a

$$0 = \beta' \circ \sigma \circ f = \tau \circ \beta \circ f$$

Donc $\beta \circ f = 0$ car τ est un isomorphisme. Comme α est un monomorphisme, on a Ker $\alpha = 0$ et $\operatorname{Coim}\alpha = A = \operatorname{Im}\alpha$ par le théorème 1. Donc l'injection canonique $\operatorname{Im}\alpha \hookrightarrow B$ est α. Par propriété universelle de Ker $\beta = \operatorname{Im}\alpha \simeq A$, il existe un unique $\iota : K \to A$ tel que $\alpha \circ \iota = f$. On a alors

$$0 = \sigma \circ \alpha \circ \iota = \alpha' \circ \rho \circ \iota = \iota$$

Car α' est un monomorphisme et ρ est un isomorphisme, on a donc $f = \alpha \circ \iota = 0$ d'où le résultat. $\square$

Lemme 2.12. *(Lemmes des 5)*
On considère le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont supposée exactes :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\rho"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\sigma"] & C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\tau"] & D \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\eta"] & E \arrow[d, "\zeta"] \\
A' \arrow[r, "\alpha'"'] & B' \arrow[r, "\beta'"'] & C' \arrow[r, "\gamma'"'] & D' \arrow[r, "\delta'"'] & E'
\end{tikzcd}$$

Si les morphismes ρ, σ, η et ζ sont des isomorphismes, alors il en est de même de τ

Démonstration. (voir [6])On montre le lemme dans le cas des modules, il s'étend au cas des catégories abéliennes de la même manière que pour le Lemme du Serpent. Par dualité, il suffit de montrer que τ est un monomorphisme (on obtiendra a lors que τ est un épimorphisme avec les mêmes arguments dans la catégorie opposée, et il sera un isomorphisme par la proposition 2.8).
Soit $c \in C$ tel que $\tau(c) = 0$, on a alors $\eta \circ \gamma(c) = \gamma' \circ \tau(c) = 0$, et donc $\gamma(c) = 0$ puisque η est un monomorphisme. Ainsi par exactitude on peut choisir $b \in B$ tel que $\beta(b) = c$. Alors, comme $\beta' \circ \sigma(b) = \tau \circ \beta(b) = \tau(c) = 0$, il existe, toujours par exactitude, un certain $a' \in A'$ tel que $\alpha'(a') = \sigma(b)$. Comme ρ est un épimorphisme, on peut choisir $a \in A$ tel que $\rho(a) = a'$. On a alors $\sigma \circ \alpha(a) = \alpha' \circ \rho(a) = \alpha'(a') = \sigma(b)$. Ainsi $\alpha(a) = b$ puisque σ est un monomorphisme. Ainsi $c = \beta(b) = \beta \circ \alpha(a) = 0$ d'où le résultat. □

Nous donnons maintenant quelques propriétés intéressantes concernant les pulbacks et pushouts dans les catégories abéliennes, à commencer par leur existence. Ces propriétés sont issues de [10].

Proposition 2.13. *Dans une catégorie abélienne, les pullbacks et pushouts existent.*

Démonstration. Considérons un carré dans $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

On remarque qu'il s'agit d'un carré commutatif si et seulement si $f \circ a - g \circ b = 0$. En posant $\alpha = \binom{a}{b} : C \to A \oplus B$ et $\beta = (f \ \ -g) : A \oplus B \to D$, on obtient que le carré est commutatif si et seulement si $\beta \circ \alpha = 0$.
Le pushout de (C, a, b) est alors donné par $(\operatorname{Coker} \beta, j \circ \iota_A, j \circ \iota_B)$ (avec $j : A \oplus B \to \operatorname{Coker} \beta$ la projection canonique).
Le pullback de (B, f, g) est alors donné par $(\operatorname{Ker} \alpha, \pi_A \circ i, \pi_B \circ i)$ (avec $i : \operatorname{Ker} \alpha \to A \oplus B$ l'injection canonique). □

Corollaire 2.14. *Soit K un anneau commutatif et A une K-algèbre. Pour toute configuration de A-module de la forme*

$$\begin{tikzcd} & Y_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ Y_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] & X \end{tikzcd} \qquad \textit{ou} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & Y_1 \\ Y_2 & \end{tikzcd}$$

Le Pullback et le pushout sont donnés par

$$Y_1 \times_X Y_2 = \{(y_1, y_2) \in Y_1 \oplus Y_2 \mid \alpha_1(y_1) = \alpha_2(y_2)\}$$

$$Y_1 \sqcup_X Y_2 = Y_1 \oplus Y_2 \big/ \{\alpha_1(x) - \alpha_2(x) \mid x \in X\}$$

La construction que nous avons donné des pullbacks et des pushouts nous donne la propriété suivante (on reprend les notations de la démonstration précédente).

Proposition 2.15. *On considère un carré dans $\mathcal{A}$*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

On a alors :

(i) Le carré est commutatif si et seulement si $\beta \circ \alpha = 0$.

(ii) Le carré est un pullback si et seulement si la suite $0 \longrightarrow C \xrightarrow{\alpha} A \oplus B \xrightarrow{\beta} P$.

(iii) Le carré est un pushout si et seulement si la suite $C \xrightarrow{\alpha} A \oplus B \xrightarrow{\beta} P \longrightarrow 0$.

Démonstration. Le point (i) a déjà été montré, les deux autres points sont simplement issu de la construction des pullbacks et pushouts comme noyaux et conoyaux. □

Proposition 2.16. *On considère à nouveau un carré dans $\mathcal{A}$:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

(i) Si le carré est un pullback, et si f est un épimorphisme, alors b est un épimorphisme.

(ii) Si le carré est un pushout, et si b est un monomorphisme, alors f est un monomorphisme.

Démonstration. On ne montre que le deuxième point, dual du premier : comme le carré est un pushout, la suite $C \xrightarrow{\alpha} A \oplus B \xrightarrow{\beta} P \longrightarrow 0$ est exacte, ensuite, comme a est un monomorphisme, $\alpha = \binom{a}{b}$ l'est également, donc le diagramme est également un pullback.
Soit ensuite $k : X \to A$ tel que $f \circ k = 0$, on a alors que le carré

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "k"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

commute, il existe donc un unique morphisme $\gamma : X \to C$ tel que $a \circ \gamma = k$ et $b \circ \gamma = 0$, comme b est un monomorphisme, on obtient $\gamma = 0$, donc $k = 0$. Et donc f est un monomorphisme. □

Enfin, avant d'introduire les catégories exactes, nous donnons la définition d'objets projectifs et injectifs, qui nous permettent d'annoncer la notion de foncteur dérivé.

Définition 24. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (localement petite).

- Un objet $P \in \mathcal{C}$ est dit ***projectif*** si pour tout épimorphisme $f : X \twoheadrightarrow Y$ dans $\mathcal{C}$, l'application
$$\mathrm{Hom}\,(P, f) : \mathrm{Hom}\,(P, X) \to \mathrm{Hom}\,(P, Y)$$
est surjective.
- Un objet $I \in \mathcal{C}$ est dit ***injectif*** si pour tout monomorphisme $f : X \hookrightarrow Y$ dans $\mathcal{C}$, l'application
$$\mathrm{Hom}\,(f, I) : \mathrm{Hom}\,(Y, I) \to \mathrm{Hom}\,(X, I)$$
est surjective.
- On dit que $\mathcal{C}$ admet ***suffisamment de projectifs*** (resp. d'injectif) si pour tout $X \in \mathcal{C}$, il existe un objet projectif P (resp. un objet injectif I) et un épimorphisme $P \twoheadrightarrow X$ (resp. un monomorphisme $X \hookrightarrow I$).

On peut reformuler les définitions d'objets projectifs et injectifs avec les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, two heads, "f"'] & Y \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} I & \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[r, hook, "f"'] & Y \arrow[ul, dashed, "\exists h"'] \end{tikzcd}$$

(attention cependant, comme on a pas unicité du morphisme dont on affirme l'existence, ce n'est pas une propriété universelle à proprement parler).

Lemme 2.17. *Dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ possédant un objet projectif P, si* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ *est une suite exacte courte, alors on a une suite exacte courte de groupes abéliens*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(P, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(P,f)} \mathrm{Hom}\,(P, Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,(P,g)} \mathrm{Hom}\,(P, Z) \longrightarrow 0$$

Démonstration. Soit $p : P \to X$ tel que $fp = 0 = f \circ 0$, comme f est un monomorphisme (lemme 2.5), on a $p = 0$, donc $\mathrm{Hom}\,(P, f)$ est une application injective, donc un monomorphisme de groupes abéliens. Ensuite, soit $q : P \to Y$ tel que $gq = 0$, par propriété universelle du noyau, on a un unique morphisme $\overline{q} : P \to \mathrm{Ker}\ g = \mathrm{Im}\, f$. Ensuite comme on a un épimorphisme canonique $k : X \twoheadrightarrow \mathrm{Im}\, f$ et P est un objet projectif, on a un morphisme $q' : P \to X$ tel que $\iota \circ k \circ q' = q$ et on sait que $\iota \circ k = f$, donc $q = fq'$ donc $q \in \mathrm{Im}\,\mathrm{Hom}\,(P, f)$, l'inclusion réciproque est évidente comme $gf = 0$. Enfin, $\mathrm{Hom}\,(P, g)$ est une application surjective, car $g : Y \to Z$ est un épimorphisme et P est un objet projectif, donc $\mathrm{Hom}\,(P, g)$ est un épimorphisme, d'où le résultat. □

De manière générale, on dit d'un objet X dans $\mathcal{A}$ admet une ***résolution projective*** si il existe une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

où les P_i sont des objets projectifs, de la même manière, on dit que X admet une ***résolution injective*** si il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots$$

où les I_i sont des objets injectifs.

Proposition 2.18. *Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne admettant suffisamment de projectifs (resp. d'injectifs), alors tout objet admet une résolution projective (resp. injective).*

Démonstration. On montre le cas des résolutions projective (le cas injectif se faisant de manière duale). On construit la résolution de manière récursive : Par hypothèse, il existe P_0 un projectif et un épimorphisme $P_0 \twoheadrightarrow X$, donc une suite exacte

$$P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

Admettons alors avoir construit pour un certain $n \in \mathbb{N}$ une suite exacte

$$P_n \xrightarrow{\delta_{n-1}} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta_0} P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

On peut considérer la suite exacte courte sur δ_n :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \delta_{n-1} \xrightarrow{i} P_n \xrightarrow{\delta_{n-1}} P_{n-1} \longrightarrow 0$$

Par hypothèse, nous pouvons trouver un épimorphisme $p : P_{n+1} \to \mathrm{Ker}\ \delta_{n-1}$ avec P_{n+1} un objet projectif. Comme p est un épimorphisme, on obtient que la suite $P_{n+1} \xrightarrow{\delta_n := i \circ p} P_n \xrightarrow{\delta_n} P_{n-1}$ est exacte, d'où la suite exacte

$$P_{n+1} \xrightarrow{\delta_n} P_n \xrightarrow{\delta_{n-1}} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\delta_0} P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

D'où l'hérédité. $\square$

Nous allons maintenant introduire la notion de foncteurs dérivés, qui repose en partie sur les notions de complexes, qui interviennent dans la partie suivante :

Définition 25. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux catégories abéliennes.

1. On dit qu'un foncteur covariant $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est
   (a) ***Exact à droite*** si, pour toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$, la suite
   $$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow 0$$
   est exacte dans $\mathcal{B}$
   (b) ***Exact à droite*** si, pour toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$, la suite
   $$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$
   est exacte dans $\mathcal{B}$
   (c) ***Exact*** si F est exact à gauche et à droite.
2. On dit qu'un foncteur contravariant $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est
   (a) ***Exact à droite*** si, pour toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$, la suite
   $$F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow 0$$
   est exacte dans $\mathcal{B}$
   (b) ***Exact à droite*** si, pour toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$, la suite
   $$0 \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A)$$
   est exacte dans $\mathcal{B}$
   (c) ***Exact*** si F est exact à gauche et à droite.

Fixons maintenant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes, ainsi que $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur contravariant exact à gauche. On suppose de plus que $\mathcal{A}$ possède suffisamment de projectifs. Par la proposition 2.18, tout objet $X \in \mathcal{A}$ admet une résolution projective $P^\bullet$ de X :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{i+1} \arrow[r, "\delta_i"] & P_i \arrow[r, "\delta_{i-1}"] & P_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "\delta_1"] & P_1 \arrow[r, "\delta_0"] & P_0 \arrow[rr] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & 0 \\
& & & & & & & & X \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Qui est envoyée par F sur le complexe $F(P^\bullet)$

$$\begin{tikzcd}
& F(X) \arrow[dr, "F(\varepsilon)"] & & & & & & \\
0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & F(P_0) \arrow[r, "F(\delta_0)"] & F(P_1) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F(P_i) \arrow[r, "F(\delta_i)"] & F(P_{i+1}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

On définit alors la valeur en X du ***n-ème foncteur dérivé à droite de*** F comme :

$$\mathcal{R}^n F(X) := \operatorname{Ker} F(\delta_n) \big/ \operatorname{Im} F(\delta_{n-1})$$

(en particulier, on a $\mathcal{R}^0 F(X) = F(X)$).
On peut montrer que cette définition est indépendante du choix de la résolution projective de X et induit une famille de foncteurs contravariants $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{R}^n F} \mathcal{B}$ (cf [2], proposition 28).

En appliquant cette construction au foncteur $\operatorname{Hom}(-, X)$, on obtient les foncteurs $\operatorname{Ext}^n(A, X)$.

2.2 Catégories exactes, catégories de Frobenius

Comme nous l'avons vu, l'axiomatique des catégories abéliennes en font des outil très efficace, nous allons voir une généralisation de cette notion : celle des catégories exactes. Attention cependant : il existe plusieurs notions distinctes appelées catégories exactes, nous parlerons ici de catégories exactes au sens de Quillen. La notion de catégorie exacte va permettre entre autre de faire le lien entre les catégories abéliennes, les catégories triangulées (par les catégories de Frobenius) et l'homologie (avec les foncteurs exacts et dérivés). Ainsi, certains résultats montrés dans cette section s'appuient sur des définitions n'apparaissant que dans la partie suivante, nous indiquerons quand ce sera le cas. Cette section s'appuie principalement sur [11] et [12], avec quelques appels à [13] pour certaines démonstrations et constructions.

Définition 26.

- Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $\mathcal{B}$ une sous-catégorie additive pleine de $\mathcal{A}$, on dit que $\mathcal{B}$ est ***stable par extension*** si pour toute suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ dans $\mathcal{A}$, on a l'implication.
$$A, C \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \mathcal{B}$$
- Si $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{A}$ additive pleine stable par extension, on considère S la classe des suites exactes courtes dont les termes sont dans $\mathcal{B}$, on dit que le couple $(\mathcal{B}, S)$ forme une ***catégorie exacte*** et les éléments de S sont appelés ***conflations***. On dit alors qu'un morphisme $f : X \to Y$ est
  - Une ***inflation*** si il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ dans S. On notera alors $X \overset{f}{\hookrightarrow} Y$
  - Une ***déflation*** si il existe une suite exacte courte $0 \rightarrow X \rightarrow Y \xrightarrow{f} Z \rightarrow 0$ dans S. On notera alors $X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y$ [18]

Nous avons donné la définition de [11], qui demande d'avoir une 'sur-catégorie' abélienne, ce qui est assez exigeant, il existe une autre définition de catégorie exacte, qui est donnée dans [12].

Définition 27. Soit $\mathcal{B}$ une catégorie additive, un couple de morphismes $(\iota, \pi) \in \mathrm{Hom}\,(X, Y) \times \mathrm{Hom}\,(Y, Z)$ est appelé un ***couple noyau-conoyau*** si $\iota = \mathrm{Ker}\,\pi$ et $\pi = \mathrm{Coker}\,\iota$.
On fixe à présent S une classe de couples noyau-conoyau sur $\mathcal{B}$:

- Une ***inflation*** est un morphisme ι tel qu'il existe un morphisme π tel que $(\iota, \pi) \in S$.
- Une ***déflation*** est un morphisme π tel qu'il existe un morphisme ι tel que $(\iota, \pi) \in S$.

Le couple $(\mathcal{B}, S)$ sera appelé une ***catégorie exacte*** si S est stable par isomorphisme et si les axiomes suivants sont respectés :

(E1) Pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, le morphisme 1_A est une inflation et une déflation.

(E2) Les classes des inflations et des déflations sont stables par composition.

(E3) Le pushout d'un diagramme $A' \longleftarrow A \overset{f}{\hookrightarrow} B$ est de la forme $A' \overset{g}{\hookrightarrow} B' \longleftarrow B$.
Le pullback d'un diagramme $A' \overset{f}{\twoheadrightarrow} B \longleftarrow B'$ est de la forme $A \longleftarrow A' \overset{g}{\twoheadrightarrow} B'$.

18. On parle aussi de monomorphisme admissible et épimorphisme admissible au lieu d'inflation et déflation.

On peut résumer l'axiome (E3) par les diagrammes de pullback et du pushout suivants :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "PO"] & B \arrow[d, dashed] \\ A' \arrow[r, hook, dashed, "g"'] & B' \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} A' \arrow[r, two heads, dashed, "g"] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "PB"] & B' \arrow[d] \\ A \arrow[r, two heads, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Cette dernière définition ne le précise pas, mais les inflations (resp. déflations) sont des monomorphisme (resp. des épimorphismes) (en adaptant la démonstration du lemme 2.7). On peut montrer que la première définition est un cas particulier de la première.

<u>*Remarque.*</u> Les isomorphismes dans une catégorie $(\mathcal{B}, S)$ exacte (selon la dernière définition) sont des inflations et des déflations : en effet, la suite $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ (où f est un isomorphisme) est isomorphe a la suite $A \overset{1_A}{\hookrightarrow} A \twoheadrightarrow 0$ par l'isomorphisme $(1_A, f^{-1}, 0)$. Or cette dernière suite est une conflation par l'axiome (E1), donc f est une inflation puisque S est supposée stable par isomorphisme (on raisonne de même pour montrer que f est une déflation).

Dans la suite, on se donne $(\mathcal{B}, S)$ une catégorie exacte (au sens de [12]). Comme la plupart des résultats sont issus de [11], il a fallu en adapter les démonstrations.

<u>Définition</u> 28.

- Un objet $P \in \mathcal{B}$ est dit S-***projectif*** si pour toute déflation $v : Y \twoheadrightarrow Z$ et morphisme $f : P \to Z$ dans $\mathcal{B}$ il existe un morphisme $g : P \to Y$ dans $\mathcal{B}$ tel que $f = v \circ g$.
- Un objet $I \in \mathcal{B}$ est dit S-***injectif*** si pour toute inflation $u : X \hookrightarrow Y$ et morphisme $f : X \to I$ dans $\mathcal{B}$ il existe un morphisme $g : Y \to I$ dans $\mathcal{B}$ tel que $f = g \circ u$.

Ces définitions sont quasiment identiques aux définitions générales d'objets injectifs et projectifs, à ceci prêt qu'on impose aux morphismes $X \to Y$ et $Y \to Z$ d'être respectivement une inflation et une déflation, au lieu de simplement un monomorphisme et un épimorphisme : on en conclut donc les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists g"'] \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, two heads, "v"] & Z \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} I & \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[r, hook, "f"'] & Y \arrow[ul, dashed, "\exists h"'] \end{tikzcd}$$

<u>Lemme</u> 2.19. *On a les deux paires d'équivalences suivantes :*

(i) Un objet $P \in \mathcal{B}$ est S-projectif

(ii) Toute déflation $Y \twoheadrightarrow P$ est un épimorphisme scindé.

et

(i) Un objet $I \in \mathcal{B}$ est S-injectif.

(ii) Toute inflation $I \hookrightarrow Y$ est un monomorphisme scindé.

Démonstration. On montre la première équivalence, la seconde est duale de la première. Soit $Y \overset{g}{\twoheadrightarrow} P$ une déflation. En appliquant la définition d'objet S-projectif à cette déflation et au morphisme 1_P, on obtient qu'il existe un morphisme $\beta : P \to Y$ dans $\mathcal{B}$ tel que $1_P = g \circ \beta$,

donc g est par définition un épimorphisme scindé.
Réciproquement, soient $v : Y \twoheadrightarrow Z$ une déflation et $f : P \to Z$ un morphisme. On peut considérer le pullback :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, two heads, "v"] & Z \\ A \arrow[u, "a"] \arrow[r, two heads, "b"'] & P \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

où le morphisme b est bien une déflation d'après le troisième axiome de [12], il admet alors un inverse à droite β, et le morphisme $a \circ \beta$ donne que P est un objet projectif. $\square$

Lemme 2.20. *Soient $A, B \in \mathcal{B}$. On a*

(a) *Les morphismes ι_A, ι_B (resp. π_A, π_B) sont des inflations (resp. des déflations).*

(b) *Si A et B sont S-projectifs, c'est aussi le cas de $A \oplus B$.*

(c) *Si A et B sont S-injectifs, c'est aussi le cas de $A \oplus B$.*

Démonstration. (a) Par l'axiome (E1), on sait que 1_B est une déflation, son noyau $0 \to B$ est donc une inflation, il en va de même pour $0 \to A$. Ensuite, le diagramme suivant est un pushout :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook, "\iota_B"] \\ A \arrow[r, hook, "\iota_A"'] & A \oplus B \end{tikzcd}$$

les morphismes ι_A et ι_B sont donc des inflations par (E3). Le cas de π_A et π_B se montre bien sur de manière duale avec un pullback.
(b) Considérons une inflation $i : A \oplus B \hookrightarrow Y$, comme les injections canoniques sont des inflations, les morphismes $i \circ \iota_A : A \to Y$ et $i \circ \iota_B : B \to Y$ sont aussi des inflations par (E2). Comme A et B sont injectifs, le lemme 2.19 nous donne alors que ces deux inflations admettent des inverses à gauche i_A et i_B, le morphisme $\binom{i_A}{i_B}$ est alors un inverse à droite de i, qui est donc un monomorphisme scindé. Le biproduit $A \oplus B$ est alors un objet injectif par le lemme 2.19. Le point (c) se règle de manière duale au point (b). $\square$

Lemme 2.21. *La somme directe de deux conflations est encore une conflation : Si $A \xrightarrow{\iota} A' \xrightarrow{\pi} A''$ et $B \xrightarrow{\iota'} B' \xrightarrow{\pi'} B''$ sont deux conflations, alors il en est de même de*

$$A \oplus B \xrightarrow{\begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & \iota' \end{pmatrix}} A' \oplus B' \xrightarrow{\begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi' \end{pmatrix}} A'' \oplus B''$$

Démonstration. Premièrement, on observe que pour tout objet C la suite $A \oplus C \hookrightarrow A' \oplus C \twoheadrightarrow A''$ est une conflation : le second morphisme est une déflation comme composition des déflations ι et ι_A, et le premier est le noyau du second.
Il découle maintenant de (E2) que $A \oplus B \to A' \oplus B'$ est une inflation, comme composition des deux inflations $A \oplus B \to A' \oplus B$ et $A' \oplus B \to A' \oplus B'$, et comme il est clair que la somme directe des deux suites est un couple noyau-conoyau, on a bien le résultat annoncé. $\square$

Proposition 2.22. *Considérons un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\ A' \arrow[r, hook, "\iota'"'] & B' \end{tikzcd}$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) *Le carré est un pushout.*

(*ii*) *Le carré est à la fois un pushout et un pullback.*

(*iii*) *La suite* $A \overset{\binom{\iota}{-f}}{\hookrightarrow} B \oplus A' \xrightarrow{(f' \ \iota')} B'$ *est une conflation.*

Démonstration. $(i) \Rightarrow (iii)$: Dire que le diagramme est un pushout revient à dire que $(f' \ \iota')$ est le conoyau de $\binom{\iota}{-f}$, il suffit donc de montrer que ce dernier morphisme est une inflation, ce qui découle de (E2) puisque $\binom{\iota}{-f}$ est la composition des morphismes

$$A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ -f & 1_{A'} \end{pmatrix}} A \oplus A' \xrightarrow{\begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & 1_{A'} \end{pmatrix}} B \oplus A'$$

qui sont tous des inflations (le premier par le lemme 2.20, le second en tant qu'isomorphisme, et le troisième par le lemme 2.21).
$(iii) \Rightarrow (ii)$ et $(ii) \Rightarrow (i)$ sont clairs. □

Définition 29. Soit $(\mathcal{B}, S)$ une catégorie exacte.

- On dit que $(\mathcal{B}, S)$ admet ***suffisamment de S-projectifs*** si pour tout $Z \in \mathcal{B}$, il existe une déflation $v : P \twoheadrightarrow Z$ où $P \in \mathcal{B}$ est S-projectif.
- On dit que $(\mathcal{B}, S)$ admet ***suffisamment de S-injectifs*** si pour tout $X \in \mathcal{B}$, il existe une inflation $u : X \hookrightarrow I$ où $I \in \mathcal{B}$ est S-projectif.

On dira enfin qu'une catégorie exacte $(\mathcal{B}, S)$ est une ***catégorie de Frobenius*** si elle a suffisamment de S-projectifs, suffisamment de S-injectifs, et si un objet est S-projectif si et seulement si il est S-injectif.

On considère maintenant $(\mathcal{B}, S)$ une catégorie de Frobenius, soient $X, Y \in \mathcal{B}$, on note $I(X,Y)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ donné par les morphismes $f : X \to Y$ qui se décomposent sur un objet S-injectif, c'est à dire tels qu'il existe un objet S-injectif I, ainsi que des morphismes $f_1 : X \to I$ et $f_2 : I \to Y$ tels que $f = f_2 \circ f_1$.

Lemme 2.23. *Pour tous objets $X, Y \in \mathcal{B}$, l'ensemble $I(X,Y)$ est un sous-groupe de* $\mathrm{Hom}(X,Y)$.

Démonstration. Premièrement, $I(X,Y)$ n'est pas vide : il contient le morphisme nul qui se décompose par lui-même sur tout objet injectif I. Soient ensuite $f, g \in I(X,Y)$, se factorisant respectivement par f_1, f_2 et g_1, g_2 sur des objets S-injectifs I_1 et I_2. On a clairement $-g \in I(X,Y)$ car $-g = (-g_2) \circ g_1$. Il nous reste à montrer que l'on a également $f + g \in I(X,Y)$: on note ι, ι' (resp. π, π') les injections (resp. les projections) canoniques de I et I' par rapport à $I \oplus I'$. Comme I et I' sont des objets S-injectifs, c'est également le cas de $I \oplus I'$ par le lemme 2.20. Posons maintenant les morphismes

$$\varphi := \iota f_1 + \iota' g_1 : X \to I \oplus I' \quad \text{et} \quad \psi := f_2 \pi + g_2 \pi' : I \oplus I' \to Y$$

On a bien $\psi\varphi = f + g$ d'où le résultat. □

Définition 30. Pour $(\mathcal{B}, S)$ une catégorie de Frobenius, on définit $\underline{\mathcal{B}}$ la ***catégorie stable*** de $\mathcal{B}$ comme étant la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{B}$, et dont les morphismes sont donnés par le quotient de groupes abéliens :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) := \mathrm{Hom}(X,Y) \Big/ I(X,Y)$$

On pose alors $\underline{f}$ la classe d'un morphisme $f : X \to Y$ dans $\mathcal{B}$.

Remarque. Nous avons en réalité défini la catégorie projectivement stable, qui peut s'appliquer à toute catégorie exacte. On peut aussi définir $\overline{\mathcal{B}}$ la catégorie injectivement stable, en quotientant les groupes de morphismes par les morphismes se décomposant sur un objet projectif. Comme on travaille dans les catégories de Frobenius, ces deux notions coïncident.

Lemme 2.24. *Soient* $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} I \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Y$ *et* $X \overset{\iota'}{\hookrightarrow} I' \overset{\pi'}{\twoheadrightarrow} Y'$ *des conflations telles que* I *et* I' *soient* S*-injectifs.*
Alors Y *et* Y' *sont isomorphes dans* $\underline{\mathcal{B}}$

Démonstration. On applique la définition de I' S-injectif à l'inflation $\iota : X \to I$ et au morphisme $\iota' :\to I'$ pour obtenir $f : I \to I'$ tel que $f \circ \iota = \iota'$, on obtient de même un morphisme $f' : I' \to I$ tel que $f' \circ \iota' = \iota$.
On a alors $\pi' \circ f \circ \iota = \pi' \circ \iota' = 0$ dond $\pi' \circ f$ est annulateur de ι, comme $\pi = \mathrm{Coker}\,\iota$, on a l'existence d'un unique morphisme $g : Y \to Y'$ tel que $g \circ \pi = \pi' \circ f$, on obtient de même un morphisme $g' : Y' \to Y$ tel que $g' \circ \pi' = \pi \circ f'$. On a donc obtenu un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, equal] & I \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, hook, "\iota'"] \arrow[d, equal] & I' \arrow[r, two heads, "\pi'"] \arrow[d, "f'"] & Y' \arrow[d, "g'"] \\
X \arrow[r, hook, "\iota"] & I \arrow[r, two heads, "\pi"] & Y
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont des conflations. On a donc par commutativité $(f' \circ f - 1_I) \circ \iota = 0$, donc il existe un unique $h : Y \to I$ tel que $h \circ \pi = f' \circ f - 1_I$. On a alors

$$\pi \circ h \circ \pi = \pi(f' \circ f - 1_I) = g' \circ g \circ \pi - \pi = (g' \circ g - 1_Y) \circ \pi$$

On a donc $g' \circ g - 1_Y = \pi \circ h$ car π est un épimorphisme. Mais donc par définition, on a $\underline{g'} \circ \underline{g} = \underline{1_Y}$. On montre d'une manière similaire que $\underline{g} \circ \underline{g'} = \underline{1_{Y'}}$ □

Lemme 2.25. *Soit* $(\mathcal{B}, S)$ *une catégorie de Frobenius, et* $\underline{f} : X \to Y$ *un morphisme dans* $\underline{\mathcal{B}}$*.*
Alors $\underline{f}$ *est isomorphe à la classe* $\underline{u}$ *d'une inflation* u*.*

Démonstration. En effet, pour une inflation $X \overset{x}{\hookrightarrow} I(X)$ de X dans un S-injectif $I(X)$, $\underline{f}$ est clairement isomorphe à la classe de $\binom{f}{x} : X \to Y \oplus I(X)$. Ensuite, la proposition 2.22 nous donne que la suite

$$X \overset{(f\ x)}{\hookrightarrow} Y \oplus I(X) \overset{\binom{-g}{\overline{x}}}{\twoheadrightarrow} C$$

où $(C, g, \overline{x})$ est le pushout de (X, f, x) est une conflation, d'où le résultat. □

À ce stade, nous n'avons pas encore introduit la notion de catégorie triangulée, la fin de cette section est donc un peu anachronique : nous allons montrer que la catégorie stable d'une catégorie de Frobenius est triangulée, un résultat qui réapparaitra pour montrer que la catégorie homotopique des complexes sur une catégorie abélienne est triangulée.
Pour commencer, nous avons besoin de construire l'autovalence T, nous reprenons la construction de [13] :

Considérons deux conflations $X \overset{\iota}{\hookrightarrow} I \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} X'$ et $Y \overset{\iota'}{\hookrightarrow} I' \overset{\pi'}{\twoheadrightarrow} Y'$, où I et I' sont S-injectifs, et $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{B}$.
Comme ι est une inflation et I' est S-injectif, on obtient un morphisme $f' : I \to I'$ tel que $\iota' \circ f = f' \circ \iota$, par propriété universelle du conoyau π de ι, il existe un unique morphisme $f'' : X' \to Y'$ tel que $f'' \circ \pi = \pi' \circ f'$. On a construit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"] & I \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "f'"] & X' \arrow[d, "f''"] \\ Y \arrow[r, hook, "\iota'"'] & I' \arrow[r, two heads, "\pi'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Comme on a pas unicité du morphisme f', nous allons montrer que la classe $\underline{f''}$ ne dépend pas du choix de f' : soient donc $\varphi' : I \to I'$ et $\varphi'' : X' \to Y'$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"] & I \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "\varphi'"] & X' \arrow[d, "\varphi''"] \\ Y \arrow[r, hook, "\iota'"'] & I' \arrow[r, two heads, "\pi'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

On a alors $(f' - \varphi') \circ \iota = \iota' \circ (f - f) = 0$, donc $f' - \varphi'$ est annulateur de ι, il existe donc un unique morphisme $s : X' \to I'$ tel que $f' - \varphi' = s \circ \pi$. Alors

$$(f'' - \varphi'')\pi = \pi'(f' - \varphi') = \pi' \circ s \circ \pi$$

Donc $(f'' - \varphi'') = \pi' \circ s$ car π est un épimorphisme. Ainsi, on a bien $\underline{f'' - \varphi''} = 0$ car $f'' - \varphi''$ se décompose sur le S-injectif I'.

Nous pouvons maintenant définir $T : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}}$: nous commençons par construire un foncteur $T : \mathcal{B} \to \underline{\mathcal{B}}$, puis nous montrerons que T envoie les morphismes de $I(X, Y)$ sur 0 pour $X, Y \in \mathcal{B}$, ce qui donnera bien un foncteur $T : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}}$.
Soit $X \in \mathcal{B}$, comme $\mathcal{B}$ admet suffisamment de S-injectifs, on peut considérer une conflation

$$X \overset{\iota(X)}{\hookrightarrow} I(X) \overset{\pi(X)}{\twoheadrightarrow} TX$$

avec $I(X)$ un S-injectif. On fixe $T(X) = TX$ (on a encore affaire avec l'axiome du choix dans les classes), par ce qu'on a vu dans le précédent paragraphe, un morphisme $f : X \to Y$ donne un unique $T(f) := \underline{f''} : TX \to TY$. Si $f = 1_X$, on peut prendre $f' = 1_{I(X)}$, qui donne $f'' = 1_{TX}$, donc $T(1_X) = \underline{1_{TX}}$. Nous avons donc bien un foncteur $T : \mathcal{B} \to \underline{\mathcal{B}}$.

Soit maintenant $f : X \to Y \in I(X, Y)$, on écrit $f = X \xrightarrow{g} I \xrightarrow{h} Y$ avec I un S-injectif. En utilisant les mêmes notations que précédemment, on obtient $f'' = h''g''$ avec $g'' : TX \to TI$ et $h'' : TI \to TY$, on doit encore montrer que TI est S-injectif. On a la conflation $I \hookrightarrow I(I) \twoheadrightarrow TI$, comme I est injectif, l'inflation est un monomorphisme scindé (par le lemme 2.19), en adaptant le lemme de scindage au cas des catégories exactes, on obtient $I(I) \simeq I \oplus T(I)$ et donc $T(I)$ est S-injectif. Donc f'' se décompose sur un S-injectif, et donc $T(f) = \underline{f''} = 0$, donc T induit un foncteur $T : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}}$.

Proposition 2.26. *Le foncteur $T : \underline{\mathcal{B}} \to \underline{\mathcal{B}}$ que nous venons de construire est une autovalence.*

Démonstration. L'application induite par T sur les morphismes est $\mathbb{Z}$-linéaire : $T(f+g) = T(f) + T(g)$, puisque $I(f) + I(g)$ donne les relations de commutativités recherchées dans la définition. Donc T est un foncteur additif.
Construisons S le quasi-inverse de T : Notre construction de T ne faisait appel qu'au fait que $\mathcal{B}$ admet suffisamment de S-injectifs. En appliquant le même procédé au cas des S-projectifs avec $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{B}$, on obtient des diagrammes commutatifs de la forme

$$\begin{tikzcd}
SX \arrow[r, hook, "\iota(X)"] \arrow[d, "f''"] & P(X) \arrow[r, two heads, "\pi(X)"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
SY \arrow[r, hook, "\iota(Y)"'] & P(Y) \arrow[r, two heads, "\pi(Y)"'] & Y
\end{tikzcd}$$

à nouveau, la classe de f'' ne dépend pas du choix de f'. Nous construisons ainsi un foncteur S de la catégorie projectivement stable de $\mathcal{B}$ dans elle-même, mais dans le cas des catégories de Frobenius, $\overline{\mathcal{B}}$ et $\underline{\mathcal{B}}$ coïncident.
On admet que l'on peut construire un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
SX \arrow[r, hook, "\iota(SX)"] \arrow[d, equal] & I(SX) \arrow[r, two heads, "\pi(SX)"] \arrow[d] & TSX \arrow[d, "\eta_X"] \\
SX \arrow[r, hook, "\iota(X)"'] & P(A) \arrow[r, two heads, "\pi(SX)"'] & X
\end{tikzcd}$$

tel que $\eta_X : TSX \to X$ soit un isomorphisme dans $\mathcal{B}$ (voir [13], théorème 2).
Soit $f : X \to Y$ un morphisme, on obtient deux diagrammes commutatifs (en identifiant les classes dans $\mathcal{B}$ et leurs représentants dans $\mathcal{B}$) :

$$\begin{tikzcd}
SX \arrow[r, hook, "\iota(SX)"] \arrow[d, equal] & I(SX) \arrow[r, two heads, "\pi(SX)"] \arrow[d] & TSX \arrow[d, "\eta_X"] \\
SX \arrow[r, hook, "\iota(X)"'] \arrow[d, "S(f)"'] & P(A) \arrow[r, two heads, "\pi(SX)"'] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
SY \arrow[r, hook, "\iota(B)"'] & P(Y) \arrow[r, two heads, "\pi(Y)"'] & Y
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
SX \arrow[r, hook, "\iota(SX)"] \arrow[d, "S(f)"'] & I(SX) \arrow[r, two heads, "\pi(SX)"] \arrow[d] & TSX \arrow[d, "TS(f)"] \\
SY \arrow[r, hook, "\iota(SY)"'] \arrow[d, equal] & I(SY) \arrow[r, two heads, "\pi(SY)"'] \arrow[d] & TSY \arrow[d, "\eta_Y"] \\
SY \arrow[r, hook, "\iota(B)"'] & P(Y) \arrow[r, two heads, "\pi(Y)"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Ces deux diagrammes montrent que $\underline{f}\eta_X$ et $TS(f)\eta_Y$ sont des morphismes par T sur le morphismes $S(f) : SX \to SY$, ainsi,

$$\underline{f}\eta_X = TS(f)\eta_Y$$

dans $\underline{\mathcal{B}}$, donc $\eta : TS \to 1_{\underline{\mathcal{B}}}$ est un isomorphisme naturel, on construit de manière similaire un isomorphismes naturel $ST \to 1_{\underline{\mathcal{B}}}$, donc T est bien une autovalence de quasi-inverse S. $\square$

On se donne à nouveau $(\mathcal{B}, S)$ une catégorie de Frobenius, et $\underline{\mathcal{B}}$ sa catégorie stable. Soient $X, Y \in \mathcal{B}$ et $u : X \to Y$ un morphisme dans u. On considère le diagramme suivant dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "x"] \arrow[d, "u"] & I(X) \arrow[r, two heads, "\overline{x}"] \arrow[d, "\overline{u}"] & TX \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r, hook, "v"'] & C_u \arrow[r, two heads, "w"'] & TX \end{tikzcd}$$

où C_u désigne $Y \sqcup_X I(X)$.
On appellera ***triangle standard*** l'image dans $\mathcal{B}$ d'une suite de la forme

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} C_u \xrightarrow{w} TX$$

.

Théorème 4. *La catégorie $\underline{\mathcal{B}}$, munie du foncteur T et de la classe des triangles isomorphes dans $\underline{\mathcal{B}}$ à un triangle standard forme une catégorie triangulée.*

Démonstration. (TR1) Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est, par composition, isomorphe à un triangle standard. Tout morphisme dans $\underline{\mathcal{B}}$ peut être placé dans un triangle standard par construction de ces derniers. Enfin, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"] & X \arrow[r, "\iota(X)"] \arrow[d, "1_X"] & I(A) \arrow[r, "\pi(X)"] \arrow[d, "0"] & TA \arrow[d, "1_{TX}"] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"'] & TX \end{tikzcd}$$

ainsi que le fait que $I(A) \simeq 0$ dans $\underline{\mathcal{B}}$ on obtient que la deuxième ligne est un triangle distingué.

(TR2) Par construction des triangles distingués, il suffit de considérer le cas des triangles standards : soit

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} C_u \xrightarrow{w} TX$$

un tel triangle. Soit $Y \overset{y}{\hookrightarrow} I(Y) \overset{\overline{y}}{\twoheadrightarrow} TY$ et $X \overset{x}{\hookrightarrow} I(X) \overset{\overline{x}}{\twoheadrightarrow} TX$ des conflations avec $I(Y)$ et $I(X)$ des objets S-injectifs. Il existe alors $I_u : I(X) \to I(Y)$ un morphisme tel que $I_u \circ x = y \circ u$, et il existe alors un unique $T_u : TX \to TY$ tel que $\overline{y} \circ I_u = T_u \circ \overline{x}$ par propriété universelle du conoyau de x.
Par propriété universelle du pushout C_u, on obtient un unique morphisme $f : C_u \to I(Y)$ tel que $f \circ v = y$ et $f \circ \overline{u} = I_u$. Comme $\overline{y} \circ f \circ v = \overline{y} \circ y = 0 = T_u \circ w \circ v$ et $\overline{y} \circ f \circ \overline{u} = \overline{y} \circ I_u = T_u \circ \overline{x} = T_u \circ w \circ \overline{u}$, on conclut que $\overline{y} f = T_u w$, puisque C_u est un pushout. On obtient donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "v"] \arrow[d, "y"] & C_u \arrow[r, two heads, "w"] \arrow[d, "\binom{f}{w}"] & TX \arrow[d, equal] \\ I(Y) \arrow[r, hook, "\binom{1_{I(Y)}}{0}"] \arrow[d, "\overline{y}"] & I(Y) \oplus TX \arrow[r, two heads, "(0\ 1_{TX})"] \arrow[d, "(\overline{y}\ -T_u)"] & TX \\ T_Y \arrow[r, equal] & TY & \end{tikzcd}$$

Les deux premières lignes sont exactes, donc la deuxième est la conflation induite sur la première, en particulier le carré en haut à gauche est un pushout. Ainsi, le triangle

$$Y \xrightarrow{v} C_u \xrightarrow{\binom{f}{w}} I(Y) \oplus TX \xrightarrow{(\overline{y}\ -T_u)} TY$$

est un triangle standard, clairement isomorphe dans $\mathcal{B}$ au triangle $Y \xrightarrow{v} C_u \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-T_u} TY$ (puisque $I(Y) \simeq 0$ dans $\underline{\mathcal{B}}$).

(TR3) Une fois de plus, il suffit de considérer le cas des triangles standards, considérons trois triangles standards :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[d, "i"] \\ I(X) \arrow[r, "\overline{u}"] \arrow[d, "\overline{x}"'] & Z' \arrow[d, "i'"] \\ TX \arrow[r, equal] & TX \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "y"'] & Z \arrow[d, "j"] \\ I(Y) \arrow[r, "\overline{v}"] \arrow[d, "\overline{y}"'] & X' \arrow[d, "j'"] \\ TY \arrow[r, equal] & TY \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "w"] \arrow[d, "x"'] & Z \arrow[d, "k"] \\ I(X) \arrow[r, "\overline{w}"] \arrow[d, "\overline{x}"'] & Y' \arrow[d, "k'"] \\ TX \arrow[r, equal] & TW \end{tikzcd}$$

avec $w = vu$. Tentons de remplacer $I(Y), TY, y, \overline{y}$ comme suit :

On a la conflation $Y \overset{i}{\hookrightarrow} Z' \twoheadrightarrow TX$, et considérons la conflation $Z' \overset{\ell}{\hookrightarrow} I(Z') \overset{\overline{\ell}}{\twoheadrightarrow} TZ'$ avec $I(Z')$ un S-injectif. Considérons le diagramme commutatif de conflations dans $\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, equal] & Z' \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\ell"] & TX \arrow[d] \\ Y \arrow[r, hook, "\ell \circ i"] & I(Z') \arrow[r, two heads] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ & TZ' \arrow[r, equal] & TZ' \end{tikzcd}$$

On peut donc prendre la conflation $Y \hookrightarrow I(Z') \twoheadrightarrow M$ au lieu de $Y \hookrightarrow I(Y) \twoheadrightarrow TY$:
En changeant les notation, on peut poser $I(Y) = I(Z')$ et $y = \ell \circ i$. Puisque $y \circ u = \ell \circ i \circ u = \ell \circ \overline{x}$, on pose $I_u := \ell \circ \overline{u}$, et on définit T_u comme l'unique morphisme tel que $T_u \circ \overline{x} = \overline{y} \circ I_u = \overline{y} \circ \ell \circ \overline{u}$. L'identité sur $I(Y) = I(Z')$ peut-être notée I_i, car $\ell \circ i = 1_{Z'} \circ y = I_i \circ Y$, et il existe un morphisme $Ti : TY \to TZ'$ tel que $\overline{\ell} = \overline{\ell} \circ I_i = T_i \circ \overline{y}$.
Comme $\overline{w}x = kw = kvu$, il existe $f : Z' \to Y'$ tel que $f\overline{u} = \overline{w}$ et $fi = kv$, en utilisant le fait que Z' est un pushout.
De la même manière, $jw = jvu = \overline{v}yu = \overline{v}\ell iu = \overline{v}\ell\overline{u}x$ nous donne l'existence de $g : Y' \to X'$ tel que $g\overline{w} = \overline{v}\ell\overline{u}$, et $gk = j$, en utilisant cette fois si que Y' est un pushout.
On affirme que $gf = \overline{v}\ell$: il est suffisant pour montrer ce la de montrer que $gfi = \overline{v}\ell i$ et $gf\overline{u} = \overline{v}\ell\overline{u}$. En fait, $gfi = gkv = jv = \overline{v}y = \overline{v}\ell i$, et $gf\overline{u} = g\overline{w} = \overline{v}\ell\overline{u}$.

Au total, nous avons un diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "x"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "i"] & Z \arrow[d, "k"'] \\
I(X) \arrow[r, "\overline{u}"] \arrow[d, "\overline{x}"'] & Z' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\ell"'] & Y' \arrow[d, "g"'] \\
TX \arrow[dr, "T_u"'] & I(Z') \arrow[r, "\overline{v}"] \arrow[d, "\overline{y}"'] & X' \arrow[d] \\
& TY \arrow[r] & TZ'
\end{tikzcd}
$$

avec $f\overline{u} = \overline{w}$, $\ell i = y$ et $gk = j$.
Commençons par vérifier les différentes relations : par construction, on a $fi = kv$ et $gk = j$, montrons ensuite que $k'f = i'$, ce qui est suffisant pour montrer que $k'fi = i'i$ et $k'f\overline{u} = i'\overline{u}$, en utilisant que Z' est un pushout. En fait, $k'fi = k'kv = 0 = i'i$ et $k'f\overline{u} = k'\overline{w} = \overline{x} = i'\overline{u}$. Enfin, montrons que $T_uk' = j'g$, ce qui est suffisant pour montrer que $T_uk'k = j'gk$ et $T_uk'\overline{w} = j'g\overline{w}$ en utilisant cette fois que Y' est un pushout. En fait $T_uk'k = 0 = j'j = J'gk$, et $j'g\overline{w} = j'gfu = j'\overline{v}\ell\overline{u} = \overline{y}\ell\overline{u} = T_u\overline{x} = T_uk'\overline{w}$.

Il reste à voir que $Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{T_ij'} TZ'$ est un triangle standard. Comme X' est un pushout de ℓi et v, et Y' est un pushout de i et v, le diagramme suivant est un pushout :

$$
\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\ell"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\
I(Z') \arrow[r, "\overline{v}"'] & X'
\end{tikzcd}
$$

Rappelons que $\ell = T_i\overline{y}$, ainsi $\ell = T_ij'\overline{v}$. Ainsi, on obtient le diagramme commutatif suivant ou les colonnes sont des conflations :

$$
\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\ell"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\
I(Z') \arrow[r, "\overline{v}"'] \arrow[d, "\overline{\ell}"'] & X' \arrow[d, "T_ij'"] \\
TZ' \arrow[r, equal] & TZ'
\end{tikzcd}
$$

Et donc $Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{T_ij'} TZ'$ est un triangle standard. $\square$

Troisième partie
Catégories Triangulées

3.1 Définitions

Les catégories triangulées ont été introduites par Jean-louis Verdier dans sa thèse au cour des années 1960, elles trouvent leur origine dans la géométrie algébrique et dans la topologie algébrique, et sont depuis devenues indispensables dans beaucoup de branches différentes des mathématiques.
Cette axiomatique assez obscure en première lecture se retrouve en fait dans beaucoup d'objets distincts : elle se retrouvera dans les catégories homotopiques des complexes et des catégories dérivées (par défaut, les résultats de cette section sont tirés de [3]).
On notera cependant que contrairement aux catégories abéliennes, une catégorie n'est pas triangulée de manière inhérente, il s'agit d'une structure 'ajoutée', qui repose en premier lieu sur la notion de triangle :

Définition 31. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive, on dit qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est une ***autovalence*** si il est une équivalence additive (l'application induite sur les morphisme est $\mathbb{Z}$-linéaire).

Définition 32. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie additive, munie de $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ une autovalence, que l'on appellera ***foncteur de translation***.
On appelle ***triangle*** dans $\mathcal{T}$ la donnée de 3 objets $X, Y, Z \in \mathcal{T}$ et de morphismes $\alpha : X \to Y$, $\beta : Y \to Z$ et $\gamma : Z \to T(X)$, on peut alors écrire

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Y \xrightarrow{\gamma} T(X)$$

Ou par abus de notation

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "\beta"] & \\ X \arrow[ur, "\alpha"] & & Z \arrow[ll, dotted, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

Attention cependant, γ n'atterrit pas dans X mais dans $T(X)$.

Comme toujours en théorie des catégories, pour toute nouvelle notion, on veut trouver une notion de morphismes :

Définition 33. Soient (X, Y, Z) et (X', Y', Z') deux triangles, un ***morphisme de triangle*** est la donnée de trois morphismes (χ, ψ, ω) rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\chi"] & X \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & X \arrow[r] \arrow[d, "\omega"] & T(X) \arrow[d, "T(\chi)"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & T(X') \end{tikzcd}$$

Si les trois morphismes χ, ψ et ω sont des isomorphismes, on parle d'***isomorphisme de triangle***.

Remarque. Comme T possède un quasi-inverse (que l'on notera abusivement T^{-1}), un triangle donne en fait naissance à une multitude de morphismes : on peut voir un triangle comme une suite

$$\cdots \xrightarrow{T^{-1}(\alpha)} T^{-1}(Y) \xrightarrow{T^{-1}(\beta)} T^{-1}(Z) \xrightarrow{T^{-1}(\gamma)} X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} T(X) \xrightarrow{T(\alpha)} \cdots$$

Définition 34. On se donne $\mathcal{T}$ une catégorie additive, $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ un foncteur de translation, et $\mathbb{T}$ une collection de triangles, que l'on dit ***distingués***. On dit que $(\mathcal{T}, T, \mathbb{T})$ forme une ***catégorie triangulée*** si les trois axiomes suivants sont vérifiés. :

TR1 :
- Deux triangles isomorphes sont simultanément distingués.
- Le triangle $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$ est distingué pour tout $X \in \mathcal{T}$.
- Tout morphisme $\alpha : X \to Y$ dans $\mathcal{T}$ peut se compléter en un triangle distingué

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$$

appelé ***triangle sur*** α.

TR2 : (Axiome de rotation) Pour tout triangle distingué $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$, les triangles

$$Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX \xrightarrow{-T\alpha} TY \quad \text{et} \quad T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}\gamma} X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$$

Sont eux aussi distingués.

TR3 : (Axiome de l'Octahèdre) Soit dans $\mathcal{T}$ un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "\alpha_2"] \arrow[dr, "\alpha_3"'] & & X_3 \\ & X_2 \arrow[ur, "\alpha_1"'] & \end{tikzcd}$$

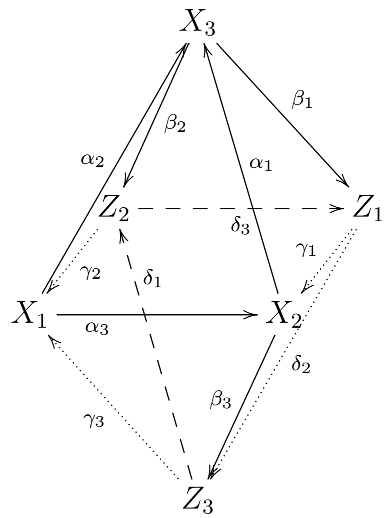
Si on considère les triangles sur α_1, α_2 et α_3 (par TR1).

$$\left\{ \begin{array}{l} X_2 \xrightarrow{\alpha_1} X_3 \xrightarrow{\beta_1} Z_1 \xrightarrow{\gamma_1} TX_2 \\ X_1 \xrightarrow{\alpha_2} X_3 \xrightarrow{\beta_2} Z_2 \xrightarrow{\gamma_2} TX_1 \\ X_1 \xrightarrow{\alpha_3} X_2 \xrightarrow{\beta_3} Z_3 \xrightarrow{\gamma_3} TX_1 \end{array} \right.$$

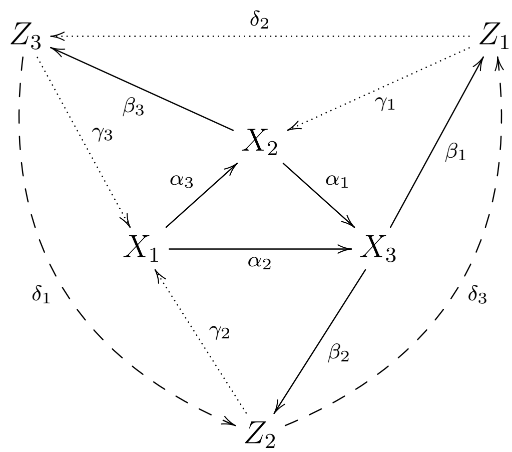
Alors il existe un triangle distingué $Z_3 \xrightarrow{\delta_1} Z_2 \xrightarrow{\delta_3} Z_1 \xrightarrow{\delta_2} TZ_3$ et vérifiant les relations de commutativité suivantes :

- $\gamma_2 \circ \delta_1 = \gamma_3$
- $\delta_3 \circ \beta_2 = \beta_1$
- $T\beta_3 \circ \gamma_1 = \delta_2$
- $\beta_2 \circ \alpha_1 = \delta_1 \circ \beta_3$
- $T\alpha_3 \circ \gamma_2 = \gamma_1 \circ \delta_3$

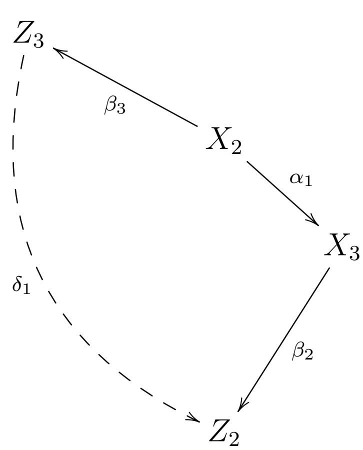
L'axiome de l'octahèdre semble de prime abord assez cryptique, il existe différentes représentations de cet axiome par des diagrammes, présentant différents avantages et inconvénients :



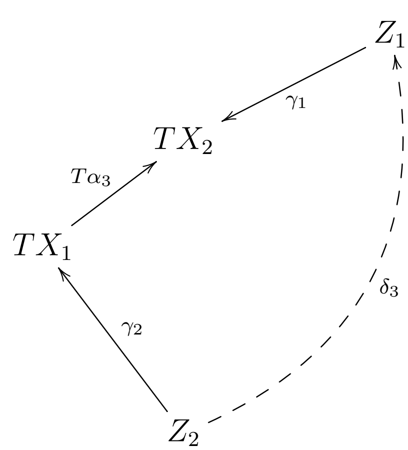
Cette représentation donne son nom à l'axiome de l'octahèdre, cependant il difficile de retrouver les relations de commutativité. À cet égard, le diagramme suivant est peut-être un peu plus clair :



Dans ce diagramme, les parties commutatives sont le triangle central (par hypothèse), les triangles faisant intervenir les δ_i et les deux trapèzes :



et



Et tous les autres triangles sont supposés distingués.

Il existe encore une autre façon d'illustrer l'axiome de l'octahèdre à l'aide du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & T^{-1}Z_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "T^{-1}\gamma_1"'] & T^{-1}Z_1 \arrow[d, dashed, "T^{-1}\delta_2"] & \\
X_1 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, equal] & X_2 \arrow[r, "\beta_3"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & Z_3 \arrow[r, "\gamma_3"] \arrow[d, dashed, "\delta_1"] & TX_1 \arrow[d, equal] \\
X_1 \arrow[r, "\alpha_2"'] & X_3 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d, "\beta_1"'] & Z_2 \arrow[r, "\gamma_2"'] \arrow[d, dashed, "\delta_3"] & TX_1 \\
 & Z_1 \arrow[r, equal] & Z_1 &
\end{tikzcd}$$

Les lignes et les colonnes sont des triangles distingués et les relations de commutativité sont entre les carrés, a l'exception de la relation $T\alpha_3 \circ \gamma_2 = \gamma_1 \circ \delta_3$, pour la faire apparaitre il faut compléter de la manière suivante, ce qui le rend plus encombrant :

$$\begin{tikzcd}
 & T^{-1}Z_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "T^{-1}\gamma_1"'] & T^{-1}Z_1 \arrow[d, dashed, "T^{-1}\delta_2"] & & \\
X_1 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, equal] & X_2 \arrow[r, "\beta_3"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & Z_3 \arrow[r, "\gamma_3"] \arrow[d, dashed, "\delta_1"] & TX_1 \arrow[d, equal] \arrow[r, "T\alpha_3"] & TX_2 \arrow[dddlll, equal, bend left] \\
X_1 \arrow[r, "\alpha_2"'] & X_3 \arrow[r, "\beta_2"'] \arrow[d, "\beta_1"'] & Z_2 \arrow[r, "\gamma_2"'] \arrow[d, dashed, "\delta_3"] & TX_1 & \\
 & Z_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\gamma_1"'] & Z_1 & & \\
 & TX_2 & & &
\end{tikzcd}$$

Pour plus d'information sur l'axiome de l'octahèdre, on pourra consulter [15]

Il existe d'autres définitions de catégories triangulées (équivalentes à celle que nous avons données), faisant intervenir d'autres axiomes en plus des trois donnés (c'est par exemple le cas dans [14]). Un axiome couramment donné permet de complétér tout carré commutatif en un morphisme entre triangle distingués, il découle en fait des axiomes que nous avons donné, mais son utilisation fréquente en fait une propriété importante [19] :

Proposition 3.1. *Soit $(\mathcal{T}, T, \mathbb{T})$ une catégorie triangulée, pour tout carré commutatif*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\chi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\
X' \arrow[r, "\alpha'"] & Y'
\end{tikzcd}$$

Il existe ω faisant de (χ, ψ, ω) un morphisme de triangles entre les triangles sur α et α'.

Démonstration. On commence par poser

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX \qquad \text{et} \qquad X' \xrightarrow{\alpha'} Y' \xrightarrow{\beta'} Z' \xrightarrow{\gamma'} TX'$$

19. De plus, cet axiome peut-être utile pour montrer l'axiome de l'octahèdre, c'est par exemple le cas dans la démonstration du théorème 8

les triangles distingués sur α et α' (par TR1).
On pose ensuite $\delta := \psi \circ \alpha = \alpha' \circ \chi$. On prend le triangle distingué sur δ : $X \xrightarrow{\delta} Y' \xrightarrow{\varepsilon} D \xrightarrow{\varphi} TX$.
En appliquant l'axiome octaédrique aux deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\chi"'] & & Y' \\ & X' \arrow[ur, "\alpha'"'] & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y' \\ & Y \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

On obtient deux triangles distingués

$$X'' \xrightarrow{\eta_2} D \xrightarrow{\zeta_2} Z' \xrightarrow{\chi_2} TX'' \qquad \text{et} \qquad Z \xrightarrow{\zeta_1} D \xrightarrow{\eta_1} Y'' \xrightarrow{\chi_1} TZ$$

Où X'',Y'' et D sont respectivement les troisièmes termes des triangles distingués que χ, ψ et δ.
On veut montrer que le morphisme $\omega = \zeta_2 \circ \zeta_1$ convient, ce qui revient à montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\chi"'] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"] & Z \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\omega"] & TX \arrow[d, "T\chi"] \\ X' \arrow[r, "\alpha'"] & Y' \arrow[r, "\beta'"] & Z \arrow[r, "\gamma'"] & TX \end{tikzcd}$$

On veut donc montrer les relations $\omega \circ \beta = \beta' \circ \psi$ et $\gamma' \circ \omega = T\chi \circ \gamma$, ce que l'on obtient par les relations données par l'axiome de l'octahèdre.
On a $\zeta_1 \circ \beta = \varepsilon \circ \psi$ et donc $\zeta_2 \circ \zeta_1 \circ \beta = \zeta_2 \circ \varepsilon \circ \psi = \beta' \circ \psi$.
Et $\gamma' \circ \zeta_2 = T\chi \circ \varphi$ donc $\gamma' \circ \omega = T\chi \circ \varphi \circ \zeta_1 = T\chi \circ \gamma$. $\square$

À partir de maintenant dans cette section, on considèrera par défaut une catégorie triangulée $(\mathcal{T}, T, \mathbb{T})$.

Proposition 3.2. *Soient deux triangles distingués dans $\mathcal{T}$, liés pas un morphisme de triangles, le tout illustré par le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\rho_1"] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\sigma_1"] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d] & TA_1 \arrow[d, "T\rho_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] & A_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & A_2 \arrow[r, "\gamma_2"'] & TA_2 \end{tikzcd}$$

Alors on peut considérer les triangles distingués sur ρ_1 et σ_1 :

$$A_1 \xrightarrow{\rho_1} A_2 \xrightarrow{\rho_2} A_3 \xrightarrow{\rho_3} TA_1 \qquad \text{et} \qquad B_1 \xrightarrow{\sigma_1} B_2 \xrightarrow{\sigma_2} B_3 \xrightarrow{\sigma_3} TB_1$$

Et il existe alors des morphismes $\tau_1, \alpha_3, \beta_3, \sigma_2, \gamma_3$ et σ_3 tels que le diagramme suivant commute et que ses lignes/colonnes soient des triangles distingués.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\rho_1"] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\sigma_1"] & C_1 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, dashed, "\tau_1"] & TA_1 \arrow[d, "T\rho_1"] \\ A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\rho_2"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\sigma_2"] & C_2 \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, dashed, "\tau_2"] & TA_2 \arrow[d, "T\rho_2"] \\ A_3 \arrow[r, dashed, "\alpha_3"] \arrow[d, "\rho_3"] & B_3 \arrow[r, dashed, "\beta_3"] \arrow[d, "\sigma_3"] & C_3 \arrow[r, dashed, "\gamma_3"] \arrow[d, dashed, "\tau_3"] & TA_3 \\ TA_1 \arrow[r, "T\alpha_1"] & TB_1 \arrow[r, "T\beta_1"] & TC_1 & \end{tikzcd}$$

Démonstration. On construit le morphisme α_3 par la proposition 3.1 sous la forme $\zeta_2 \circ \zeta_1$. On considère $A_3 \xrightarrow{\alpha_3} B_3 \xrightarrow{\beta_3} C_3 \xrightarrow{\gamma_3} TA_3$, on applique ensuite l'axiome de l'octahèdre à

$$\begin{tikzcd} A_3 \arrow[rr, "\alpha_3"] \arrow[dr, "\zeta_1"'] & & B_3 \\ & D \arrow[ur, "\zeta_2"'] & \end{tikzcd}$$

Et on obtient des morphismes $C_2 \xrightarrow{\tau_2} C_3 \xrightarrow{\tau_3} TC_1 \xrightarrow{\mu} TC_2$, les relations de commutativité de l'axiome de l'octahèdre donnent alors le résultat en posant $\tau_1 = T^{-1}(\mu)$ (on note qu'e l'on a pas montré que τ_1 était ègal au premier morphisme $C_1 \to C_2$). $\square$

Remarque. On note que l'on peut aussi compléter la partie en bas à droite du précédent diagramme, on obtient un carré

$$\begin{tikzcd} C_3 \arrow[r, "\gamma_3"] \arrow[d, "\tau_3"'] & TA_3 \arrow[d, "T\rho_3"] \\ TC_1 \arrow[r, "T\gamma_1"'] & T^2A_1 \end{tikzcd}$$

mais il s'agit d'un carré anti commutatif : $T\rho_3 \circ \gamma_3 = -T\gamma_1 \circ \tau_3$

Lemme 3.3. *On considère un triangle distingué*

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$$

On a alors $\beta \circ \alpha = 0 = \gamma \circ \beta$.

Démonstration. Par l'axiome TR1, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"] & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \arrow[r] & TX \arrow[d, "T1_X=1_{TX}"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "\beta"'] & Z \arrow[r, "\gamma"'] & TX \end{tikzcd}$$

Par la propriété 3.1, il existe un morphisme $\delta : 0 \to Z$ tel que $\delta \circ 0 = \beta \circ \alpha$, mais donc $0 = \beta \circ \alpha$. On applique le même raisonnement au diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "1_Y"] \arrow[d, "1_Y"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \arrow[r] & TY \arrow[d, "T1_Y=1_{TY}"] \\ Y \arrow[r, "\beta"'] & Z \arrow[r, "\gamma"'] & TX \arrow[r, "-T\alpha"'] & TY \end{tikzcd}$$

pour avoir $0 = \gamma \circ \beta$ (la deuxième ligne étant distingué par l'axiome de rotation). $\square$

Proposition 3.4. *(cf [14]) Soit $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$ un triangle distingué. Si $\gamma = 0$ alors le triangle est* **scindé**, *c'est à dire que α est un monomorphisme scindé et β est un épimorphisme scindé.*

Démonstration. On a le diagramme suivant dont les lignes sont des triangles distingués :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_X"] & Y \arrow[r, "\beta"] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & TX \arrow[d, "T1_X"] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"'] & TX \end{tikzcd}$$

En combinant l'axiome de rotation avec la propriété 3.1, on obtient l'existence d'un morphisme $u : Y \to X$ tel que $1_X = u \circ \alpha$, donc α est bien un monomorphisme scindé.
De la même manière, on a le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1_Z"'] & 0 \arrow[d, "0"] \\ Z \arrow[r, "0"'] & TX \end{tikzcd}$$

On applique la propriété 3.1 pour obtenir le diagramme commutatif suivant, donc les lignes sont des triangles distingués (par l'axiome de rotation) :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1_Z"] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & TZ \arrow[r, "-1_{TZ}"] \arrow[d, "Tv"] & TZ \arrow[d, "1_{TZ}"] \\ Z \arrow[r, "\gamma"'] & TX \arrow[r, "-T\alpha"'] & TY \arrow[r, "-T\beta"'] & TZ \end{tikzcd}$$

On a donc $-T\beta \circ Tv = 1_{TZ} \circ -1_{TZ}$ et donc $T(\beta \circ v) = T(1_Z)$, donc $\beta \circ v = 1_Z$ et β est un épimorphisme scindé (T étant une équivalence, c'est un foncteur plein et fidèle par la proposition 1.2). □

<u>Corollaire</u> 3.5. *Soit $\alpha : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{T}$, alors :*

(a) α est un monomorphisme scindé si et seulement si on peut choisir un triangle distingué de la forme

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow Z \xrightarrow{0} TX$$

(b) α est un épimorphisme scindé si et seulement si on peut choisir un triangle distingué de la forme

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{0} Z \longrightarrow TX$$

(c) α est un isomorphisme si et seulement si le triangle

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} TX$$

est distingué.

Démonstration. Le point (c) découle par définition des deux autres, on montre donc (a), la réciproque est directement issue de la proposition précédente. Pour le sens direct, si il existe $\beta : Y \to X$ tel que $\beta \circ \alpha = 1_X$, alors on a la commutativité du diagramme suivant, dont les lignes sont des triangles distinguées :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_X"] & Y \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\beta"] & Z \arrow[r, "v"] & TX \arrow[d, "T1_X"] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \arrow[r, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"'] & TX \end{tikzcd}$$

Par la proposition 3.1, le morphisme nul $Z \to 0$ fait de $(1_X, \beta, 0)$ un morphisme de triangles, par commutativité, on obtient donc $0 = 1 \circ v$ et donc $v = 0$.

Pour montrer (b), on considère le triangle distingué sur α $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} TX$, par l'axiome de rotation, le triangle $T^{-1}Z \xrightarrow{T^{-1}\gamma} X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$, la réciproque est alors également issue de la proposition précédente. Pour le sens direct, soit $\gamma : Y \to X$ tel que $\alpha \circ \gamma = 1_Y$, on a alors la commutativité du diagramme suivant, dont les lignes sont des triangles distinguées :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "1_Y"] \arrow[d, "\gamma"] & Y \arrow[r, "0"] \arrow[d, "1_Y"] & 0 \arrow[r, "0"] & TX \arrow[d, "T\gamma"] \\
X \arrow[r, "\alpha"'] & X \arrow[r] & Z \arrow[r] & TX
\end{tikzcd}$$

et la propriété 3.1 donne également le résultat. □

Lemme 3.6. *(Lemme des 5 dans les catégories triangulées)*
Soit

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & TA_1 \arrow[d] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & TB_1
\end{tikzcd}$$

un morphisme de triangles distingués, si deux des trois morphismes verticaux qui composent le morphisme de triangles sont des isomorphismes, alors il en est de même du troisième.

Démonstration. Supposons que les morphismes $A_1 \to B_1$ et $A_3 \to B_3$ sont des isomorphismes, on considère $A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow TA_2$ un triangle distingué sur le morphisme $A_2 \to B_2$. Par le corollaire 3.5 et la proposition 3.2, on a un diagramme commutatif dont les lignes et les colonnes sont des triangles distingués :

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & TA_1 \arrow[d] \\
B_1 \arrow[r] \arrow[d] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & TB_1 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & T0 = 0 \\
TA_1 \arrow[r] & TA_2 \arrow[r] & TA_3 &
\end{tikzcd}$$

Donc le triangle $0 \longrightarrow C_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ est distingué, donc $C_2 \simeq 0$ par le corollaire 3.5 donc le triangle $A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow TA_2$ est distingué et donc $A_2 \to B_2$ est un isomorphisme par le corollaire 3.5, on raisonne de la même manière pour traiter les autres cas. □

Corollaire 3.7. *Soit $\alpha : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{T}$, alors si*

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX \qquad \textit{et} \qquad X \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow Z' \longrightarrow TX$$

sont des triangles distingués sur α, alors $Z \simeq Z'$ (ce qui donne une forme faible d'unicité au triangle distingué sur un morphisme : l'isomorphisme annoncé n'est pas unique).

Démonstration. Par la proposition 3.1, il existe $\zeta : Z \to Z'$ un morphisme faisant de $(1_X, 1_Y, \zeta)$ un morphisme de triangle, et ζ est un isomorphisme par le lemme précédent. □

On remarque qu'il existe une articulation entre les notions de catégories abéliennes et triangulées (issue de [14]) :

Définition 35. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, on dit que $\mathcal{A}$ est ***semi-simple*** si toute suite exacte courte dans $\mathcal{A}$ est scindée.

Exemple. La catégorie $\mathfrak{Ab}$ n'est pas semi-simple : la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

n'est pas scindée.

Proposition 3.8. *Soit A un anneau commutatif semi-simple. Alors la catégorie $A-\mathfrak{mod}$ est semi-simple*

Démonstration. Soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de A-modules semi-simples. Par le Lemme de scindage (Lemme 2.6), il suffit de construire une rétraction de α. Par hypothèse, α induit un isomorphisme $A \simeq \operatorname{Im}\alpha$. Mais B étant semi simple, on a $B = \bigoplus_{i=1}^{r} B_i$ des modules simples, son sous-module $\operatorname{Im}\alpha$ est donc de la forme $\bigoplus_{i\in J} B_i$ avec $J \subset [\![1, k]\!]$. On peut alors définir φ comme α^{-1} sur les B_i pour $i \in J$ et 0 sur les autres, on obtient bien un morphisme de module, inverse à gauche de α par construction. □

Proposition 3.9. *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie abélienne munie d'une structure triangulée, alors $\mathcal{T}$ est semi-simple.*

Démonstration. Soit $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ une suite exacte courte dans $\mathcal{T}$. Par le Lemme 2.6, il suffit de montrer que f admet une rétraction. On considère le translaté du triangle distingué sur f :

$$T^{-1}V \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} V$$

Le Lemme 3.3 nous donne $f \circ u = 0$ et donc $u = 0$ car f est un monomorphisme par exactitude de la suite de départ, d'où le triangle distingué

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} V \xrightarrow{0} TX$$

Et le corollaire 3.5 nous donne alors le résultat. □

Définition 36.

- Soient $(\mathcal{T}_1, T_1, \mathbb{T}_1)$ et $(\mathcal{T}_2, T_2, \mathbb{T}_2)$ deux catégories triangulées. Un ***foncteur de catégorie triangulées*** est la donnée d'un foncteur additif $F : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ et d'un isomorphisme naturel $\eta : FT_1 \to T_2F$ telle que pour tout triangle distingué $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T_1X$ dans $\mathcal{T}_1$ le triangle

  $$FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{\eta_X \circ Fw} T_2FX$$

  soit distingué.
- Soient $(\mathcal{T}, T, \mathbb{T})$ une catégorie triangulée, $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et $F : T \to A$ un foncteur covariant (resp. contravariant), alors on dit que F est un foncteur ***homologique*** (resp. ***cohomologique***) si il envoie tout triangle distingué sur une suite exacte longue.

Exemple. Le foncteur de translation T, muni de la transformation naturelle η donnée par $\eta_X = -1_{T^2X}$ est une auto-équivalence de catégorie triangulées : pour un triangle distingué $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$, le triangle

$$TX \xrightarrow{Tu} TY \xrightarrow{Tv} TZ \xrightarrow{-Tw} T^2X$$

est isomorphe (par $(-1,1,-1)$) au triangle $TX \xrightarrow{-Tu} TY \xrightarrow{-Tv} TZ \xrightarrow{-Tw} T^2X$ qui est distingué par l'axiome de rotation.

Proposition 3.10. *Soit* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ *un triangle distingué et* A *un objet de* $\mathcal{T}$. *Alors on a des suites exactes longues de groupes abéliens.*

$$\ldots \xrightarrow{T^{i-1}w*} \mathrm{Hom}\,(A, T^iX) \xrightarrow{T^iu*} \mathrm{Hom}\,(A, T^iY) \xrightarrow{T^iv*} \mathrm{Hom}\,(A, T^iZ) \xrightarrow{T^iw*} \mathrm{Hom}\,(A, T^{i+1}X) \xrightarrow{T^{i+1}u*} \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{T^{i-1}*w} \mathrm{Hom}\,(T^iX, A) \xrightarrow{T^i*u} \mathrm{Hom}\,(T^iY, A) \xrightarrow{T^i*v} \mathrm{Hom}\,(T^iZ, A) \xrightarrow{T^i*w} \mathrm{Hom}\,(T^{i+1}X, A) \xrightarrow{T^{i+1}*u} \ldots$$

Avec $u* = \mathrm{Hom}\,(A, u)$ *et* $*u = \mathrm{Hom}\,(u, A)$. *Ceci revient à dire que les foncteurs* $\mathrm{Hom}\,(A, -)$ *et* $\mathrm{Hom}\,(-, A)$ *sont respectivement homologiques et cohomologiques.*

Démonstration. Montrons que la première suite est exacte : soit $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(A, Z)$ tel que $\mathrm{Hom}\,(U, w)(\varphi) = w \circ \varphi = 0$. Alors on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \\ 0 \arrow[u, "0"] \arrow[r] & A \arrow[r, "1_A"] & A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r] & 0 \arrow[u, "0"] \end{tikzcd}$$

Et la propriété 3.1 montre qu'il existe $\psi : A \to Y$ tel que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \\ 0 \arrow[u, "0"] \arrow[r] & A \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "1_A"] & A \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r] & 0 \arrow[u, "0"] \end{tikzcd}$$

commute, on a alors $\varphi = v \circ \psi = \mathrm{Hom}\,(A, v)(\psi)$ donc la suite est exacte en $\mathrm{Hom}\,(A, Z)$, car si $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(A, Z)$ est image d'un certain ψ par $\mathrm{Hom}\,(A, v)$, alors $\mathrm{Hom}\,(A, w)(\varphi) = w \circ \varphi = w \circ v \circ \psi = 0$. Par l'axiome de rotation, la suite est exacte partout.
De façon duale, soit $\varphi \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{Hom}\,(u, A)$, alors on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "0"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\varphi"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \arrow[d, "0"] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "1_A"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

qui par la propriété 3.1 peut être complété avec $\psi \in \mathrm{Hom}\,(Z, A)$ pour donner

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "0"] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\psi"] & TX \arrow[d, "0"] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "1_A"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Qui donne le résultat. □

Corollaire 3.11. *Tout foncteur représentable est (co)homologique.*

3.2 Catégories des complexes et catégorie homotopique des complexes

Dans cette section (tirée en priorité de [14]) on tente de fabriquer de bons exemples de catégories triangulées, tout en introduisant quelque outils de théorie de l'homologie. On se donnera par défaut une catégorie abélienne $\mathcal{A}$.

Définition 37. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive, on appelle ***complexe*** sur $\mathcal{A}$ une famille $X = (X_n, d_n^X)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'objets munis de morphismes dans $\mathcal{A}$ tels que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on l'écrit sous la forme

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}^X} X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}^X} X_n \xrightarrow{d_n^X} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}^X} \cdots$$

(Attention, le sens d'écriture est contre-intuitif), les morphismes $d_n^X : X_n \to X_{n-1}$ sont appelé les ***différentielles*** de X.

Pour $X = (X_n, d_n^X)$ et $Y = (Y_n, d_n^Y)$ deux complexes sur $\mathcal{A}$, un ***morphisme de complexes*** est la donnée d'une famille $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de morphismes $f_n : X_n \to Y_n$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}^X"] & X_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^X"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & X_n \arrow[r, "d_n^X"] \arrow[d, "f_n"] & X_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}^X"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}^Y"] & Y_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^Y"] & Y_n \arrow[r, "d_n^Y"] & Y_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}^Y"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ce qui revient à dire qu'un a $f_n \circ d_{n+1}^X = d_{n+1}^Y \circ f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$
Cette notion de morphisme nous permet clairement de définir $C(\mathcal{A})$ la ***catégorie des complexes sur $\mathcal{A}$***, munie des morphismes que nous venons de définir, la composition et les identité étant définies composantes par composantes.

Proposition 3.12. *Pour $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, la catégorie $C(\mathcal{A})$ est abélienne.*

Démonstration. Étape 1 : $C(\mathcal{A})$ est additive : On définit $(f+g) := (f_n+g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, les ensembles de morphismes sont bien des groupes abéliens (comme produits directe de groupes abéliens). La $\mathbb{Z}$-bilinéarité découle rapidement de celle de $\mathcal{A}$: Soient $f : X \to Y$ et $g, h : Y \to G$ deux morphismes dans $C(\mathcal{A})$, pour $n \in \mathbb{Z}$, on a, comme $\mathcal{A}$ est additive :

$$(g + h)_n \circ f_n = (g_n + h_n) \circ f_n = g_n \circ f_n + h_n \circ f_n$$

et donc $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$, les autres conditions se vérifient par la même méthode. Il nous reste donc à montrer que les biproduits finis existent : Soit $(X^i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ une famille de complexes $(X_n^i, d_n^i)_{n\in Z}$. On pose $\bigoplus_{i=1}^k X^i$ comme un complexe dont les objets sont les $\bigoplus_{i=1}^k X_n^i$ et on construit les différentielles $d_n : \bigoplus_{i=1}^k X_n^i \to \bigoplus_{i=1}^k X_{n-1}^i$ par propriété du coproduit : la composition de la différentielle d_n^i par l'injection canonique $X_{n-1}^i \to \bigoplus_{i=1}^k X_{n-1}^i$ nous donne bien un morphisme $X_n^i \to \bigoplus_{i=1}^k X_{n-1}^i$, on pose donc d_n le morphisme $\bigoplus_{i=1}^k X_n^i \to \bigoplus_{i=1}^k X_{n-1}^i$ dont les composantes sont les morphismes ainsi définis, sous forme de matrice, le morphisme d_n s'écrit

$$d_n = \begin{pmatrix} d_n^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_n^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & d_n^k \end{pmatrix}$$

On a alors

$$d_{n-1} \circ d_n = \begin{pmatrix} d^1_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d^2_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & d^k_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^1_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d^2_n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & d^k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on a bien défini un complexe, il reste à montrer qu'il satisfait les propriétés universelles du produit et du coproduit.
Les injections $\iota_{X^i} = (\iota_{X^i_n})_{n\in\mathbb{Z}} : X^i \to \bigoplus_{i=1}^k X^i$ en fait un candidat au coproduit.
Les projections $\pi_{X^i} = (\pi_{X^i_n})_{n\in\mathbb{Z}} : \bigoplus_{i=1}^k X^i \to X^i$ en fait un candidat au produit.
Soit $Z = (Z_n, d^Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un complexe et $f_i : X^i \to Z$ des morphismes de complexes. L'unique morphisme de complexes $f : \bigoplus_{i=1}^k X^i \to Z$ satisfaisant $f \circ \iota_{X^i} = f_i$ est obtenu composantes par composantes par la propriété universelle du coproduit, on procède de même pour le produit.

Étape 2 : $C(\mathcal{A})$ est pré-abélienne : Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $C(\mathcal{A})$. Toutes ses composantes f_n sont des morphisme dans la catégorie abélienne $\mathcal{A}$, et donc admettent K_n des noyaux, donnés avec ι_n des injections canoniques. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, comme f est un morphisme de complexes, on a

$$f_{n-1} \circ d^X_n \circ \iota_n = d^Y_n \circ f_n \circ \iota_n = 0$$

Donc $d^X_n \circ \iota_n$ est un morphisme annulateur de f_{n-1} et par propriété universelle du noyau, il existe un unique morphisme $d^K_n : K_n \to K_{n-1}$ tel que $\iota_{n-1} \circ d^K_n = d^X_n \circ \iota_n$. On note que

$$\iota_{n-1} \circ d^K_n \circ d^K_{n+1} = d^X_n \circ \iota_n \circ d^K_{n+1} = d^X_n \circ d^X_{n+1} \circ \iota_{n+1} = 0$$

puisque X est un comlexe. Par unicité du morphisme dans la propriété universelle de K_{n-1}, on a alors $d^K_n \circ d^K_{n+1} = 0$ (car 0 est un morphisme qui convient dans le diagramme de la propriété universelle). On a donc que $K = (K_n, d^K_n)$ est bien un complexe, en combinant les propriétés universelle des noyaux, on trouve facilement que ce complexe est le noyau du morphisme f, on raisonne de manière duale pour les conoyaux. Donc $C(\mathcal{A})$ est bien pré-abélienne.

Étape 3 : $C(\mathcal{A})$ est abélienne : On montre la condition de A. Grothendieck (équivalente à notre définition par la proposition 2.10). L'important est de considérer qu'un morphisme de complexes $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} : X \to Y$ est un isomorphisme si et seulement si les f_n sont tous des isomorphismes : Si tel est le cas, les f_n ont des inverses g_n qui forment un morphisme de complexes : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$d^X_{n+1} \circ g_{n+1} = g_n \circ f_n \circ d^X_{n+1} \circ g_{n+1} = g_n \circ d^Y_{n+1} \circ f_{n+1} \circ g_{n+1} = g_n \circ d^Y_{n+1}$$

l'implication réciproque est claire.
On considère ensuite le morphisme naturel $\gamma : \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$, par l'étape 2, ce morphisme est donné par γ_n les morphismes naturels $\operatorname{Coim} f_n \to \operatorname{Im} f_n$, mais ces morphismes sont des isomorphismes car $\mathcal{A}$ est abélienne, donc γ est bien un isomorphisme.

$\square$

À présent, on va construire la catégorie homotopique des complexes, qui aura pour intérêt d'être triangulé, on va pour cela définir une notion d'homotopie entre les morphismes entres complexes :

<u>Définition</u> 38. Soient $f, g : X \to Y$ des morphismes dans $C(\mathcal{A})$, on dit que f et g sont ***homotopes*** si il existe des morphismes $s_n : X_n \to Y_{n+1}$ dans $\mathcal{A}$ (appelés ***morphismes d'homotopie***) tels qu'on ait, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$f_n - g_n = d^Y_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d^X_n$$

Pour mieux se représenter la situation, on peut considére le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d^X_{n+2}"] & X_{n+1} \arrow[r, "d^X_{n+1}"] \arrow[d, bend right, "g_{n+1}"'] \arrow[d, bend left, "f_{n+1}"] \arrow[dl, "s_{n+1}"'] & X_n \arrow[r, "d^X_n"] \arrow[d, bend right, "g_n"'] \arrow[d, bend left, "f_n"] \arrow[dl, "s_n"] & X_{n-1} \arrow[r, "d^X_{n-1}"] \arrow[d, bend right, "g_n"'] \arrow[d, bend left, "f_{n-1}"] \arrow[dl, "s_{n-1}"] & \cdots \arrow[dl, "s_{n-2}"] \\
\cdots \arrow[r, "d^Y_{n+2}"'] & Y_{n+1} \arrow[r, "d^Y_{n+1}"'] & Y_n \arrow[r, "d^Y_n"'] & Y_{n-1} \arrow[r, "d^Y_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Attention cependant, <u>ce diagramme n'est pas commutatif</u> il sert juste à se représenter les points de départ et d'arrivée des différents morphismes.
On notera $f \sim g$ la relation d'homotopie. En particulier si $g = 0$, on dit que f est un morphisme ***homotope à zéro***.

On vérifie sans peine que $\sim$ définit une relation d'équivalence sur un ensemble de morphismes $\mathrm{Hom}\,(X, Y)$. De plus, pour deux morphismes $f, g : X \to Y$ homotopes, et $\alpha : W \to X$ un morphisme quelconque de complexes, alors on a $f\alpha \sim g\alpha$, les morphismes d'homotopie étant donnés pas $s_n\alpha_n : W_n \to Y_{n+1}$:

$$(f_n - g_n) \circ \alpha = (d^Y_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d^X_n) \circ \alpha_n = d^Y_{n+1} \circ (s_n \circ \alpha_n) + s_{n-1} \circ \alpha_{n-1} \circ d^W_n$$

car $\alpha = (\alpha_n)$ est un morphisme de complexes. De la même manière, on a $\beta f \sim \beta g$ pour $\beta : Y \to W$. Ceci entraîne que l'on peut composer des classes d'équivalences sous la relation $\sim$ en choisissant des représentants, on aura pas de problèmes de définition : donc la définition suivante a bien un sens :

<u>Définition</u> 39. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. On pose $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ la ***catégorie homotopique des complexes***. Elle a les mêmes objets que $C(\mathcal{A})$ et les morphismes sont les classes d'équivalence de morphismes de $C(\mathcal{A})$ par l'homotopie :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y) /_{\sim}$$

La composition est définie en choisissant des représentants : $[f] \circ [g] := [f \circ g]$

<u>Proposition</u> 3.13. *Pour $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, la catégorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ est additive.*

Démonstration. On pose $[f]+[g]=[f+g]$, est-ce bien défini ? soient $f' \sim f$ et $g' \sim g$ par des morphismes d'homotopie s_n et σ_n (respectivement). On veut montrer $f'+g' \sim f+g$. On a

$$(f'+g')-(f+g) = (f'-f)+(g'-g) = d^Y_{n+1}\circ s_n + s_{n-1}\circ d^X_n + d^Y_{n+1}\circ \sigma_n + \sigma_{n-1}\circ d^X_n$$
$$= d^Y_{n+1}\circ (s_n+\sigma_n) + (s_{n-1}+\sigma_{n-1})\circ d^X_n$$

notre addition est donc bien définie, elle conserve clairement la structure $\mathbb{Z}$-linéaire de celle sur $C(\mathcal{A})$.
Pour ce qui est des biproduits, on se donne $(X^i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ une famille de complexes, le complexe $\bigoplus_{i=1}^k X^i$ qui donne le biproduit dans $C(\mathcal{A})$ est aussi un objet de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, les classes des morphismes ι_{X^i} et π_{X^i} en font toujours un candidat au biproduit, et les classes des morphismes f et g donnés par la propriété universelle du biproduit dans $C(\mathcal{A})$ donnent l'existence de morphismes faisant commuter le diagramme du biproduit dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, il reste à montrer l'unicité : soient respectivement f' et g' faisant aussi commuter le diagramme de la propriété universelle dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, on obtient directement une homotopie entre f et f', et entre g et g'. □

Nous allons maintenant munir la catégorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ d'une structure de catégorie triangulée, a défaut d'avoir une catégorie abélienne (dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, les noyaux n'existent pas forcément : on perd l'unicité du morphisme de la propriété universelle, l'argument est exposé plus en détail dans [14]).

Définition 40. Dans $C(\mathcal{A})$, on construit un foncteur de translation, noté [1] qui 'décale' les complexes d'un cran vers la gauche. Plus spécifiquement, pour $X=(X_n, d^X_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in C(\mathcal{A})$, on pose

$$X[1] = (X[1]_n, d^{X[1]}_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (X_{n-1}, -d^X_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

Et pour un morphisme de complexes $f=(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on pose

$$f[1] = (f[1]_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (f_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

Remarque. Le signe apparaissant sur $d^{X[1]}_n$ peut sembler arbitraire, mais il prendra son sens plus tard pour la structure triangulée de la catégorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

On vérifie facilement que notre foncteur [1] est un foncteur additif, doublé d'un automorphisme. De plus, ce foncteur induit bien un foncteur additif automorphisme sur $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ (il conserve bien les classes d'homotopies).
Une fois notre foncteur de translation définie, la prochaine étape est de fixer la classe des triangles distingués, pour ce faire, on aura grand besoin de la notion de cône d'un morphisme :

Définition 41. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de complexes, le ***cône de morphisme*** $M(f)$ est le complexe sur $\mathcal{A}$ défini par :

$$M(f)_n := X_{n-1}\oplus Y_n \quad \text{et} \quad d^{M(f)}_n := \begin{pmatrix} -d^X_{n-1} & 0 \\ f_{n-1} & d^Y_n \end{pmatrix}$$

Remarque. On a des morphismes canoniques $\alpha(f) : Y \to M(f)$ et $\beta(f) : M(f) \to X[1]$ définis par

$$\alpha(f)_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y_n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta(f)_n = \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

Notons que $\beta(f)$ est un morphisme de complexes car $d_n^{X[1]}$ possède un signe. Par les définitions ci-dessus, on obtient la suite exacte courte de complexes suivante :

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1] \longrightarrow 0$$

Cette suite exacte courte se scinde si et seulement si le morphisme f est homotope à 0 par un morphisme d'homotopie s_n, la rétraction de $\beta(f)$ serait alors donnée par $\sigma = (\sigma_n) : X[1] \to M(f)$ avec $\sigma_n = \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} \\ -s_n \end{pmatrix}$

Exemple.

- Si f est le morphisme $X \to 0$, alors $M(f) = X[1]$ et si g est le morphisme $0 \to Y$, alors $M(g) = Y$.
- Soient $A, B \in \mathcal{A}$, on considère les ***complexes associés à*** A et B, c'est à dire que l'on voit A et B comme des complexes X_A avec $X_{A0} = A$ et tous les autres $X_{An} = 0$ et les différentielles sont les seuls morphismes possibles. Alors tout morphisme $f : A \to B$ induit un morphisme de complexe $F : X_A \to X_B$, son cône de morphisme est le complexe

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

  Où $A = M(F)_1$ et $B = M(F)_0$.
- Pour tout complexe $X = (X_n, d_n^X)$, le cône $M(1_X)$ est le complexe donné par

$$M(1_X) = \left(X_{n-1} \oplus X_n, \begin{pmatrix} -d_{n-1}^X & 0 \\ 1_{X_{n-1}} & d_n^X \end{pmatrix} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

  et l'identité sur ce cône de morphisme est homotope à zéro par le morphisme d'homotopie $s = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ donné par $\begin{pmatrix} 0 & 1_{X_n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: en effet, $1_{M(1_{X_n})} = d_{n+1}^{M(1_X)} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n^{M(1_X)}$ car on a :

$$\begin{pmatrix} -d_n^X & 0 \\ 1_{X_n} & d_{n+1}^X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{X_n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1_{X_{n-1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{n-1}^X & 0 \\ 1_{X_{n-1}} & d_n^X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} & -d_n^X + d_n^X \\ 0 & 1_{X_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1_{X_n} \end{pmatrix}$$

  ainsi dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, on a $1_{M(1_X)} = 0$ donc $M(1_X)$ est isomorphe au complexe nul dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

On vérifie sans problèmes que $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ sont bien définies dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ (ils ne dépendent que de la classe d'homotopie de f), ce qui nous permet de donner la définition suivante :

Définition 42. Une suite d'objets et morphismes dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ de la forme

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$$

est appelée ***triangle standard***.
On pose alors $\mathbb{T}$ la classe des triangles isomorphes dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ a un triangle standard.

Théorème 5. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Alors la catégorie $(\mathcal{K}(\mathcal{A}), [1], \mathbb{T})$ est une catégorie triangulée.*

Démonstration. Il s'agit de vérifier les axiomes un par un, ce qui est assez long mais ne fait pas appel à des arguments trop techniques :
Pour justifier **l'axiome TR1** : les triangles distingués sont stables par isomorphisme du fait de leur définition. Par la remarque précédente, on a $M(1_X) \simeq 0$, donc le triangle $X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$ est bien isomorphe à un triangle standard. Et par définition de $M(f)$, un morphisme $f : X \to Y$ s'intègre toujours dans un triangle standard, donc distingué.
Par stabilité sous isomorphisme, il suffit ensuite de montrer **l'axiome de rotation** sur les triangles standards, considérons donc $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$ un triangle standard, nous allons montrer que les triangles

$$Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1] \qquad \text{et} \qquad Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\alpha(\alpha(f))} M(\alpha(f)) \xrightarrow{\beta(\alpha(f))} Y[1]$$

Sont isomorphes dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, on travaille donc à homotopie près.
Pour construire notre isomorphisme, on considère les morphismes de triangles $(1_Y, 1_{M(f)}, \phi)$ et $(1_Y, 1_{M(f)}, \psi)$ où $\phi : X[1] \to M(\alpha(f))$ et $\psi : M(\alpha(f)) \to X[1]$ sont définis par

$$\phi_n = \begin{pmatrix} -f_{n-1} \\ 1_{X_{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \psi_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{X_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

On doit montrer qu'il s'agit bien de morphismes de triangles : d'un côté, on a bien $\beta(\alpha(f)) \circ \phi = -f[1]$, et de l'autre, on a seulement une homotopie entre $\phi \circ \beta(f)$ et $\alpha(\alpha(f))$, homotopie donné par les morphismes d'homotopie

$$s_n = \begin{pmatrix} 0 & -1_{Y_n} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : M(f)_n \to M(\alpha(f))_{n+1}$$

En effet, on a

$$(\phi \circ \beta(f))_n - \alpha(\alpha(f)) = \begin{pmatrix} -f_{n-1} \\ 1_{X_{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1_{Y_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -f_{n-1} & 0 \\ 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1_{Y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1_{Y_n} \end{pmatrix}$$

et

$$d_{n+1}^{M(\alpha(f))} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n^{M(f)} = \begin{pmatrix} -d_n^Y & 0 & 0 \\ 0 & -d_n^X & 0 \\ 1_{Y_n} & f_n & d_{n+1}^Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1_{Y_n} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1_{Y_{n-1}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_{n-1}^X & 0 \\ f_{n-1} & d_n^Y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & d_n^Y \\ 0 & 0 \\ 0 & -1_{Y_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f_{n-1} & -d_n^Y \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1_{Y_n} \end{pmatrix}$$

De la même manière, ψ est un morphisme de triangles car $\beta(f) = \psi \circ \alpha(\alpha(f))$ par définition, et $-f[1] \circ \psi \sim \beta(\alpha(f)$ par l'homotopie $(0\ 0\ -1_{X_n}) : M(\alpha(f))_n \to Y[1]_n$. Enfin ces morphismes sont des isomorphismes dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ car $\psi \circ \phi = 1_{X[1]}$ (par définition) et $\phi \circ \psi \sim 1_{M(\alpha(f))}$ par les morphismes d'homotopie

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1_{Y_{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : M(\alpha(f))_n \to M(\alpha(f))_{n+1}$$

Enfin, montrons **l'axiome de l'octahèdre** soit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "u"] & \\ Z & & Y \arrow[ll, "v"] \end{tikzcd}$$

On a les triangles distingué

- $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\alpha(u)} M(u) \xrightarrow{\beta(u)} X[1]$
- $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{\alpha(v)} M(v) \xrightarrow{\beta(v)} Y[1]$
- $X \xrightarrow{w} Z \xrightarrow{\alpha(w)} M(w) \xrightarrow{\beta(w)} X[1]$

Il reste à construire les morphismes $f : M(u) \to M(w)$, $g : M(w) \to M(v)$ et $h : M(v) \to M(u)[1]$ qui conviennent : on pose

$$f_n = \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & v_n \end{pmatrix} \qquad g_n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} \qquad h_n = \alpha(u)[1] \circ \beta(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie immédiatement les relations de commutativité (elle sont vraies dans $C(\mathcal{A})$, pas besoin d'avoir recours à des homotopies). Il ne reste plus qu'à montrer que le triangle

$$M(u) \xrightarrow{f} M(x) \xrightarrow{g} M(v) \xrightarrow{h} M(u)[1]$$

est distingué, pour ce faire, on va construire un isomorphisme (dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$) entre ce triangle et le triangle standard

$$M(u) \xrightarrow{f} M(w) \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} M(u)[1]$$

On recherche donc des morphismes de triangles de la forme $(1_{M(u)}, 1_{M(w)}, \sigma)$ et $(1_{M(u)}, 1_{M(w)}, \tau)$, étant inverses l'un de l'autre. Donc les morphisme σ et τ doivent donc respecter (dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$) :

$$\begin{array}{lll} \sigma \circ g = \alpha(f) & \beta(f) \circ \sigma = h & \tau \circ \sigma = 1_{M(v)} \\ g = \tau \circ \alpha(f) & \beta(f) = h \circ \tau & \sigma \circ \tau = 1_{M(f)} \end{array}$$

On pose

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \tau_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_{n-1}} & u_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix}$$

On obtient directement

$$(\tau \circ \alpha(f))_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{Y_{n-1}} & u_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} = g_n$$

$$(\beta(f) \circ \sigma)_n = \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{Y_{n-1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{Y_{n-1}} & 0 \end{pmatrix} = h_n$$

En revanche, les autres relations ne tiendrons qu'à l'aide d'une homotopie : On va montrer que $\alpha(f)$ est homotope à $\sigma \circ g$, par les morphismes d'homotopie donnés par $s_n = \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} :$ $M(w)_n \to M(f)_{n+1}$. On a

$$(\alpha(f) - \sigma \circ g)_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -u_{n-1} & 0 \\ 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et en notant que

$$d_n^{M(f)} = \begin{pmatrix} -d_{n-2}^X & 0 & 0 & 0 \\ -u_{n-2} & -d_{n-1}^Y & 0 & 0 \\ 1_{X_{n-2}} & 0 & -d_{n-1}^X & 0 \\ 0 & v_{n-1} & w_{n-1} & d_n^Z \end{pmatrix}$$

On vérifie directement qu'on a bien l'homotopie voulue :

$$d_{n+1}^{M(f)} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n^{M(w)} = \begin{pmatrix} -d_{n-1}^X & 0 & 0 & 0 \\ -u_{n-1} & -d_n^Y & 0 & 0 \\ 1_{X_{n-1}} & 0 & -d_n^X & 0 \\ 0 & v_n & w_n & d_{n+1}^Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1_{X_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{n-1}^X & 0 \\ w_{n-1} & d_n^Z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -d_{n-1}^X & 0 \\ -u_{n-1} & 0 \\ 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{n-1}^X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -u_{n-1} & 0 \\ 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la même manière, on obtient que $\beta(f)$ est homotope à $h \circ \tau$ par les morphismes d'homotopie $s_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : M(f)_n \to M(u)[1]_{n+1}$.

Il ne reste plus qu'à montrer que σ et τ sont des isomorphismes dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, on a déjà $\tau \circ \sigma = 1_{M(v)}$ par définition, et réciproquement, on a

$$(\sigma \circ \tau)_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{Y_{n-1}} & u_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{Z_n} \end{pmatrix}$$

Si l'on pose les morphismes d'homotopie par $s_n : M(f)_n \to M(f)_{n+1}$ par

$$s_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors on a à nouveau $\sigma \circ \tau \sim 1_{M(f)}$. On a donc bien que $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ est une catégorie triangulée. $\square$

Remarque. Nous avons donné une preuve 'directe' du fait que $\mathcal{K}(A)$ était une catégorie triangulée, une autre façon de voir ce résultat et de considérer $K(A)$ comme la catégorie stable d'une catégorie de Frobenius : la catégorie $C(\mathcal{A})$, munie des suites exactes courtes quasi-scindées (au sens ou les morphismes qui la composent sont scindés en tout leur degrés, mais pas forcément scindés en tant que morphismes de complexes) [20].

Remarque. On a vu que tout triangle standard $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ donnait une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1] \longrightarrow 0$$

dans $C(\mathcal{A})$. Cependant, toute suite exacte courte dans $C(\mathcal{A})$ ne donne pas de triangle distingué dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$: Par exemple, considérons la suite exacte courte suivante dans $\mathfrak{Ab}$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

On considère chaque objet comme son complexe associé, et on montre qu'on ne peut en obtenir un triangle distingué dans $\mathcal{K}(\mathfrak{Ab})$, supposons par l'absurde l'existence d'un tel triangle :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{v} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{w} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[1]$$

Les morphismes dans $\mathcal{K}(\mathfrak{Ab})$ sont des classes déquivalence de morphismes de complexes sous la relation d'homotopie. Comme le seul élément non nul du complexe associé à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'élément de degré 0, et le seul du complexe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[1]$ est celui de degré 1, il n'y a pas de morphisme de complexes non nul entre ces deux complexes. On doit donc avoir $w = 0$ et par la propriété 3.4, le triangle est scindé dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, on reprend la preuve du lemme 2.6 pour avoir $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, mais comme le seul élément non nul de chacun de ces complexes est celui de degré 0, les seuls morphismes d'homotopie possible sont les morphismes nuls, on doit donc avoir des isomorphismes déjà dans $C(\mathcal{A})$, et donc en particulier $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathfrak{Ab}$, ce qui est faux.

20. On remarque que cette catégorie est exacte au sens de [12], mais pas au sens de [11]

3.3 Localisation, catégorie dérivée

Nous avons vu qu'une suite exacte courte dans $C(\mathcal{A})$ ne donnait pas forcément un triangle distingué dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, c'est pour contrer ce problème que l'on introduit les catégories dérivées, qui vont être construite via une méthode qui généralise aux catégories la localisation dans les anneaux : on va chercher à 'inverser' une certaine classe d'éléments, ici de morphismes.

3.3.1 Localisation dans les catégories

Cette section assez théorique donne une introduction a la construction des catégories localisées, elle est dans quasi totalité issue de [16], et comprend d'ailleurs certains résultat admis, dont une preuve est donnée dans [16]. Par défaut, on considèrera $\mathcal{C}$ une catégorie.

Définition 43. Soit S une collection (classe) de morphismes dans $\mathcal{C}$. Une ***localisation*** de $\mathcal{C}$ par rapport à S est une catégorie, notée $S^{-1}\mathcal{C}$ munie d'un foncteur $L : \mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ tels que :

- L'image $L(s)$ de tout morphisme s dans S est un isomorphisme dans $S^{-1}\mathcal{C}$.
- Tout autre candidat $\mathcal{D}$ muni d'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ qui respecterait le premier point se factorise de manière unique à travers L :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "L"'] & \mathcal{D} \\ S^{-1}\mathcal{C} \arrow[ur, dashed, "\exists! G"'] & \end{tikzcd}$$

En fait, nous avons ici donné une propriété universelle dans la catégorie des catégories. Donc la catégorie dérivée, si elle existe, est unique à unique isomorphisme de catégorie près [21].
Bien-sûr, ce qui nous intéresse relève de l'existence d'une telle catégorie, munie d'un tel foncteur. Pour cela nous allons avoir besoin d'un certain nombre de conditions sur S, la première de ces conditions est d'avoir est un système multiplicatif dans le sens suivant.

Définition 44. Une collection S de morphismes dans $\mathcal{C}$ est un ***système multiplicatif*** si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (Stabilité) : La composition de morphismes de S est encore dans S, et S contient les identitées.
- (Condition d'Ore) : Soit $t : Z \to Y$ un morphisme de S, alors pour tout morphisme $g : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$, il existe $s : W \to X$ de S et $f : W \to Z$ dans $\mathcal{C}$ des morphismes tels que le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, dashed, "s"'] & Z \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

- (Simplification) : Si $f, g : X \to Y$ sont dans $\mathcal{C}$ alors on a équivalence entre :
  (a) $\exists s \in S \mid sf = sg$
  (b) $\exists t \in S \mid ft = gt$

À présent, comme pour la localisation dans les anneaux, on va définir l'équivalent des 'fractions' : Une chaîne dans $\mathcal{C}$ de la forme

$$X \xleftarrow{s} Z_1 \xrightarrow{f} Y$$

avec $s \in S$ est appelée ***fraction à droite***, et est notée fs^{-1} ou encore (s, f).

21. En fait, il s'agit d'avantage d'une propriété universelle dans la 2-catégorie des catégories

Ensuite, on veut une notion d'équivalence de fractions : on dira qu'une fraction $X \xleftarrow{s} Z_1 \xrightarrow{f} Y$ est ***recouverte*** par une autre fraction $X \xleftarrow{u} Z_3 \xrightarrow{h} Y$ si il existe $\sigma : Z_3 \to Z_1$ (quelconque) faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& Z_1 \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & Z_3 \arrow[l, "u"'] \arrow[u, "\sigma"'] \arrow[r, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

Et donc deux fractions $X \xleftarrow{s} Z_1 \xrightarrow{f} Y$ et $X \xleftarrow{t} Z_2 \xrightarrow{g} Y$ seront dite ***équivalentes*** si elles sont recouvertes par une même troisième, ce qui donne un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{tikzcd}
& Z_1 \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & Z_3 \arrow[l, "u"'] \arrow[u, "\tau"'] \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma"] & Y \\
& Z_2 \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

(on dit que les deux fractions sont communément recouvertes par la troisième).
Il s'agit maintenant de vérifier qu'on a bien là une relation d'équivalence, la réflexivité et la symétrie sont claires par définition (on note qu'une fraction se recouvre toujours elle-même avec $\sigma = 1_{Z_1}$). Pour la transitivité, supposons $f_1 s_1^{-1} \sim f_2 s_2^{-1} \sim f_3 s_3^{-1}$, on a donc deux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
& Z_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
X & Z_{1,2} \arrow[l, "s"'] \arrow[u, "\tau"'] \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\sigma"] & Y \\
& Z_2 \arrow[ul, "s_2"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
& Z_2 \arrow[dl, "s_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X & Z_{2,3} \arrow[l, "s'"'] \arrow[u, "\tau'"'] \arrow[r, "t'"] \arrow[d, "\sigma'"] & Y \\
& Z_3 \arrow[ul, "s_3"] \arrow[ur, "f_3"'] &
\end{tikzcd}$$

Par la condition d'Ore appliquée à $s' : Z_{2,3} \to X$ dans S et $s : Z_{1,2} \to X$, il existe un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Z_{2,3} \arrow[d, "s'"] \\
Z_{1,2} \arrow[r, "s"'] & X
\end{tikzcd}$$

avec $\beta \in S$. On pose $u := \tau \circ \beta$ et $v := \sigma' \circ \alpha$. On a

$$s_2 \circ u = s_2 \circ \tau \circ \beta = s \circ \beta = s' \circ \alpha = s_2 \circ \sigma' \circ \alpha = s_2 \circ v$$

Par condition de simplification, il existe alors $w : Z_{1,2,3} \to T$ dans S tel que $u \circ w = v \circ w$. Posons ensuite $x := \sigma \circ \beta \circ w$ et $y = \tau' \circ \alpha \circ w$, on a alors

$$s_1 \circ x = s_1 \circ \sigma \circ \beta \circ w = s \circ \beta \circ w = s' \circ \alpha \circ w = s_3 \circ \tau' \circ \alpha \circ w = s_3 \circ y$$

Comme s, β et w sont dans S, la stabilité donne $s_1 \circ x = s_3 \circ y \in S$. De plus, il vient

$$f_3 \circ y = f_3 \circ \tau' \circ \alpha \circ w = t' \circ \alpha \circ w = f_2 \circ \sigma' \circ \alpha \circ w = f_2 \circ v \circ w$$

$$= f_2 \circ u \circ w = f_2 \circ \tau \circ \beta \circ w = t \circ \beta \circ w = f_1 \circ \sigma \circ \beta \circ w = f_1 \circ x$$

Donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
X & Z_{1,2,3} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "x"'] \arrow[d, "y"] & Y \\
 & Z_3 \arrow[ul, "s_3"] \arrow[ur, "f_3"'] &
\end{tikzcd}$$

d'où $f_1 s_1^{-1} \sim f_3 s_3^{-1}$. On appelle $\mathrm{Hom}_S(X,Y)$ l'ensemble des classes d'équivalences sous cette relation, malheureusement, il n'y a pas à priori de raison pour qu'il s'agisse bien d'un ensemble, on aura pour cela besoin d'une nouvelle condition sur S.

Définition 45. Un système multiplicatif S est dit ***localement petit*** (à droite) si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe une famille S_X de morphismes de S, tous de codomaine X, tels que pour tout morphisme $f : X_1 \to X$ dans S, il existe un morphisme $g : X_2 \to X_1$ dans $\mathcal{C}$ tel que $fg \in S_X$. (en quelque sorte un système absorbant).

Lemme 3.14. *Si S est un système multiplicatif localement petit, alors* $\mathrm{Hom}_S(X,Y)$ *est un ensemble pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$*

Démonstration. Admis ici, la preuve déploie des arguments que nous n'avons pas défini ici, on pourra consulter [16]. □

On va maintenant munir les ensembles $\mathrm{Hom}_S(X,Y)$ d'une loi de composition : Pour composer $X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xleftarrow{t} Z' \xrightarrow{g} Y$, on trouve par condition d'Ore appliquée à $t \in S$ et f, un objet Z'', $u : Z'' \to Z$ dans S et $h : Z'' \to Z'$ faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & Z'' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
 & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"'] & & Z' \arrow[dl, "t"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & W
\end{tikzcd}$$

On définit alors la composition comme $X \xleftarrow{s \circ u} Z'' \xrightarrow{g \circ h} W$ (on note premièrement que les domaines et codomaines sont bien ceux attendus).
Il nous faut maintenant montrer que cette composition convient dans ce que l'on souhaite :

Théorème 6. *Soit S un système multiplicatif localement petit dans une catégorie $\mathcal{C}$. Alors la classe des objets de $\mathcal{C}$, munie des ensembles $\operatorname{Hom}_S(X,Y)$ et de la composition que nous avons défini forme une catégorie localement petite.*

Démonstration. Il s'agit surtout de montrer que la composition est bien définie : soient deux fractions

$$X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{f} Y \quad \text{et} \quad Y \xleftarrow{t} Z' \xrightarrow{g} W$$

recouvertes respectivement par

$$X \xleftarrow{\widehat{s}} \widehat{Z} \xrightarrow{\widehat{f}} Y \quad \text{et} \quad Y \xleftarrow{\widetilde{t}} \widetilde{Z}' \xrightarrow{\widetilde{g}} W$$

On montre alors que la composition des fractions couvrantes recouvre la première composition (on aura pas tout a fait terminé, car deux fractions peuvent être équivalentes sans que l'une recouvre l'autre).
On illustre la situation par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{Z} \arrow[ddl, "\widehat{s}"'] \arrow[d] \arrow[ddrr, "\widehat{f}"] & & Z'' \arrow[dll, "u"'] \arrow[drr, "h"] & & \widetilde{Z}' \arrow[ddll, "\widehat{t}"'] \arrow[d] \arrow[ddr, "\widehat{g}"] & \\
 & Z \arrow[dl, "s"] \arrow[drr, "f"'] & & & & Z' \arrow[dll, "t"] \arrow[dr, "g"'] & \\
X & & & Y & & & W
\end{tikzcd}$$

On applique la condition d'Ore à $\widehat{Z} \to Z$ et $Z'' \to Z$, ainsi qu'à $Z'' \to Z'$ et $\widetilde{Z}' \to Z'$, pour obtenir $\widehat{Z} \xleftarrow{\widehat{v}} \widehat{\widehat{Z}} \xrightarrow{\widehat{w}} Z''$ avec $v \in S$, et $Z'' \xleftarrow{\widetilde{v}} \widetilde{\widetilde{Z}} \xrightarrow{\widetilde{w}} \widetilde{Z}'$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & \widehat{\widehat{Z}} \arrow[dl, "\widehat{v}"'] \arrow[dr, "\widehat{w}"] & & \widetilde{\widetilde{Z}} \arrow[dl, "\widetilde{v}"'] \arrow[dr, "\widetilde{w}"] & & \\
 & \widehat{Z} \arrow[ddl, "\widehat{s}"'] \arrow[d] \arrow[ddrr, "\widehat{f}"] & & Z'' \arrow[dll, "u"'] \arrow[drr, "h"] & & \widetilde{Z}' \arrow[ddll, "\widehat{t}"'] \arrow[d] \arrow[ddr, "\widehat{g}"] & \\
 & Z \arrow[dl, "s"] \arrow[drr, "f"'] & & & & Z' \arrow[dll, "t"] \arrow[dr, "g"'] & \\
X & & & Y & & & W
\end{tikzcd}$$

En appliquant une fois de plus la condition d'Ore, on trouve $\widehat{\widehat{Z}} \xleftarrow{v} \widehat{\widetilde{Z}} \xrightarrow{w} \widetilde{\widetilde{Z}}$ avec $v \in S$ et tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widehat{\widetilde{Z}} \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "w"] & & & \\
 & & \widehat{\widehat{Z}} \arrow[dl, "\widehat{v}"'] \arrow[dr, "\widehat{w}"] & & \widetilde{\widetilde{Z}} \arrow[dl, "\widetilde{v}"'] \arrow[dr, "\widetilde{w}"] & & \\
 & \widehat{Z} \arrow[ddl, "\widehat{s}"'] \arrow[d] \arrow[ddrr, "\widehat{f}"] & & Z'' \arrow[dll, "u"'] \arrow[drr, "h"] & & \widetilde{Z}' \arrow[ddll, "\widehat{t}"'] \arrow[d] \arrow[ddr, "\widehat{g}"] & \\
 & Z \arrow[dl, "s"] \arrow[drr, "f"'] & & & & Z' \arrow[dll, "t"] \arrow[dr, "g"'] & \\
X & & & Y & & & W
\end{tikzcd}$$

Ainsi, $X \longleftarrow Z'' \longrightarrow W$ est recouverte par $X \longleftarrow \widehat{\widetilde{Z}} \longrightarrow W$ comme voulu.
Maintenant de manière générale, si on a $(\ X \longleftarrow Z \longrightarrow Y\ ) \sim (\ X \longleftarrow \underline{Z} \longrightarrow Y\ )$ et $(\ X \longleftarrow Z' \longrightarrow Y\ ) \sim (\ X \longleftarrow \underline{Z'} \longrightarrow Y\ )$, respectivement par des fractions $(\ X \longleftarrow \widehat{Z} \longrightarrow Y\ )$ et $(\ Y \longleftarrow \tilde{Z}' \longrightarrow W\ )$. Par le même raisonnement que précédemment, on obtient $X \longleftarrow \underline{\widetilde{\widehat{Z}}} \longrightarrow W$ qui recouvre $X \longleftarrow \underline{Z''} \longrightarrow W$ la deuxième composition. Par condition d'Ore, on obtient un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\widetilde{Z}} \arrow[d] \\
\underline{\widetilde{\widehat{Z}}} \arrow[r] & \widehat{Z}
\end{tikzcd}$$

avec $T \to \widehat{\widetilde{Z}}$ dans S et on a donc la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
 & Z'' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X & T \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & W \\
 & \underline{Z''} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

d'où $(\ X \longleftarrow Z'' \longrightarrow W\ ) \sim (\ X \longleftarrow \underline{Z''} \longrightarrow W\ )$.
Il reste à montrer l'associativité, ce qui se fait aussi à l'aide de la condition d'Ore : Soient $V \xleftarrow{s_1} Z_1 \xrightarrow{f_1} W$, $W \xleftarrow{s_2} Z_2 \xrightarrow{f_2} X$ et $X \xleftarrow{s_3} Z_3 \xrightarrow{f_3} Y$ trois fractions, par notre construction de la composition, on trouve le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & Z_{1,2} \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & & Z_{2,3} \arrow[dl, "u'"'] \arrow[dr, "h'"] & & \\
 & Z_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"'] & & Z_2 \arrow[dl, "s_2"] \arrow[dr, "f_2"] & & Z_3 \arrow[dl, "s_3"'] \arrow[dr, "f_3"] & \\
V & & W & & X & & Y
\end{tikzcd}$$

Par condition d'Ore appliquée à h et u', on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & Z_{1,2,3} \arrow[dl, "u''"'] \arrow[dr, "h''"] & & & \\
 & & Z_{1,2} \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "h"] & & Z_{2,3} \arrow[dl, "u'"'] \arrow[dr, "h'"] & & \\
 & Z_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"'] & & Z_2 \arrow[dl, "s_2"] \arrow[dr, "f_2"] & & Z_3 \arrow[dl, "s_3"'] \arrow[dr, "f_3"] & \\
V & & W & & X & & Y
\end{tikzcd}$$

Avec $u'' \in S$, mais alors, on peut réecrire les diagrammes suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & Z_{1,2,3} \arrow[dl, "u \circ u''"'] \arrow[dr, "h''"] & \\
Z_1 \arrow[d, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"'] & & Z_{2,3} \arrow[dl, "s_2 \circ u'"] \arrow[d, "f_3 \circ h'"] \\
V & W & Y
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & Z_{1,2,3} \arrow[dl, "u''"'] \arrow[dr, "h' \circ h''"] & \\
Z_{1,2} \arrow[d, "s_1 \circ u"'] \arrow[dr, "f_2 \circ h"'] & & Z_3 \arrow[dl, "s_3"] \arrow[d, "f_3"] \\
V & X & Y
\end{tikzcd}$$

Qui donnent respectivement les compositions $f_1s_1^{-1} \circ (f_2s_2^{-1} \circ f_3s_3^{-1})$ et $(f_1s_1^{-1} \circ f_2s_2^{-1}) \circ f_3s_3^{-1}$, qui sont donc bien égales entre-elles, d'où l'associativité.

Enfin, il est clair que $X \xleftarrow{1_X} X \xrightarrow{1_X} X$ est neutre pour la composition, et la locale petitesse est issue du lemme 3.14. □

Théorème 7. *(Gabriel-Zisman)*
Soit S un système multiplicatif localement petit dans $\mathcal{C}$. Alors la catégorie construite dans le théorème 6, munie du foncteur universel $L : \mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ envoyant $f : X \to Y$ sur la fraction $X \xleftarrow{1_X} X \xrightarrow{f} Y$, est une localisation de $\mathcal{C}$ par rapport à S.

Démonstration. Pour voir que L est un foncteur, remarquons que $(\ X \xleftarrow{1_X} X \xrightarrow{f} Y\ ) \circ (\ Y \xleftarrow{1_Y} Y \xrightarrow{h} Z\ ) = X \xleftarrow{1_X} X \xrightarrow{h \circ f} Z$ puisque le carré suivant commute

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[d, "1_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Ensuite, pour $s : X \to Y \in S$, $L(s)$ est bien un isomorphisme, puisque $s1_X$ admet clairement la fraction $1_Y s^{-1}$ pour inverse.
Enfin, supposons que $F : \mathcal{C} \to D$ soit un autre foncteur candidat, considérons le foncteur $S^{-1}F : S^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, envoyant X sur $F(X)$ (puisque les objets de $\mathcal{C}$ et $S^{-1}\mathcal{C}$ sont les mêmes) et fs^{-1} sur $F(f)F(s)^{-1}$. Ceci est bien défini : si on a un recouvrement commun

$$\begin{tikzcd}
 & Z_1 \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
X & T \arrow[l, "x"'] \arrow[u, "y"] \arrow[r, "z"] \arrow[d, "t"] & Y \\
 & Z_2 \arrow[ul, "s_2"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

alors on a :

$$F(f_1)F(s_1)^{-1} = F(f_1)F(y)F(x)^{-1} = F(f_1 \circ y)F(x)^{-1} = F(z)F(x)^{-1}$$

$$F(f_2 \circ t)F(x)^{-1} = F(f_2)F(t)F(x)^{-1} = F(f_2)F(s_2)^{-1}$$

étant donnés g et t, l'égalité $gs = tf$ dans $\mathcal{C}$ donne $F(g)F(s) = F(t)F(f)$, ou encore $S^{-1}F(t^{-1}g) = S^{-1}F(fs^{-1})$, il s'ensuit que $S^{-1}F$ respecte la composition, et est donc un foncteur,il est alors clair que $F = (S^{-1}F) \circ L$, et que cette factorisation est unique. □

Remarque. Il existe une construction duale, partant des fractions à droite, de la forme

$$t^{-1}g := X \xrightarrow{g} Z \xleftarrow{t} Y$$

avec une notion duale de locale petitesse à gauche pour S.

Corollaire 3.15. *Deux morphismes $f, g : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ sont identifés dans $S^{-1}\mathcal{C}$ si et seulement si*

$$\exists s \in S \mid fs = gs$$

Démonstration. ($\Leftarrow$) est évident puisque s devient un isomorphisme dans $S^{-1}\mathcal{C}$, il suffit donc de composer par s^{-1} pour avoir $f = g$ dans $S^{-1}\mathcal{C}$.
($\Rightarrow$) Si $f = g$ dans $\mathcal{C}$, le morphisme 1_X, qui est dans S par stabilité, convient. Autrement, on doit avoir $X \xleftarrow{1_X} X \xrightarrow{f} Y$ et $X \xleftarrow{1_X} X \xrightarrow{g} Y$ recouverts communément par une fraction $X \xleftarrow{s} Z \xrightarrow{h} Y$, ce qui donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & Z \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "h"] \arrow[u] \arrow[d] & Y \\
 & X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Mais pour avoir la commutativité de la partie droite, les deux flèches verticales doivent être ègales à s, d'où $fs = gs$ par commutativité de la partie gauche. □

On note que par la condition de simplification, la condition que nous avons donné est èquivalente à l'existence d'un morphisme $t \in S$ tel que $tf = tg$.

À présent, pour se ramener progressivement au cas de la catégorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, on essaye d'appliquer la localisation au cas des catégories triangulées, pour ce faire, on se donne $(\mathcal{K}, T, \mathbb{T})$ une catégorie triangulée et $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

Définition 46. Un système S de morphismes dans $\mathcal{K}$ est dit ***provenant d'un foncteur (co)homologique*** $H : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ si S est la collection de morphismes s tels que $H^n(s) := H(T^n s)$ soit un isomorphisme dans $\mathcal{A}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Proposition 3.16. *Si S provient d'un foncteur (co)homologique H, alors S est un système multiplicatif.*

Démonstration. L'axiome de stabilité est clair par les propriétés d'un foncteur. Pour la condition d'Ore, soient $f : X \to Y$ et $s : Z \to Y$ respectivement un morphisme quelconque et un morphisme de S. Par TR1, on a un triangle distingué

$$Z \xrightarrow{s} Y \xrightarrow{u} C \xrightarrow{\delta} TZ$$

de la même, par TR1 et l'axiome de rotation, on a un triangle distingué

$$W \xrightarrow{t} X \xrightarrow{u \circ f} C \xrightarrow{v} TW$$

Par la propriété 3.1, il existe $g : W \to Z$ tel qu'on ait un morphisme de triangle :

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r, "u \circ f"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & TW \arrow[d, "Tg"] \\
Z \arrow[r, "s"'] & Y \arrow[r, "u"'] & C \arrow[r, "\delta"'] & TZ
\end{tikzcd}$$

Si $H(s)$ est un isomorphisme, alors $H(C) = 0$ par le corollaire 3.5, et par ce même résultat, $H(t)$ est aussi un isomorphisme, donc $t \in S$ et la condition d'Ore est ainsi vérifiée :

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Le cas cohomologique se règle en travaillant dans $\mathcal{K}^{op} \to \mathcal{A}^{op}$.
Pour l'axiome de simplification, soient $f, g : X \to Y$, on pose $h := f - g$, étant donné $s : Y \to Y'$ tel que $sf = sg$, plongeons s dans un triangle distingué :

$$Z \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{s} Y' \xrightarrow{\delta} TZ$$

On note que $H(Z) = 0$ (toujours par le corollaire 3.5). Par la proposition 3.10, le foncteur $\mathrm{Hom}_K(X, -)$ est un foncteur homologique, donc la suite

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Z) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y) \xrightarrow{s} \mathrm{Hom}_K(X, Y')$$

est exacte ? Puisque $sh = 0$, il existe $v : X \to Z$ dans $\mathcal{K}$ tel que $f - g = uv$ (par exactitude). On inscrit v dans un triangle distingué :

$$X' \xrightarrow{t} X \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX'$$

Comme $vt = 0$ (lemme 3.3), on a $ht = uvt = 0$, donc $ft = gt$, et comme $H(Z) = 0$, la suite exacte longue image du triangle $X' \xrightarrow{t} X \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX'$ donne que $H(t)$ est un isomorphisme, donc $t \in S$. L'autre implication de l'axiome de simplification se voit avec le foncteur $\mathcal{K}^{op} \to \mathcal{A}^{op}$. $\square$

Théorème 8. *Si S provient d'un foncteur (co)homologique H, alors $S^{-1}\mathcal{K}$ est une catégorie triangulée.*

Démonstration. On commence par noter que la formule $T(fs^{-1}) = T(f)T(s)^{-1}$ donne une autovalence $T : S^{-1}\mathcal{K} \to S^{-1}\mathcal{K}$, on doit maintenant définir les triangles distinqués pour montrer que $S^{-1}\mathcal{K}$ est triangulée : Un triangle distingué dans $S^{-1}\mathcal{K}$ est défini comme étant un triangle isomorphe à l'image par $\mathcal{K} \to S^{-1}\mathcal{K}$ d'un triangle distingué de $\mathcal{K}$. La première partie de (TR1) est alors triviale par définition. Pour la seconde partie, pour $X \in S^{-1}\mathcal{K}$, le triangle

$$X \xrightarrow{L(1_X)} X \xrightarrow{L(0)} 0 \xrightarrow{L(0)} TX \;=\; X \xrightarrow{1_X} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} TX$$

est l'image de

$$X \xrightarrow{1_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$$

et donc est distingué. Pour la troisième partie de (TR1), soit donc $\psi := X \xleftarrow{\nu} Z \xrightarrow{\alpha} Y$ un morphisme dans $S^{-1}\mathcal{K}$. On a donc par (TR1) dans $\mathcal{K}$ un triangle dans $\mathcal{K}$:

$$Z \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow A \longrightarrow TZ$$

donc dans $S^{-1}\mathcal{K}$ par définition. Puisque $X \simeq Z$ dans $S^{-1}\mathcal{K}$ par $L(\nu)$, on a dans $S^{-1}\mathcal{K}$ un isomorphisme de triangles

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\nu"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & TZ \arrow[d, "T\nu"] \\ X \arrow[r, "\psi"'] & Y \arrow[r] & A \arrow[r] & TX \end{tikzcd}$$

et ainsi, ψ apparait dans un triangle isomorphe au triangle

$$Z \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow A \longrightarrow TZ$$

Pour montrer l'axiome (TR2) de rotation, on se donne un triangle

$$X \xrightarrow{\psi} Y \longrightarrow A \longrightarrow TX$$

on peut par isomorphisme remplacer X par Z et obtenir dans $\mathcal{K}$ le triangle

$$Z \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow A \longrightarrow TZ$$

Auquel on applique (TR2) dans $\mathcal{K}$, pour avoir le triangle distingué dans $\mathcal{K}$:

$$Y \longrightarrow A \longrightarrow TZ \longrightarrow TY$$

donc distingué dans $S^{-1}\mathcal{K}$, en utilisant à nouveau $Z \simeq X$, on a le triangle désiré. De la même manière, le triangle

$$T^{-1}A \longrightarrow Z \xrightarrow{\alpha} Y \longrightarrow A$$

est distingué dans $\mathcal{K}$ et on obtient dans $S^{-1}\mathcal{K}$ le triangle distingué

$$T^{-1}A \longrightarrow X \xrightarrow{\psi} Y \longrightarrow A$$

D'où (TR2).
Nous montrons l'axiome de complétion, qui nous sera utile pour l'axiome de l'octahèdre : On se donne deux triangles (que l'on peut supposer provenant de triangles dans $\mathcal{K}$) dans un diagramme dont le carré gauche commute dans $S^{-1}\mathcal{K}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "L(f)"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[r, "L(g)"] \arrow[d, "\psi"'] & Z \arrow[r, "L(h)"] & TX \arrow[d, "T\varphi"] \\ X' \arrow[r, "L(f')"'] & Y' \arrow[r, "L(g')"'] & Z' \arrow[r, "L(h')"'] & TX' \end{tikzcd}$$

et on écrit $\varphi = \; X \xleftarrow{s} U \xrightarrow{u} X'$ ainsi que $\psi = \; Y \xleftarrow{t} V \xrightarrow{v} Y'$. On obtient un diagramme :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "f'"] & U \arrow[l, "u"'] \arrow[r, "s"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' & V \arrow[l, "v"] \arrow[r, "t"'] & Y \end{tikzcd}$$

Par condition d'Ore, il existe un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} U' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "t'"'] & V \arrow[d, "t"] \\ U \arrow[r, "f \circ s"'] & Y \end{tikzcd}$$

avec t' dans S. Par ailleurs, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "u"] & \\
X & U' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "t'"'] \arrow[d, "1_{U'}"] & X' \\
& U' \arrow[ul, "S\circ t'"] \arrow[ur, "u\circ t'"'] &
\end{tikzcd}$$

Donc $\varphi = \; X \xleftarrow{s\circ t'} U' \xrightarrow{u\circ t'} X'$ et le diagramme précédent devient alors

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, "f'"] & U \arrow[l, "u\circ t'"'] \arrow[r, "s\circ t'"] \arrow[d, "a"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' & V \arrow[l, "v"] \arrow[r, "t"'] & Y
\end{tikzcd}$$

et le carré de droite commute. On peut donc supposer que l'on avait au départ un diagramme dont le carré de droite commute :

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, "f'"] & U \arrow[l, "u"'] \arrow[r, "s"] \arrow[d, "a"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' & V \arrow[l, "v"] \arrow[r, "t"'] & Y
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

et on renomme alors les morphismes en fonction. Ensuite, on a $\varphi = L(u)L(s)^{-1}$ et $\psi = L(v)L(t)^{-1}$. Comme le carré du tout premier diagramme commute, on a

$$\psi \circ L(f) = L(f')\varphi \Rightarrow L(f')L(u)L(s)^{-1} = L(v)L(t)^{-1}L(f)$$

$$\Rightarrow L(v)L(t)^{-1}L(f)L(s) = L(f')L(u)$$

et de plus,

$$L(t)L(a) = L(f)L(s) \Rightarrow L(v)L(a) = L(f')L(u)$$

donc le carré de gauche de 3.1 commute dans $S^{-1}\mathcal{K}$. Par la condition d'Ore, il existe alors $r : U'' \to U$ dans S tel que

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "1_U"'] \arrow[dr, "v\circ a"] & \\
U & U'' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "r"'] \arrow[d, "r"] & Y' \\
& U \arrow[ul, "1_U"] \arrow[ur, "f'\circ u"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif, i.e les fractions en haut et en bas sont équivalentes. En particulier, on a $v \circ a \circ z = f' \circ u \circ r$. Comme le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "1_U"'] \arrow[dr, "u"] & \\
X & U'' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "r"'] \arrow[d, "1_{U''}"] & X' \\
& U'' \arrow[ul, "s\circ r"] \arrow[ur, "u\circ r"'] &
\end{tikzcd}$$

on a $\varphi = X \xleftarrow{s\circ r} U'' \xrightarrow{u\circ r} X'$. On peut donc remplacer le diagramme 3.1 par

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, "f'"] & U'' \arrow[l, "u\circ r"'] \arrow[r, "s\circ r"] \arrow[d, "a\circ r"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' & V \arrow[l, "v"] \arrow[r, "t"'] & Y
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux carrés commutent. On peut donc supposer que 3.1 est commutatif, et on renomme alors les morphismes en conséquence. Considérons le triangle sur a :

$$U \xrightarrow{a} V \longrightarrow W \longrightarrow TU$$

On peut alors compléter le tout premier diagramme en

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & TX \\
U \arrow[u, "s"] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "t"'] \arrow[r] \arrow[d, "v"] & W \arrow[r] & TU \arrow[u, "Ts"'] \arrow[d, "Tu"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & TX'
\end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes sont des triangles distingués. Comme $\mathcal{K}$ est triangulée, et comme S provient d'un foncteur cohomologique, il existe $p : M \to Z$ dans S et $w : W \to Z'$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & TX \\
U \arrow[u, "s"] \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"'] & V \arrow[u, "t"'] \arrow[r] \arrow[d, "v"] & W \arrow[u, "p"'] \arrow[r] \arrow[d, "w"] & TU \arrow[u, "Ts"'] \arrow[d, "Tu"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r, "g'"'] & Z' \arrow[r, "h'"'] & TX'
\end{tikzcd}$$

commute. Si l'on pose $\chi := Z \xleftarrow{p} W \xrightarrow{w} Z'$, alors on a dans $S^{-1}\mathcal{K}$ un morphisme de triangle

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "L(f)"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[r, "L(g)"] \arrow[d, "\psi"'] & Z \arrow[r, "L(h)"] \arrow[d, "\chi"'] & TX \arrow[d, "T\varphi"] \\
X' \arrow[r, "L(f')"'] & Y' \arrow[r, "L(g')"'] & Z' \arrow[r, "L(h')"'] & TX'
\end{tikzcd}$$

d'où l'axiome de complétion.

Montrons enfin l'axiome de l'octahédre : Soient $\alpha_3 = X \xleftarrow{s} U \xrightarrow{f} Y$, $\alpha_1 = Y \xleftarrow{t} V \xrightarrow{g} Z$ et $\alpha_2 := \alpha_1 \circ \alpha_3$ défini par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & W \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "f'"] & & \\
 & U \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"'] & & V \arrow[dl, "t"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

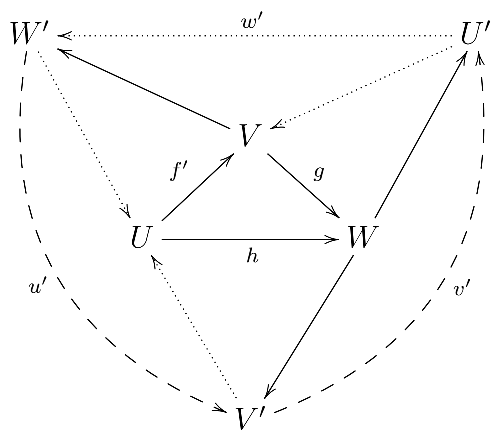
ce qui revient à dire que $\alpha_2 = X \xleftarrow{s \circ s'} W \xrightarrow{g \circ f'} Z$. Le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & W \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "s'"'] \arrow[d, "1_W"] & Y \\
 & W \arrow[ul, "s \circ s'"] \arrow[ur, "f \circ s'"'] &
\end{tikzcd}
$$

nous donne que $\alpha_3 = X \xleftarrow{s \circ s'} W \xrightarrow{f \circ s'} Y$, on peut donc remplacer $s \circ s'$ par s dans nos notations, ainsi que $f \circ s'$ par f et W par U. On a alors :

$$\alpha_3 = X \xleftarrow{s} U \xrightarrow{f} Y \ , \quad \alpha_2 = Y \xleftarrow{t} V \xrightarrow{g} Z \ , \quad \alpha_2 = X \xleftarrow{s} U \xrightarrow{h} Z$$

avec $h = g \circ f'$, et on pose maintenant $W = Z$. Comme $\mathcal{K}$ est triangulée, on a l'octahèdre :



que l'on peut aussi représenter par :

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "1_U"] & V \arrow[r] \arrow[d, "g"] & W' \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & TU \arrow[d, "1_{TU}"] \\
U \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"] & W \arrow[r] \arrow[d, "1_W"] & V' \arrow[r] \arrow[d, "v'"] & TU \arrow[d, "Tf'"'] \\
V \arrow[r, "g"] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[r] \arrow[d, "1_{U'}"] & TV \arrow[d] \\
W' \arrow[r, "u'"] & V' \arrow[r, "v'"] & U' \arrow[r, "w'"] & TW'
\end{tikzcd}
\tag{3.2}
$$

Considérons une partie de son image dans $S^{-1}\mathcal{K}$:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "1_X"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & Z' \arrow[r] & TX \arrow[d, "1_{TX}"] \\
X \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_3"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"] & Y' \arrow[r] & TX \arrow[d, "T\alpha_3"] \\
Y \arrow[r, "\alpha_1"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & TY
\end{tikzcd}
$$

et on en extrait la partie supérieure :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "1_X"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & Z' \arrow[r] & TX \arrow[d, "1_{TX}"] \\
X \arrow[r, "\alpha_2"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & TX
\end{tikzcd}$$

On peut ensuite, par construction, la développer en un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_3"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & TX \\
U \arrow[u, "L(s)"] \arrow[r, "L(f')"] \arrow[d, "1_U"'] & V \arrow[u, "L(t)"'] \arrow[r] \arrow[d, "L(g)"] & W' \arrow[r] \arrow[d, "L(u')"] & TU \arrow[u, "T(L(s))"'] \arrow[d, "1_{TU}"] \\
U \arrow[r, "L(h)"] \arrow[d, "L(s)"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "1"] & V' \arrow[r] & TU \arrow[d, "T(L(s))"] \\
X \arrow[r, "\alpha_2"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & TX
\end{tikzcd}$$

dans lequel les carrés du haut et du bas de la première colonne sont commutatifs et la ligne du milieu provient de 3.2. Par l'axiome de complétion, on peut encore le compléter avec $\alpha : W' \to Z'$ et $\beta : V' \to Y'$ pour obtenir :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_3"] & Y \arrow[r] & Z' \arrow[r] & TX \\
U \arrow[u, "L(s)"] \arrow[r, "L(f')"] \arrow[d, "1_U"'] & V \arrow[u, "L(t)"'] \arrow[r] \arrow[d, "L(g)"] & W' \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[r] \arrow[d, "L(u')"] & TU \arrow[u, "T(L(s))"'] \arrow[d, "1_{TU}"] \\
U \arrow[r, "L(h)"] \arrow[d, "L(s)"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "1"] & V' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & TU \arrow[d, "T(L(s))"] \\
X \arrow[r, "\alpha_2"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & TX
\end{tikzcd}$$

Comme le lemme des 5 dans les catégories triangulées n'utilise pas l'axiome de l'octahèdre, on peut affirmer que α et β sont des isomorphismes.
De même, on peut étendre la partie inférieure de 3.2 :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_3"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"] & Y' \arrow[r] & TX \arrow[d, "T\alpha_3"] \\
Y \arrow[r, "\alpha_1"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & TY
\end{tikzcd}$$

en

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_2"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & TX \\
U \arrow[u, "L(s)"] \arrow[r, "L(h)"] \arrow[d, "L(f')"'] & W \arrow[u, "1"'] \arrow[r] \arrow[d, "1"] & V' \arrow[u, "\beta"'] \arrow[r] \arrow[d, "L(v')"] & TU \arrow[u, "T(L(s))"'] \arrow[d, "Tf'"] \\
V \arrow[r, "L(g)"] \arrow[d, "L(t)"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "1"] & U' \arrow[r] & TV \arrow[d, "T(L(t))"] \\
Y \arrow[r, "\alpha_1"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & TY
\end{tikzcd}$$

et comme précédemment, on peut le compléter avec un isomorphisme $\gamma : X' \to U'$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_2"] & Z \arrow[r] & Y' \arrow[r] & TX \\
U \arrow[u, "L(s)"] \arrow[r, "L(h)"] \arrow[d, "L(f')"'] & W \arrow[u, "1"'] \arrow[r] \arrow[d, "1"] & V' \arrow[u, "\beta"'] \arrow[r] \arrow[d, "L(v')"] & TU \arrow[u, "T(L(s))"'] \arrow[d, "Tf'"] \\
V \arrow[r, "L(g)"] \arrow[d, "L(t)"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "1"] & U' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & TV \arrow[d, "T(L(t))"] \\
Y \arrow[r, "\alpha_1"] & Z \arrow[r] & X' \arrow[r] & TY
\end{tikzcd}$$

Posons à présent :

$$\begin{cases} \delta_1 := \beta \circ L(u') \circ \alpha^{-1} \\ \delta_3 := \gamma \circ L(v') \circ \beta^{-1} \\ \delta_2 := T\alpha \circ L(w') \circ \gamma^{-1} \end{cases}$$

Alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "L(u')"] \arrow[d, "\alpha"] & V' \arrow[r, "L(v')"] \arrow[d, "\beta"] & U' \arrow[r, "L(w')"] \arrow[d, "\gamma"] & TW' \arrow[d, "T\alpha"] \\
Z' \arrow[r, "\delta_1"'] & Y' \arrow[r, "\delta_3"'] & X' \arrow[r, "\delta_2"'] & TZ'
\end{tikzcd}$$

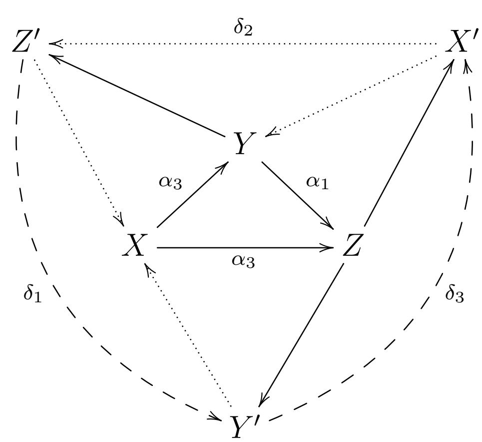
montre que le triangle

$$Z' \xrightarrow{\delta_1} Y' \xrightarrow{\delta_3} X' \xrightarrow{\delta_2} TZ'$$

est distingué. On peut finalement assembler le tout et obtenir le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "1_X"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "\delta_1"] & TX \arrow[d, "1_{TX}"] \\
X \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1"] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "\delta_3"] & TX \arrow[d, "T\alpha_3"] \\
Y \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "1_{X'}"] & TY \arrow[d] \\
Z \arrow[r, "\delta_1"] & Y' \arrow[r, "\delta_3"] & X' \arrow[r, "\delta_2"] & TZ'
\end{tikzcd}$$

qui est l'octahèdre



□

3.3.2 Catégories dérivées des catégories de modules.

Nous allons maintenant définir les catégories dérivée par localisation, on se limitera ici au cas des catégories de modules, ce qui nous simplifiera beaucoup la tache puisque l'on pourra raisonner sur les éléments et ainsi éviter un surplus technique. Dans cette section (tirée de [14] et [16]) on considèrera donc $\mathcal{A}$ une catégorie de modules sur un certain anneau A. Nous allons devoir définir la classe des morphismes par rapport à laquelle nous allons localiser :

Définition 47.
- Soit $X = (X_n, d_n^X) \in C(\mathcal{A})$ un complexe. La ***n-ème homologie*** de X est un objet de $\mathcal{A}$ défini comme suit :

$$H_n(X) := \mathrm{Ker}\, d_n^X \Big/ \mathrm{Im}\, d_{n+1}^X$$

(un quotient de module au sens classique).

- Le complexe X est die ***exact*** si $H_n(X) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- Soit $f : X \to Y$ un morphisme de complexes. On définit une application induite sur le niveau correspondant d'homologie par

$$\begin{array}{rccc} H_n(f) : & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(Y) \\ & x + \mathrm{Im}\, d_{n+1}^X & \longmapsto & f_n(x) + \mathrm{Im}\, d_{n+1}^Y \end{array}$$

On obtient ainsi le ***n-ème foncteur d'homologie*** $H_n : C(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$

Notons que l'application induite sur l'homologie est bien définie : soient $x, x' \in \mathrm{Ker}\, d_n^X$ tels que $x - x' \in \mathrm{Im}\, d_{n+1}^X$, on a alors qu'il existe $x'' \in X_{n+1}$ tel que $d_{n+1}^X(x'') = x - x'$, donc

$$f_n(x) - f_n(x') = f_n(x - x') = f_n(d_{n+1}^X(x'')) = d_{n+1}^Y(f_{n+1}(x'')) \in \mathrm{Im}\, d_{n+1}^Y$$

Donc $f_n(x) + \mathrm{Im}\, d_{n+1}^Y = f_n(x') + \mathrm{Im}\, d_{n+1}^Y$.

Proposition 3.17. *Soient $f, g : X \to Y$ des morphismes de complexes homotopes entre eux. Ils induisent la même application sur l'homologie, ce qui revient à dire que $H_n(f) = H_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Par hypothèse, on a des morphismes d'homotopie s_n, tels que $f_n - g_n = d_{n+1}^Y \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n^X$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soit $x + \mathrm{Im}\, d_{n+1}^X \in H_n(x)$, on a en particulier $x \in \mathrm{Ker}\, d_n^X$. On a alors que :

$$H_n(f)(x + \mathrm{Im}\, d_{n+1}^X) = f_n(x) + \mathrm{Im}\, d_{n+1}^Y$$
$$= (d_{n+1}^Y \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n^Y + g_n)(x) + \mathrm{Im}\, d_{n+1}^Y$$
$$= g_n(x) + \mathrm{Im}\, d_{n+1}^Y$$
$$= H_n(g)(x + \mathrm{Im}\, d_{n+1}^Y)$$

Donc $H_n(g) = H_n(f)$. $\square$

Une conséquence de cette propriété est que le n-ème foncteur d'homologie sur $\mathbb{C}(\mathcal{A})$ induit bien un foncteur défini sur $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Définition 48. Un morphisme $f : X \to Y$ dans $C(\mathcal{A})$ est un ***quasi-isomorphisme*** si les applications induites sur l'homologie sont des isomorphismes pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple. (Résolutions)On admettra ici le théorème 3 de [2], qui dit que tout module admet une résolution projective et une résolution injective[22]. Ceci donne des morphismes de complexes.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varepsilon"] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota"] & I_0 \arrow[r] & I_1 \arrow[r] & I_2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(on considère que P_0, X et I_0 sont les termes de degré 0 de leurs complexes respectifs). Ces deux morphismes de complexes sont en fait des quasi-isomorphismes : en effet, comme les suites sont exactes, les indices non nuls ont une homologie nulle (le quotient image sur noyau est nul), les isomorphismes sont donc triviaux, et à l'indice 0, on a un isomorphisme induit par ε (resp. ι).

Notre prochain objectif est de caractériser les quasi-isomorphismes en termes de cônes de morphismes. à cette fin, on utilise le résultat suivant, issu de [9], et dont la preuve fait intervenir le Lemme du Serpent (thèorème 3) :

Théorème 9. *(Suite exacte longue d'homologie)*
Soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de complexes. Alors il existe des morphismes de connexion* $\delta_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ *donnant lieu à une suite exacte longue dans* $\mathcal{A}$ *:*

$$\cdots \xrightarrow{H_{n+1}(g)} H_{n+1}(C) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} \cdots$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{Z}$, comme f et g sont des morphismes de complexes, on obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d_n^A"] & B_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_n^B"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "d_n^C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"'] & C_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

sur lequel on applique le Lemme du Serpent, qui donne en particulier des suites exactes $\mathrm{Ker}\ d_n^A \to \mathrm{Ker}\ d_n^B \to \mathrm{Ker}\ d_n^C$ et $A_{n-1}/\mathrm{Im}\, d_n^A \to B_{n-1}/\mathrm{Im}\, d_n^B \to C_{n-1}/\mathrm{Im}\, d_n^C$. Comme A est un complexes, les morphismes d_n^A induisent bien des morphismes $A_n/\mathrm{Im}\, d_{n+1}^A \to \mathrm{Ker}\ d_n^A$ (puisqu'on travaille dans des modules), il en va de même pour B et C. on a donc le diagramme commutatif suivant, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
 & A_n/\mathrm{Im}\, d_{n+1}^A \arrow[r] \arrow[d, "d_n^A"] & B_n/\mathrm{Im}\, d_{n+1}^B \arrow[r] \arrow[d, "d_n^B"] & C_n/\mathrm{Im}\, d_{n+1}^C \arrow[r] \arrow[d, "d_n^C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\ d_{n-1}^A \arrow[r, "f_{n-1}"] & \mathrm{Ker}\ d_{n-1}^A \arrow[r, "g_{n-1}"] & \mathrm{Ker}\ d_{n-1}^A &
\end{tikzcd}$$

22. D'après la proposition 2.18, il suffirait pour cela de montrer que $A_{\mathfrak{Mod}}$ admet suffisamment de projectifs et d'injectifs

Dont les lignes sont exactes. Comme les noyaux (resp. conoyaux) des morphismes verticaux sont $H_n(A)$,$H_n(B)$ et $H_n(C)$ (resp. $H_{n-1}(A)$,$H_{n-1}(B)$ et $H_{n-1}(C)$), on obtient par le lemme du serpent la suite exacte voulue (il suffit de concaténer les sous suites indicées en n pour avoir le résultat). $\square$

Proposition 3.18. *Un morphisme $f : X \to Y$ dans $C(\mathcal{A})$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si son cône de morphisme est un complexe exact.*

Démonstration. On sait qu'on a une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1] \longrightarrow 0$$

La suite exacte longue donnée par le théorème précédente a la forme

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X[1]) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(Y) \xrightarrow{H_n(\alpha(f))} H_n(M(f)) \xrightarrow{H_n(\beta(f))} H_n(X[1]) \xrightarrow{\delta_n} \cdots$$

Mais par définition, on peut identifier $H_n(X[1])$ à $H_{n-1}(X)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et on peut v{erifier que dans notre cas, $\delta_n = H_{n-1}(f)$. La suite exacte longue devient alors

$$\cdots \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y) \xrightarrow{H_n(\alpha(f))} H_n(M(f)) \xrightarrow{H_n(\beta(f))} H_{n-1}(X) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} \cdots$$

($\Rightarrow$) Si f est un quasi-isomorphisme, alors les $H_n(f)$ sont des isomorphismes, et donc $H_n(\alpha(f)) = 0$ et $H_n(\beta(f)) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$ par exactitude, donc $H_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et le cône est exact.
($\Leftarrow$) Si $M(f)$ est exact, alors la suite exacte longue prend la forme

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(X) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y) \longrightarrow 0 \longrightarrow H_{n-1}(X) \xrightarrow{H_{n-1}(f)} H_{n-1}(Y) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Par le corollaire 2.9, $H_n(f)$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d'où le résultat. $\square$

Remarque. Soit $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ un triangle distingué dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, il est isomorphe à un triangle standard, donc f est un quasi isomorphisme si et seulement si Z est exact.

Pour appliquer les résultats de la section précédente, ont veut montrer que les quasi-isomorphismes forment un système issu d'un foncteur homologique. Soit donc $H : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to C(\mathcal{A})$ qui envoie le complexe $X = (X_n, d_n^X)$ sur le complexe dont les objets sont les $H_n(X)$ et les différentielles les applications induites par d_n^X sur les quotients qui forment les homologies. Et qui envoie $f : X \to Y$ sur le morphisme $H(f) = (H_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$. Comme un morphisme de complexe est un isomorphisme si et seulement si toutes ses composantes sont des isomorphismes, les quasi isomorphismes sont bien issus de ce foncteur, reste à montrer qu'il est bien un foncteur homologique.
Pour n fixé, la suite exacte longue d'homologie donne une suite exacte

$$\cdots \xrightarrow{H_n(g[1]^{-1})} H_n(C[1]^{-1}) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(C) \xrightarrow{\delta_n} H_n(A[1]) \xrightarrow{H_n(f[1])} \cdots$$

Et donc on a de manière générale une suite exacte

$$\cdots \xrightarrow{H(g[1]^{-1})} H(C[1]^{-1}) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H(A) \xrightarrow{H(f)} H(B) \xrightarrow{H(g)} H(C) \xrightarrow{\delta_n} H(A[1]) \xrightarrow{H(f[1])} \cdots$$

Et H est un foncteur homologique. Il faudrait aussi montrer que le système multiplicatif obtenu est localement petit, mais encore une fois, cela déploirait des arguments que nous n'avons pas introduit ici, nous renvoyons donc vers [16], Lemme 5.

Tout ceci permet donc de définir $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ la ***catégorie dérivée*** de $\mathcal{A}$ comme la localisation de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ par rapport aux quasi-isomorphismes.

Proposition 3.19. *La catégorie dérivée $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est une catégorie additive.*

Démonstration. On doit montrer que les ensembles de morphismes forment des groupes abéliens : soient $F, G : X \to Y$ représentés par des fractions fq^{-1} et $f'q'^{-1}$. Par la condition d'Ore, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & X' \arrow[d, "q"] \\ X'' \arrow[r, "q'"'] & X \end{tikzcd}$$

avec t un quasi isomorphisme, on a donc que $g \circ g = q' \circ t$ est un quasi-isomorphisme, et donc g est un quasi-isomorphisme car q est un quasi-isomorphisme. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & W \arrow[l, "q \circ g"] \arrow[u] \arrow[r, "f \circ g"'] & Y \end{tikzcd}$$

donc $(q \circ g, f \circ g) = (q, f)$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. De la même manière, $(q', f') = (q' \circ t, f' \circ t) = (q \circ g, f' \circ t)$. On a trouvé une sorte de 'dénominateur commun' aux deux fractions, et on pose $F + G$ comme $(q \circ g, f \circ g + f \circ t)$. Ensuite, soient $(\widehat{q}, \widehat{f})$ et $(\widetilde{q'}, \widetilde{f'})$ deux fractions recouvrant respectivement les deux premières, alors par condition d'Ore, le recouvrement commun W est recouvert par le recouvrement commun aux fractions couvrantes, donc la loi $+$ est bien définie, elle donne une loi de groupe abélien par des arguments classiques (qui sont les même que pour le calcul dans les anneaux localisés).
Pour les biproduits, on a $L(X \oplus Y) \simeq L(X) \oplus L(Y)$, en effet, les images par le foncteur L des injections et projections en font un candidat. Montrons qu'il s'agit bien du co produit (la preuve pour le produit sera duale) : soient $\widetilde{f_X}$ et $\widetilde{f_Y}$ des morphisme respectivement $X \to Z$ et $Y \to Z$, ils sont représentés par des fractions $X \xleftarrow{q} \widetilde{X} \xrightarrow{f_X} Z$ et $Y \xleftarrow{t} \widetilde{Y} \xrightarrow{f_Y} Z$. On considère le morphisme $\widetilde{f}$ donné par la fraction $X \oplus Y \xleftarrow{q \oplus t} \widetilde{X} \oplus \widetilde{Y} \xrightarrow{(f_X, f_Y)} Z$, en effet, on a par exemple $\widetilde{f} \circ L(\iota_x) = (q, f_X)$ car le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & & \widetilde{X} \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "\iota_{\widetilde{X}}"] & & \\ & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "\iota_X"'] & & \widetilde{X} \oplus \widetilde{Y} \arrow[dl, "q \oplus t"] \arrow[dr, "(f_X, f_Y)"] & \\ X & & X \oplus Y & & Z \end{tikzcd}$$

(le principe est le même pour l'injections dans Y). Soit un autre morphisme qui convient, donn{e par une fraction $X \oplus Y \xleftarrow{a} A \xrightarrow{b} Z$, on doit avoir le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & & \widetilde{X} \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "c"] & & \\ & X \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dr, "\iota_X"'] & & A \arrow[dl, "a"] \arrow[dr, "b"] & \\ X & & X \oplus Y & & Z \end{tikzcd}$$

et le morphisme $1_{\widetilde{X}} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ donne un recouvrement immédiat. $\square$

Maintenant que l'on a obtenu la catégorie dérivée comme localisation à partir de la catégorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, qui est une catégorie triangulée dont les triangles distingués sont les triangles isomorphes aux triangles standards obtenus à partir des cônes de morphismes. On chercher à transposer cette structure à l'aide du morphisme de localisation L.

Définition 49. Le foncteur de translation dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est défini par [1] sur les objets et par la classe de la fraction $(q[1], f[1])$ sur une fraction (q, f).
Un triangle dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est distingué si il est isomorphe (dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$) à un triangle image par L d'un triangle distingué de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Remarque. Par notre construction, il y a plus d'isomorphismes dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ qu'il n'y en avait dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, donc il y a 'plus' de triangles distingués dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

On verra dans la suite que toute suite exacte courte dans $C(\mathcal{A})$ donne un triangle distingué dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, ce qui n'était pas le cas dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

Remarque. La construction des catégories dérivées comme localisation à partir de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, permet aussi de donner une autre définition des foncteurs dérivés, qui a pour avantage de ne pas supposer que les foncteurs considéres soient exacts à gaucher où à droite, ou que la catégorie considérée admette suffisamment de projectifs ou d'injectifs. Elle est cependant moins intuitive (cette construction est détaillée dans [16])

Théorème 10. *Pour $\mathcal{A}$ une catégorie de modules sur un anneau commutatif A, la catégorie $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est triangulée.*

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème 8 et de la construction de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ comme localisation de la catégorie triangulée $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. □

À partir de $\mathcal{A}$ une catégorie de modules, on a construit différentes catégories, munies de structures différentes, qui s'articulent entre elles.

Proposition 3.20. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de complexes. On a*

$$f = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ dans } \mathcal{K}(\mathcal{A}) \to f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}(\mathcal{A}) \Rightarrow H_n(f) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. Les deux premières implications sont évidentes. Pour la troisième, par le corollaire 3.15, il existe s un quasi-isomorphisme tel que $fs = 0$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, en passant au foncteur d'homologie, on a $0 = H_n(fs) = H_n(f)H_n(s)$ et donc $H_n(f) = 0$ car $H_n(s)$ est un isomorphisme (s est un quasi-isomorphisme). □

Enfin, nous allons maintenant voir comment les suites exactes courtes dans $C(\mathcal{A})$ vont donner des triangles distingués dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$:

Définition 50. Soit $F : X \to Y$ dans $C(\mathcal{A})$. Le ***cylindre de morphisme*** de f est le complexe défini par

$$Cyl(f) = \left(X_n \oplus X_{n-1} \oplus Y_n, \begin{pmatrix} d_n^X & -1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & -d_{n-1}^X & 0 \\ 0 & f_{n-1} & d_n^Y \end{pmatrix} \right)$$

On vérifie immédiatement que $Cyl(f)$ est bien un complexe (il suffit de multiplier les matrices donnant les différentielles).

Nous voulons maintenant comparer cône et cylindre de morphismes sur un même morphisme $f : X \to Y$, considérons les morphismes de complexes :

$$\iota : X \to Cyl(f) \qquad \iota_n = \begin{pmatrix} 1_{X_n} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi ; Cyl(f) \to M(f) \qquad \pi_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_{X_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{Y_n} \end{pmatrix}$$

Ce sont bien des morphismes de complexes car, pour $n \in \mathbb{Z}$ fixé, on a :

$$\iota_n \circ d^X_{n+1} = \begin{pmatrix} d^X_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^X_{n+1} & -1_{X_n} & 0 \\ 0 & -d^X_n & 0 \\ 0 & f_n & d^Y_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_{X_{n+1}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = d^{Cyl(f)}_{n+1} \circ \iota_{n+1}$$

$$\pi_n \circ d^{Cyl(f)}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -d^X_n & 0 \\ 0 & f_n & d^Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^X_n & 0 \\ f_n & d^Y_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_{X_n} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{Y_{n+1}} \end{pmatrix} = d^{M(f)}_{n+1} \circ \pi_{n+1}$$

On a clairement que la suite

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\iota} Cyl(f) \xrightarrow{\pi} M(f) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte dans $C(\mathcal{A})$. On considère aussi les morphismes

$$\sigma : Y \to Cyl(f) \qquad \sigma_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1_{Y_n} \end{pmatrix}$$

$$\tau : Cyl(f) \to Y \qquad \tau_n = \begin{pmatrix} f_n & 0 & 1_{Y_n} \end{pmatrix}$$

(on vérifie comme pour ι et π que ce sont bien des morphismes de complexes).

Lemme 3.21.

(a) Le diagramme suivant dans $C(\mathcal{A})$, dont les lignes sont supposées exactes, est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "\sigma"] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & Cyl(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tau"] & M(f) \arrow[r] & 0 & \\
 & X \arrow[r, "f"] & Y & & &
\end{tikzcd}$$

(b) On a $\tau \circ \sigma = 1_Y$ et $\sigma \circ \tau$ est homotope à $1_{Cyl(f)}$: Y et $Cyl(f)$ sont isomorphes dans $K(\mathcal{A})$ et donc dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

(c) Les morphismes σ et τ sont des quasi isomorphismes.

Démonstration. (a) est immédiat par définitions des différents morphismes.
(b) Par définition, on a bien $\tau \circ \sigma = 1_Y$, réciproquement, les morphismes d'homotopies entre $\sigma \circ \tau$ et $1_{Cyl(f)}$ sont

$$s_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1_{X_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Par le deuxième point, les homologies de $\sigma \circ \tau$ et $\tau \circ \sigma$ sont des identités, ainsi,

$$H_n(\sigma = \circ H_n(\tau) = H_n(\sigma \circ \tau) = H_n(1_{Cyl(f)}) = 1_{H_n(Cyl(f))}$$

et de la même manière, on a $H_n(\tau) \circ H_n(\sigma) = 1_{H_n(Y)}$, donc ce sont bien des isomorphismes (inverses l'un de l'autre) et σ et τ sont bien des quasi isomorphismes. $\square$

On obtient ainsi le résultat recherché depuis le début de cette section :

Proposition 3.22. *Pour toute suite exacte courte* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ *dans* $C(\mathcal{A})$, *on a un triangle distingué dans* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *de la forme*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow X[1]$$

Démonstration. En réutilisant les notations du lemme précédent, on obtient le diagramme suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & Cyl(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tau"] & M(f) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Où γ est défini par $\gamma_n = (0, g_n)$ (on montre directement qu'il s'agit d'un morphisme de complexes, en utilisant que g est un morphisme de complexes et $g \circ f = 0$ par exactitude). On a immédiatement (par définition et par le lemme précédent) que ce diagramme est commutatif. Comme 1_X et τ sont des quasi isomorphismes, le lemme des 5 sur la suite exacte longue d'homologie donne que $H_n(\gamma)$ est un isomorphisme, donc γ est un quasi-isomorphisme par définition, donc est un isomorphisme dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (mais pas forcément dans $\mathcal{K}(\mathcal{A})$). On a donc dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ le morphisme de triangles

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, equal] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "\gamma"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \arrow[r, "\beta(f) \circ \gamma^{-1}"'] & X[1]
\end{tikzcd}$$

il ne manque plus que la commutativité du deuxième carré :

$$\gamma \circ \alpha(f) = \gamma \circ \pi \circ \sigma = g \circ \tau \circ \sigma = g \circ 1_Y = g$$

De plus, comme γ est un isomorphisme, on a bien un isomorphisme de la deuxième ligne avec l'image par L d'un triangle standard dans $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, ce qui clos la démonstration. $\square$

Bibliographie

[1] Tom Leinster, Basic Category Theory, Cambridge University Press (2014).
https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~edumas/integration.pdf.

[2] Arthur Garnier, Théorie de L'Homologie Générale - Cohomologie des Groupes et de Hochschild, Mémoire de Master 1, Université de Picardie Jules Verne (2016).

[3] Alexander Zimmermann, Representation Theory : A Homological Algebra Point of View, Springer (2014).

[4] Ibrahim Assem, Daniel Simson, Andrzej Skowroǹski, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras Cambridge University Press (2006).

[5] Serge Lang, Algèbre, Dunod (2004).

[6] Francis Borceux, Handbook of Categorical Algebra 1 - Categories and Structures, Cambridge University Press (1994).

[7] Alexander Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre Homologique, Tôhoku Mathematical Journal (1957).

[8] Bodo Pareigis, Categories and Functors, New York Academic Press (1970).

[9] Charles A. Weibel, An introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press (1994).

[10] Peter Freyd, Abelian Categories, Harper and Row (1964).

[11] Dieter Happel, Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras, Cambridge University Press (1988).

[12] Theo Bühler, Exact Categories, Expositiones Mathematicae, Volume 28, Issue 1 (2010).

[13] Cody Holdaway, Kevin Zatloukal, The Stable Category of a Frobenius Category is Triangulated, Manuscript.
https://sites.math.washington.edu/~julia/teaching/581D_Fall2012/StableFrobIsTriang.pdf.

[14] Thorsten Holm, Peter Jørgensen, Raphaël Rouquier, Triangulated Categories, Cambridge University Press (2010).

[15] Andrew Hubery, Notes on the Octahedral Axiom,
https://pdfs.semanticscholar.org/2246/900fb2f9694d965b6b6482f76d4d3c6b1206.pdf.

[16] Arthur Garnier, Localisation et catégories dérivées, manuscript (2016).