Éléments de théorie des distributions
Analyse de Fourier des distributions

MÉMOIRE DE MASTER 2

Owen GARNIER

Université de Picardie Jules Verne

Département de Mathématiques

Sous la direction de M. Olivier GOUBET

2019-2020

Table des matières

Introduction, prérequis et notations

La théorie des distributions dans sa forme moderne apparait dans la première moitié du vingtième siècle par les travaux de Laurent Schwartz (travaux qui lui vaudront la médaille Fields en 1950). Une idée fondatrice de ce concept consiste à ne plus étudier des fonctions en tant que telles, mais à les voir comme agissant sur un espace, celui des applications infiniment dérivables à support compact sur $\mathbb{R}^d$ (on parlera de fonctions test, ou de fonctions d'essai). Ce formalisme s'étend à des objets qui ne sont pas des fonctions à proprement parler, ainsi la masse de Dirac [1] n'est pas une fonction, c'est par contre une distribution. On peut ainsi effectuer de nombreuses opérations sur les distributions (dérivation, convolution) par dualité.

La grande souplesse des distribution provient en bonne partie de la rigidité de l'espace des fonctions tests, pendant inévitable à la définition des distributions. Les fonctions tests forment un espace vectoriel, que nous devons munir d'une topologie, pour pouvoir définir les distributions comme des formes linéaires continues, la notion d'espace vectoriel normé sera insuffisante pour bien rendre compte des propriétés que nous voulons mettre en avant, aussi nous intéressons nous en premier lieu à la notion d'espace de Fréchet.

Une fois introduites les premières notions de distributions, nous abordons quelques points de théorie de Fourier des distributions, qui nécéssiterons d'introduire la classe de Schwartz, espace mieux adapté que les fonctions test 'classiques'. Enfin, nous terminons par une étude rapide de quelques opérateurs différentiels classiques, les distributions ayant historiquement été introduites pour traiter des équations aux dérivées partielles, elles constituent une suite logique à notre exposition.

Ce travail ayant été en bonne partie effectué dans des circonstances tout-à-fait singulières et inédites, je tient tout particulièrement à remercier M. Olivier Goubet, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour lui avoir donné son but, ainsi que pour sa disponibilité et pour les références remarquables qu'il m'a fourni. Je tiens également à remercier mon frère Arthur et sa compagne, pour leur attention, leur hospitalité et pour les fructueuses discussions que j'ai eu le plaisir d'avoir, je remercie également ma mère, pour sa patience et son écoute.

Sans plus attendre, donnons quelques notations qui nous suivrons le long de ce travail :

- Pour toute fonction $f : E \to \mathbb{K}$ et $C \subset E$ on pose

$$\|f\|_{\infty,C} := \sup_{x\in C} |f(x)| \in \overline{\mathbb{R}_+}$$

  en particulier, si C est un compact de E et si f est continue, $\|f\|_{\infty,C}$ est fini.
- La notation classique de norme sera principalement utilisée pour les fonctions, afin d'alléger les écritures, on notera donc $|x|$ la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^d$.
- Pour $n \leqslant m$ deux entiers, on notera $[\![n, m]\!] = \{n, n+1, \cdots, m\}$

1. Qui à une fonction φ associe sa valeur en un point choisi

Première partie

Espaces de Fréchet

1.1 Motivation, premières définitions

La théorie des espaces vectoriels normés est largement étudiée et donne lieu à des résultats assez remarquables, notamment sur les espaces de dimension infinie (espaces de fonctions intégrables au sens de Lebesgue, espaces de Hilbert...).
Dans le cadre de la théorie des distributions, nous souhaitons nous intéresser à des espaces de fonctions régulières, cependant il est difficile de munir ces espaces d'une norme convenable :

Exemple 1.1.1. Considérons l'espace $E = \mathcal{C}^1([0,1])$ des fonctions $[0,1] \to \mathbb{R}$ continûment dérivables, il est clairement inclus dans $\mathcal{C}([0,1])$ (les fonctions continues).
On souhaite donc munir E d'une norme rendant cette inclusion continue, or la norme naturelle sur $\mathcal{C}([0,1])$ est la norme $\|.\|_\infty$, qui en fait un espace de Banach, on pourrait donc également munir E de cette norme. Cependant l'espace obtenu n'est pas complet, considérons en effet la suite de fonctions

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x + \frac{1}{n}} \end{array}$$

Ces fonctions sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$, et convergent uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, une solution efficace à ce problème consiste à 'corriger' la norme pour prendre en compte la dérivée des f_n, on considère ainsi la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

et l'on s'aperçoit que la suite (f_n) n'est pas convergente pour cette norme (elle n'est pas de Cauchy). On obtient ainsi une inclusion continue de E dans $\mathcal{C}([0,1])$, avec une norme sur E en faisant un espace de Banach.

Une astuce similaire donne une norme sur $\mathcal{C}^m([0,1])$ donnée par la somme des normes infinies des dérivées. Mais nous rencontrons un problème quand nous considérons l'espace $\mathcal{C}^\infty([0,1])$, notre astuce nous fait défaut, à moins de considérer des sommes infinies, à priori dangereuses à manipuler. Une solution naturelle à ce problème est la notion d'espace localement convexe métrisable.
On considère à présent E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.2. On dit qu'une fonction $P : E \to \mathbb{R}_+$ est une ***semi-norme*** si

- Pour $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $P(\lambda x) = |\lambda| P(x)$ (homogénéité).
- Pour $x, y \in E$, on a $P(x + y) \leqslant P(x) + P(y)$ (inégalité triangulaire)

Ainsi, une norme est exactement une semi norme telle que $P(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Définition 1.1.3. On considère une suite $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite croissante[2] de semi-normes sur E, avec la propriété

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} P_i^{-1}(0) = \{0\}$$

(i.e 0 est le seul élément nul sous chacune des semi-normes). L'espace E muni d'une telle suite est dit ***localement convexe métrisable***.

2. Si $i \leqslant j$, alors $P_i(x) \leqslant P_j(x)$ pour $x \in E$

Proposition 1.1.4. *Soient $(E, (P_i)_{i\in\mathbb{N}})$ un espace localement convexe métrisable, et $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive sommable. L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par*

$$d(x,y) := \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i \min\left(1, P_i(x-y)\right)$$

définit une distance sur E.

Démonstration. Premièrement, $d(x,y)$ est définie comme une série de terme général positif, convergente car de terme général majoré par α_i. Donc d est bien définie et à valeurs positives. Soient ensuite $x, y \in E$ tels que $d(x,y) = 0$, on a alors

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_i(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

par la condition de la définition 1.1.3. Ensuite, la symétrie de d découle immédiatement de l'homogénéité des P_i. Enfin, soient $x, y, z \in E$, on a

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i \min\left(1, P_i(x-z)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i \min\left(1, P_i(x-y+y-z)\right) \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i \min\left(1, P_i(x-y)\right) + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i \min\left(1, P_i(y-z)\right) \\ &= d(x,y) + d(y,z) \end{aligned}$$

d'où l'inégalité triangulaire pour d, qui forme donc bien une distance sur E. □

Remarque 1.1.5. C'est ici qu'intervient le terme 'métrisable' dans la définition. On peut en effet choisir de munir E d'une famille de semi-norme indexée sur un ensemble ordonné filtrant (deux éléments admettent un majorant commun), auquel cas il n'y a pas de notion claire de distance. On ne s'intéressera dans cette section qu'au cas métrisable, (le seul recours au cas général dont nous aurions besoin sera contourné, il concerne les espace de fonctions lisses à support compact).

Remarque 1.1.6. La distance que nous avons donné à la proposition 1.1.4 munit E d'une structure d'espace métrique, pour laquelle l'addition et la multiplication scalaire sont des opérations continues (on dit que (E,d) est un ***espace vectoriel topologique***).

Exemple 1.1.7. Un espace vectoriel normé est un cas très particulier d'espace localement convexe métrisable, où toutes les semi-normes sont égales (et donc égales à la norme de l'espace).

Ceci dit, la métrique que nous utilisons est plutôt désagréable à manipuler (l'expression des boules ouvertes par exemple est beaucoup moins maniable que dans le cas d'un espace vectoriel normé classique), on souhaite donc exhiber des outils plus efficaces.

Lemme 1.1.8. *Sous les hypothèses de la proposition 1.1.4, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E, on a équivalence entre*

(i) La suite (x_n) converge vers $x \in E$.

(ii) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite réelle $(P_i(x_n - x))$ converge vers 0.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Pour $x, y \in E$ et $i \in \mathbb{N}$, on a

$$\min(P_i(x-y), 1) \leqslant \frac{1}{\alpha_i}\alpha_i \min(1, P_i(x-y)) \leqslant \frac{1}{\alpha_i} d(x,y)$$

En particulier, si $d(x_n, x)$ tend vers 0, il en va de même de $\min(P_i(x_n - x), 1)$, ce qui n'est possible que si $P_i(x_n, x)$ converge vers 0.
$(ii) \Rightarrow (i)$ On voit la distance $d(x_n, x)$ comme une intégrale d'une suite de 'fonctions' :

$$d(x_n, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \min(1, P_i(x_n - x)) = \sum_{i=0}^{\infty} u_n(i)$$

Or, on a par hypothèse que pour tout $i \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} u_n(i) = 0$, et par ailleurs, $|u_n(i)| \leqslant \alpha_i$ qui est une suite sommable. On conclut alors par convergence dominée. □

Lemme 1.1.9. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et P une semi-norme sur E. On appelle* **semi-boule** *centrée en $x \in E$ et de rayon ε l'ensemble*

$$\mathcal{B}_P(x, \varepsilon[:= \{y \in E \mid P(x-y) < \varepsilon\}$$

Sous les hypothèses de la proposition 1.1.4, une partie V de E est un voisinage de $x \in E$ si et seulement si V contient une semi-boule centrée en x.

Démonstration. Si V est voisinage de x, in existe une boule (pour d) centrée en x de rayon ε contenue dans V. Quitte à réduire ε, on peut supposer que $\varepsilon/\alpha_i < 1$, auquel cas $d(x,y) < \varepsilon$ entraîne $P_i(x-y) < 1$ et $P_i(x-y) \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha_i}$, ainsi, V contient la semi boule $\mathcal{B}_{P_i}(x, \varepsilon/\alpha_i[$.
Réciproquement, le lemme précédent nous apprend en particulier que les semi-normes sont continues pour la topologie induite par d (caractérisation séquentielle de la continuité). En particulier, les semi-boules ouvertes sont des ouverts d'où le résultat. □

Á présent, nous souhaitons avoir une notion adéquate de morphisme entre espaces localement convexe métrisable, on souhaite naturellement se tourner vers les applications linéaires continues, et si possible retrouver une caractérisation de la continuité (presque) aussi agréable que pour le cas des espaces vectoriels normés :

Proposition 1.1.10. *Soient $(E, (P_i)_{i\in\mathbb{N}})$, $(F, (Q_k)_{k\in\mathbb{N}})$ deux espaces localement convexes métrisables, $(\alpha_i)_{i\in N}$ et $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives sommables. On obtient ainsi deux distances d et δ, respectivement sur E et F.*
Pour $L : E \to F$ une application linéaire, on a équivalence entre

(i) L est continue.

(ii) L est continue en 0.

(iii) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ et $i \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall x \in E, Q_k(f(x)) \leqslant C P_i(x)$$

Démonstration. L'équivalence entre (i) et (ii) est bien connue et vaut dés que E et F sont des espaces vectoriels topologiques.
Montrons $(iii) \Rightarrow (ii)$: soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers 0, et soit $k \in \mathbb{N}$, par hypothèse, on a

$$Q_k(f(x_n)) \leqslant CP_i(x_n)$$

donc la suite $(Q_k(f(x_n)))$ converge vers 0 quel que soit $k \in \mathbb{N}$, on conclut par le lemme 1.1.8.
Réciproquement, si f est continue en 0, l'image réciproque de la semi-boule $\mathcal{B}_{Q_k}(0, 1[$ est un voisinage ouvert de 0, donc contenir une semi-boule de la forme $\mathcal{B}_{P_i}(0, \varepsilon[$, on a donc

$$P_i(x) < \varepsilon \Rightarrow Q_k(f(x)) < 1$$

d'où, par homogénéité, $Q_k(f(x)) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}P_i(x)$ pour $x \in E$, soit le résultat voulu. □

Corollaire 1.1.11. *Soit $(E, (P_i)_{i\in\mathbb{N}})$ un espace localement convexe métrisable, deux suites $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ strictement positives et sommables induisent des distances uniformément équivalentes sur E.*
Ainsi, la seule donnée des semi-normes $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suffit à caractériser la métrique de E.

Corollaire 1.1.12. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de semi-normes qui munissent E de deux structures d'espaces localement convexe métrisables. Ces deux structures sont isométriques si et seulement si*

$$(\forall k \in \mathbb{N}, \exists C > 0, i \in \mathbb{N} \mid Q_k \leqslant CP_i) \quad \textit{et} \quad (\forall i \in \mathbb{N}, \exists C' > 0, k \in \mathbb{N} \mid P_i \leqslant C'Q_k)$$

À présent, comme dans le cas des espaces vectoriels normés, on s'intéresse au cas particulier des espaces complets.

Remarque 1.1.13. Soit $(E, (P_i)_{i\in\mathbb{N}})$ un espace localement convexe métrisable, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est de Cauchy si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(P_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Définition 1.1.14. Un ***espace de Fréchet*** est un espace localement convexe métrisable complet pour sa distance.

Théorème 1.1.15. *Soient $(E, (P_i)_{i\in\mathbb{N}})$ un espace de Fréchet, $(F, (Q_k)_{k\in\mathbb{N}})$ un espace localement convexe métrisable, et $L_n : E \to F$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F. Si la suite (L_n) converge simplement vers une fonction L, alors*

(a) La famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists C > 0, i \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x \in E, Q_k(L_n(x)) \leqslant CP_i(x)$$

(b) Pour tout compact $K \subset E$, la convergence de la suite (L_n) vers L est uniforme sur K :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} \|Q_k(L_n - L)\|_{\infty,K} = 0$$

Démonstration.

Lemme 1.1.16. *Soit $C \subset E$ un sous ensemble convexe symétrique (stable par opposé). Si C est d'intérieur non vide, alors C est un voisinage de 0.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe $x \in C$ dont C est voisinage, donc C contient une semi-boule de la forme $\mathcal{B}_{P_i}(x, \varepsilon[$, par symétrie, C contient alors $\mathcal{B}_{P_i}(-x, \varepsilon[$. Par convexité, C contient $\mathcal{B}_{P_i}(0, \varepsilon[$ et est donc un voisinage de 0. $\square$

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose pour $p \in \mathbb{N}$

$$C_p = \{x \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, Q_k(L_n(x)) \leqslant p\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}(\mathcal{B}_{Q_k}(0, p])$$

les C_p sont des fermés de E, de plus pour $x \in E$, la suite $(L_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour Q_k car convergente, les C_p recouvrent donc E.
Comme E est un espace métrique complet, le théorème de Baire nous apprend que les C_p ne peuvent tous être d'intérieur vide. ensuite, les C_p sont symétriques par linéarité des L_n et homogénéité de Q_k : il existe donc par le lemme un $p \in \mathbb{N}$ tel que C_p soit un voisinage de 0. Ainsi, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que C_p contienne une semi-boule centrée en 0 : il existe $i \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$P_i(x) < \varepsilon \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, Q_k(L_n(x)) \leqslant p$$

par homogénéité, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q_k(L_n(x)) \leqslant \frac{p}{\varepsilon} P_i(x)$$

ce qui est bien l'équicontinuité de la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(b) C'est un fait général sur les familles équicontinues de fonctions définies sur un compact : soient $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ et $i \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait (a).
On recouvre K par un nombre fini de semi-boules pour P_i de rayon $\varepsilon/3C$. En notant g_λ les centres de ces boules, on a

$$\forall x \in K, \exists g_\lambda \mid \forall n \in \mathbb{N}, Q_k(L_n(x) - L_n(g_\lambda)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3C}$$

et ceci reste valable pour L. Comme l'ensemble des g_λ est fini, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $Q_k(L(g_\lambda) - L_n(g_\lambda)) \leqslant \varepsilon/3C$, on obtient alors le résultat souhaité par inégalité triangulaire. $\square$

Théorème 1.1.17. *(Banach-Steinhaus)*
Soient $(E, (P_i)_{i \in \mathbb{N}})$ un espace de Fréchet, $(F, (Q_k)_{k \in \mathbb{N}})$ un espace localement convexe métrisable, et $L_n : E \to F$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F.
Si (f_n) converge simplement vers une fonction f, alors cette dernière est linéaire continue. De plus si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E convergeant vers $x \in E$, alors $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$

Démonstration. On va largement utiliser le théorème précédent. Le premier point découle immédiatement de l'équicontinuité de la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$: soit $k \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ et $i \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x \in E Q_k(L_n(x)) \leqslant C P_i(x)$$

En particulier, en laissant n tendre vers $+\infty$, on obtient

$$\forall x \in E, Q_k(L(x)) \leqslant C P_i(x)$$

d'où la continuité de L_n.
Pour le second point, l'ensemble consitué des x_n et de leur limite x est un compact de E, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \max_{y\in\{x_n,x\}} Q_k(L_n(y)-L(y))=0$$

Or, on a

$$Q_k(f_n(x_n)-f(x)) \leqslant Q_k(f_n(x_n)-f(x_n))+Q_k(f(x_n)-f(x))$$

Les deux termes de cette somme tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'où le résultat. $\square$

Ce dernier résultat possède un corollaire fort utile sur la continuité des applications bilinéaires (nous l'utiliserons sur la convolution des distributions)

Corollaire 1.1.18. *Soient E un espace de Fréchet, F un espace localement convexe métrisable, D un espace vectoriel muni d'une notion de convergence. Si $B : D\times E\to F$ est une application bilinéaire telle que*

- *Pour $y\in E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de D convergeant vers $x\in D$, on a $\lim_{n\to\infty} B(x_n,y)=B(x,y)$*
- *Pour $X\in D$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E convergeant vers $y\in E$, on a $\lim_{n\to\infty} B(x,y_n)=B(x,y)$*

Alors B est séquentiellement continue : si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de D et E (respectivement) qui convergent vers x et y, alors $(B(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $B(x,y)$.

Démonstration. Posons $L_n(y):=B(x_n,y)$, les fonctions $L_n : E\to F$ sont linéaires continues par le second point, et elles convergent simplement vers la fonction $L : y\mapsto B(x,y)$ par le second point. Le résultat découle alors directement du théorème précédent. $\square$

1.2 Exemples d'espaces de Fréchet, inclusions

Comme promis, nous allons maintenant nous intéresser à la structure particulière de certains espaces fonctionnels.

1.2.1 Fonctions localement intégrables

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on considère l'espace

$$L^1_{loc}(\Omega)=\left\{f:\Omega\to\mathbb{K} \mid \forall K\subset\Omega \text{ compact, } \|f\|_{1,K}<\infty\right\}$$

Cet espace est évidemment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui contient $L^1(\Omega)$, mais on ne peut pas le munir d'emblée de la norme $\|.\|_1$, celle ci n'étant pas bien définie.

On rappelle que tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ admet une ***suite exhaustive de compacts*** : une famille $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'ensembles compacts inclus dans Ω avec

- $\forall i\in\mathbb{N}, K_i\subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$
- $\Omega=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$.

Soit $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω, on pose

$$P_i(x) = \int_{K_i} |f| d\lambda = \|f\|_{1,K_i}$$

Proposition 1.2.1. *Les fonctions P_i sont des semi-normes qui munissent $L^1_{loc}(\Omega)$ d'une structure d'espace de Fréchet. De plus, deux choix de suites exhaustives de compacts pour Ω donnent des métriques isomorphes.*

Démonstration. Les fonctions P_i clairement des semi-normes, la suite $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante car la suite $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante (pour l'inclusion). Ensuite, soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $P_i(f) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, cela signifie que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $f_{|K_i} = 0$ presque partout dans K_i. Comme l'union des K_i recouvre Ω, on a bien que f est presque partout nulle sur Ω. Pour montrer que $(L^1_{loc}, (P_i)_{i\in\mathbb{N}})$ est de Fréchet, il reste à montrer qu'il est complet, soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E, on a par définition que pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(f_{n|K_i})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^1(K_i)$, ce dernier espace étant complet, on définit $g_i \in L^1(K_i)$ comme la limite de cette suite. Pour $i \in \mathbb{N}$, la restriction de f_n à K_{i+1} donne une suite convergente vers g_{i+1}, donc $g_{i+1|K_i} = g_i$: on peut donc définir $g : \Omega \to \mathbb{K}$ par $g_{|K_i} := g_i$. Par construction, la fonction g est limite dans $L^1_{loc}(\Omega)$ de la suite (f_n).
Soit à présent une seconde suite exhaustive de compacts $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui induit des semi-normes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on a

$$K_i \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{L}_{k+1}$$

De ce recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement fini, comme la suite $\overset{\circ}{L}_{k+1}$ est croissante, on a alors

$$\exists k \in \mathbb{N} \mid K_i \subset L_k$$

on a alors $\|.\|_{1,K_i} \leqslant \|.\|_{1,L_k}$. Par symétrie des rôles des (L_k) et des (K_i), on obtient le résultat voulu par le corollaire 1.1.12 $\square$

Remarque 1.2.2. Pour cette topologie, l'injection naturelle $L^1(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$ est continue. En effet, la convergence en norme L^1 sur Ω entraîne en particulier la convergence en norme L^1 sur tous les sous-ensembles K_i.
Cependant, cette inclusion n'est pas un homéomorphisme sur son image : considérons par exemple $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, pour la suite exhaustive de compacts $K_i = [-i, i]$, la suite $f_n = \mathbb{1}_{]n,n+1[}$ converge dans $L^1(\mathbb{R})$ pour la topologie de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, mais pas pour celle de $L^1(\mathbb{R})$: la topologie naturelle de $L^1(\Omega)$ est plus fine que sa topologie comme sous-espace de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
De plus, la suite $f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]}$ est une suite de $L^1(\mathbb{R})$, qui converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ pour sa topologie vers la fonction constante égale à 1. Cependant, cette fonction n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, ainsi, $L^1(\mathbb{R})$ est un sous-espace non fermé de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Remarque 1.2.3. Un construction similaire peut s'appliquer aux espaces $L^2_{loc}(\Omega)$ et $L^\infty_{loc}(\Omega)$.

1.2.2 Fonctions lisses sur un compact

Nous commençons par donner quelques rappels et notations :

- Le support de $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ est défini comme l'adhérence des points où φ ne s'annule pas, ou de manière équivalente comme le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel φ est nulle.
- Pour φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on pose

$$\partial^\alpha \varphi := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} \varphi$$

- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on dit que $\beta \leqslant \alpha$ si $\beta_i \leqslant \alpha_i$ pour tout $i \in [\![1, d]\!]$. Pour $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ infiniment dérivables et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} g$$

  Où $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d}$ (formule de Leibniz).

À présent, on considère $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact, et $\mathcal{D}(K)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$, dont le support est inclus dans K. On munit cet espace de la famille de semi-normes $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définie par

$$P_i(\varphi) := \sum_{|\alpha| \leqslant i} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K}$$

Proposition 1.2.4. *Les semi-normes $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ munissent $\mathcal{D}(K)$ d'une structure d'espace de Fréchet, dans lequel la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers φ si et seulement si*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \lim_{n \to \infty} \|\partial^\alpha \varphi_n - \partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K} = 0$$

Autrement dit, si l'on a convergence uniforme de φ_n et de ses dérivées.

Démonstration. La linéarité de la dérivation et de la somme donnent directement que les P_i sont des semi-normes, de plus, si $P_i(\varphi) = 0$, alors en particulier (pour $\alpha = 0$), on a $\|\varphi\|_{\infty, K} = 0$, et donc $\varphi = 0$ sur K, donc φ est identiquement nulle. Ainsi, $\mathcal{D}(K)$ est muni d'une structure d'espace localement convexe métrisable par les $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$, la condition de convergence que nous avons donné découle immédiatement de la définition des P_i
Soit enfin $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{D}(K)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la suite $(\partial^\alpha \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur K, et donc converge vers une certaine fonction v_α. Or, on sait que si (φ_n) converge uniformément vers v_0, que ses dérivées partielles sont continues et convergent uniformément, alors leurs limites sont les dérivées partielles de v_0, en appliquant ce résultat par réccurence, on obtient que $\partial^\alpha v_0 = v_\alpha$, on a alors bien le résultat voulu. □

1.2.3 Fonctions lisses (à support compact) sur un ouvert

Nous avons réglé le cas des fonctions lisses à support dans un compact fixé, nous nous intéressons à présent , pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, à l'espace $\mathcal{E}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}(\Omega)$) formés des fonctions $\Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ (resp. à support inclus dans Ω).

Remarque 1.2.5. Il ne faut surtout pas confondre $\mathcal{E}(\Omega)$ avec $\mathcal{D}(\Omega)$, le second étant constitué de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ à support compact inclus dans Ω. Par exemple la fonction constante égale à 1 sur Ω est un élément de $\mathcal{E}(\Omega)$ et pas de $\mathcal{D}(\Omega)$. On a par contre une inclusion évidente $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$, nous allons voir que ces deux espaces sont munis d'une topologie de manière assez différente.

À ce stade, il convient de justifier que $\mathcal{D}(\Omega)$ est non trivial :

Lemme 1.2.6. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert non vide, alors l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.*

Démonstration. Considérons la fonction $\Phi : t \mapsto \mathbb{1}_{t>0}e^{-1/t}$ définie sur $\mathbb{R}$, il s'agit d'une fonction croissante, positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$ par une récurrence immédiate.
Si $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ sont tels que $\mathcal{B}(x_0, r] \subset \Omega$, alors on pose

$$\forall x \in \Omega,\ \varphi(x) = \Phi(r^2 - \|x - x_0\|^2)$$

On obtient une fonction infiniment dérivable dont le support est la boule $\mathcal{B}(x_0, r] \subset \Omega$, ce qui termine la preuve. □

Corollaire 1.2.7. *(Fonctions plateau)*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et $K \subset \Omega$ un compact de $\mathbb{R}^d$. Il existe $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$0 \leqslant \theta \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \theta = 1 \text{ sur un voisinage de } K$$

On dit que θ est une **fonction plateau** *pour K (dans Ω).*

En pratique, on considèrera par défaut qu'une fonction plateau est à support compact. Revenons en à la topologie, on considère à nouveau une suite exhaustive de compacts $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour Ω, et on pose

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega), \quad P_i(\varphi) := \sum_{|\alpha| \leqslant i} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K_i}$$

Proposition 1.2.8. *L'espace $\mathcal{E}(\Omega)$, muni des semi-normes $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ forme un espace de Fréchet. La convergence de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers φ est équivalente à la convergence uniforme de φ_n et de ses dérivées vers celles de φ sur chacun des K_i (et plus largement sur chaque compact de Ω).*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ telle que $P_i(\varphi) = 0$, on a en particulier $\|\varphi\|_{\infty, K_i} = 0$ et φ est nulle sur K_i, si ceci est vrai pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors φ est identiquement nulle.
Ensuite, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{E}(\Omega)$, alors elle est uniformément de Cauchy (ainsi que ses dérivées) sur tout compact de Ω, ainsi, on a convergence de (φ_n) (et de ses dérivées) vers une fonction g_K sur le compact $K \subset \Omega$, l'argument de recollement de la proposition 1.2.1 permet alors de conclure. □

À nouveau, on pourrait choisir de munir $\mathcal{D}(\Omega)$ de la topologie induite par celle de $\mathcal{E}(\Omega)$, mais à nouveau cela pose problème : la structure obtenue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas une structure d'espace de Fréchet car celui-ci n'est pas fermé dans $\mathcal{E}(\Omega)$

Exemple 1.2.9. Sur $\Omega = \mathbb{R}$, on considère φ une fonction lisse positive (non triviale) à support dans $[0,1]$. Quitte à la normaliser, on peut la supposer d'intégrale 1. On pose alors

$$\psi_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i}\tau_i\varphi$$

La suite (ψ_m) est une suite de Cauchy de $\mathcal{E}(\Omega)$, en effet, pour $m > n$, on a

$$(\psi_m - \psi_n) = \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i}\tau_i\varphi$$

Comme on munit $\mathbb{R}^n$ de la suite de compact donnée par $K_k := [-k, k]$, la suite (ψ_m) restreinte à K_k est constante à partir du rang $k+1$, donc

$$P_k(\psi_m - \psi_n) = \sum_{\alpha \leqslant i} \left\|(\psi_m - \psi_n)^{(\alpha)}\right\|_{\infty, K_k} = 0$$

Cependant, la limite de la suite (ψ_n) n'est clairement pas à support compact, alors que chacun des termes de la suite l'est.

On veut donc trouver une 'meilleure' topologie sur $\mathcal{D}(\Omega)$, on sait déjà (par définition) que $\mathcal{D}(\Omega)$ est réunion des $\mathcal{D}(K)$ pour $K \subset \Omega$ compact. Pour $K \in \Omega$, on note $\iota_K : \mathcal{D}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ l'inclusion canonique, il s'agit d'une application linéaire, et pour la 'rendre continue', on munit $\mathcal{D}(\Omega)$ de la topologie finale associée à ces injections.

Proposition 1.2.10. *Pour $K \subset K'$ deux compacts inclus dans Ω, on a une inclusion linéaire continue $\iota_{K',K} : \mathcal{D}(K) \hookrightarrow \mathcal{D}(K')$. Ainsi, la famille $(\mathcal{D}(K))_{K\subset\Omega}$ forme un ensemble ordonné filtrant à droite : deux éléments admettent un majorant.*

Démonstration. Les $\iota_{K',K}$ sont clairement linéaires, montrons qu'ils sont continus : Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(K)$, convergeant vers $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, comme les φ_n ainsi que φ sont à support dans K, on a

$$\forall i \in \mathbb{N}, P_{i,K}(\varphi_n - \varphi) = \sum_{|\alpha|\leqslant i} \|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)\|_{\infty,K} = \sum_{|\alpha|\leqslant i} \|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)\|_{\infty,K'} = P_{i,K'}(\varphi_n - \varphi)$$

Ainsi, la suite (φ_n) converge également vers φ dans $\mathcal{D}(K')$, d'où la continuité de $\iota_{K',K}$.
Ensuite, pour deux compacts K et K' inclus dans Ω (sans forcément d'inclusion entre l'un et l'autre), l'ensemble $K'' := K \cup K'$ est encore un compact inclus dans Ω, donc $\mathcal{D}(K)$ et $\mathcal{D}(K')$ sont tous deux inclus dans $\mathcal{D}(K'')$, d'où le résultat. □

Proposition 1.2.11. *Muni de la topologie finale associée aux ι_K, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est la limite inductive des $\mathcal{D}(K)$ comme espace vectoriel topologique : pour tout espace vectoriel topologique E, muni d'une famille i_K d'applications linéaires continues $\mathcal{D}(K) \to E$ qui commute aux $\iota_{K,K'}$, alors il existe une unique application linéaire continue $\theta : \mathcal{D}(\Omega) \to E$ telle que*

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact }, \theta\iota_K = i_K$$

Démonstration. Par définition, on remarque dans un premier temps que les injection ι_K commutent aux $\iota_{K,K'}$.
On raisonne ensuite par analyse synthèse, si θ respecte la factorisation souhaitée, on a en particulier que $\theta_{|\mathcal{D}(K)} = i_k$ (par définition). Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{Supp}\ \varphi)$ et donc on doit définir $\theta(\varphi)$ comme $i_{\mathrm{Supp}\ \varphi}(\varphi)$, si ceci a du sens, alors θ est unique. Nous devons donc montrer que cette définition est univoque : soient deux compacts K, K' tels que $\mathcal{D}(K)$ et $\mathcal{D}(K')$ contiennent φ, on a

$$i_K(\varphi) = i_{K\cup K'} \circ \iota_{K\cup K',K}(\varphi) = i_{K\cup K'} \circ \iota_{K\cup K',K'}(\varphi) = i_{K'}(\varphi)$$

donc $\theta(\varphi)$ est bien défini. Ensuite, θ est clairement linéaire, et continue par propriété de la topologie finale : $\theta \circ \iota_K = i_K$ est continue pour tout compact $K \subset \Omega$. □

Corollaire 1.2.12. *La topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ est plus fine que sa topologie induite par $\mathcal{E}(\Omega)$ (autrement dit, l'injection $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ est continue).*

Démonstration. Comme l'espace $\mathcal{E}(\Omega)$ contient en particulier les $\mathcal{D}(K)$ pour $K \subset \Omega$ compact, la proposition précédente nous donne l'existence et l'unicité d'une application linéaire continue $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega)$ qui commute aux injection $\iota_{K',K}$, or la seule application respectant cette condition de commutativité est l'injection canonique $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$, qui doit donc être continue. □

Remarque 1.2.13. On peut montrer que la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ est strictement plus fine que sa topologie induite par $\mathcal{E}(\Omega)$, en effet, $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas métrisable.

Proposition 1.2.14. *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$, elle converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement si on a les deux propriétés suivantes*

(a) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, on ait $\mathrm{Supp}\ \varphi_n \subset \mathrm{Supp}\ \varphi$ (propriété du support captif).

(b) On a convergence uniforme de φ_n et de ses dérivées vers φ sur $\mathrm{Supp}\ \varphi$.

Démonstration. Rappelons que dans le cas non métrisable, la convergence ne caractérise pas toujours la topologie, mais la topologie caractérise toujours la convergence (par définition).
Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ, soit U un voisinage de φ dans $\mathcal{D}(\mathrm{Supp}\ \varphi)$, il s'agit également d'un voisinage de φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (par définition de la topologie finale). Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_n \in U$ pour $n \geqslant N$, en particulier, on a $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathrm{Supp}\ \varphi)$ et $\mathrm{Supp}\ \varphi_n \subset \mathrm{Supp}\ \varphi$, d'où (a). On peut ainsi voir φ_n comme une suite de $\mathcal{D}(K)$, qui converge dans $\mathcal{D}(K)$ (car celui-ci a la même topologie que sa topologie induite par $\mathcal{D}(\Omega)$), d'où (b).
Réciproquement, si on a (a) et (b), on peut voir (φ_n) comme une suite de $\mathcal{D}(\mathrm{Supp}\ \varphi)$ (quitte à la tronquer), avec convergence vers φ dans $\mathcal{D}(\mathrm{Supp}\ \varphi)$, on conclut par continuité de l'injection $\iota_{\mathrm{Supp}\ \varphi}$. □

Remarque 1.2.15. On déduit immédiatement de cette proposition que la limite d'une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$, si elle existe, est unique.

Deuxième partie
Distributions, rappels et compléments

Nous avons jusqu'à présent défini certaines topologies sur des espaces de fonctions régulières, la théorie des distributions consiste à s'intéresser aux duaux topologiques de tels espaces.

2.1 Notions de distributions, premiers exemples

Une idée clef derrière la notion de distribution est de lire une fonction dans un sens nouveau : en les faisant agir sur les espaces de fonctions régulières. Le lemme suivant nous permet d'affirmer qu'une fonction est entièrement déterminée par son action sur les espaces de fonctions tests.

Lemme 2.1.1. *(Lemme fondamental du calcul des variations)*
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0$$

alors $u = 0$ presque partout sur Ω.

Démonstration. On commence par considérer le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ et $f \in L^1(\Omega)$, on considère ρ_ε une suite régularisante à support compact, on a toujours

$$(f * \rho_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy = 0$$

Donc $f = \lim_{\varepsilon\to 0} f * \rho_\varepsilon = 0$ (la limite est prise dans $L^1(\mathbb{R}^d)$).
À présent, dans le cas général, soit $K \subset \Omega$ un compact, et ψ une fonction plateau pour K à support dans K' un autre compact de Ω, on a $f\psi \in L^1(\Omega)$, et même $f\psi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ en la prolongeant par 0. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et

$$0 = \int_\Omega f(x)(\psi(x)\varphi(x))dx = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x)\psi(x))\varphi(x)dx$$

donc $f\psi$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^d$, et $f = 0$ sur K, ceci étant vrai pour tout compact K de Ω, on a bien le résultat voulu. □

Nous pouvons à présent présenter la notion de distribution :

Définition 2.1.2. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ le dual topologique de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ (pour la topologie définie à la partie précédente), ses éléments sont appelés ***distributions***.

Proposition 2.1.3. *Soit $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. On a équivalence entre*

(i) T est une distribution.

(ii) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans K, on ait

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C_K \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\leqslant p_K}} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K}$$

De plus, on dit que T est une distribution **d'ordre** *$p \in \mathbb{N}$ si on peut choisir p_K pour avoir*

$$\sup_{\substack{K\subset\Omega \\ K \, compact}} p_K = p$$

Démonstration. Cette proposition exprime simplement le fait que $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ est continue si et seulement si sa restriction aux $\mathcal{D}(K)$ est continue, ce que l'on teste avec le critère de la proposition 1.1.10 □

Remarque 2.1.4. Il existe des distributions d'ordre infini (autrement dit telles que, pour un compact $K \subset \Omega$ bien choisi, p_k doive-t-être choisi plus grand que tout $n \in \mathbb{N}$).

Pour munir $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une topologie, on s'intéresse aux applications

$$\begin{array}{rccc} ev_\varphi : & \mathcal{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & T & \longmapsto & \langle T, \varphi\rangle \end{array}$$

On souhaite que ces applications soient continues, on munit donc $\mathcal{D}'(\Omega)$ de la topologie initiale associée à ces évaluations. Ainsi, une base des ouverts de $\mathcal{D}'(\Omega)$ est formée des intersections finies d'ensembles de la forme $ev_\varphi^{-1}(U)$ où $U \subset \mathbb{K}$ est un ouvert.

Proposition 2.1.5. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On a équivalence entre :*

(i) La suite (T_n) converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$

(ii) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $(\langle T_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle T, \varphi\rangle$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T, alors pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite $(ev_\varphi(T_n))$ converge vers $ev_\varphi(T)$, ce qui est exactement (ii).
$(ii) \Rightarrow (i)$ Soit $U \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ un ouvert contenant T, il existe $(\varphi_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ une famille de $\mathcal{D}(\Omega)$, ainsi que $(U_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{K}$ telle que

$$T \in \bigcap_{i=1}^n ev_{\varphi_i}^{-1}(U_i) \subset U$$

Par hypothèse sur (T_n), on a

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \exists N_i \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N_i \Rightarrow \langle T_n, \varphi_i\rangle \in U_i$$

On pose $N = \max(N_i)$, pour $n \geqslant N$, on a alors

$$\forall i \in [\![1, k]\!], ev_{\varphi_i}(T_n) \in U_i \Leftrightarrow T_n \in \bigcap_{i=1}^n ev_{\varphi_i}^{-1}(U_i)$$

on a donc $T_n \in U$ pour $n \geqslant N$, ce qui prouve la convergence de (T_n) vers T. □

Remarque 2.1.6. On a unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T et S, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, donc $S = T$.

Remarque 2.1.7. La même méthode nous permettra de munir d'autres espaces de distributions (sur d'autres espaces de fonctions régulières comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$) d'une topologie.

Exemple 2.1.8. Soit (χ_n) une approximation de l'unité, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle \chi_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_n(x)\varphi(x)dx = \chi_n * \check{\varphi}(0)$$

Ceci converge vers $\check{\varphi}(0) = \varphi(0)$, donc $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 2.1.9. *Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites respectivement de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et de $\mathcal{D}(\Omega)$, convergeant respectivement vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*
Alors la suite $(\langle T_n, \varphi_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle T, \varphi \rangle$.

Démonstration. Par définition de la convergence des fonctions test, la suite (φ_n) converge vers φ dans un certain $\mathcal{D}(K)$, où $K \subset \Omega$ est un compact. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(K) \times \mathcal{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\psi, S) & \longmapsto & \langle S, \psi \rangle \end{array}$$

Comme $\mathcal{D}(K)$ est un espace de Fréchet, on peut appliquer le corollaire 1.1.18 qui donne le résultat. $\square$

Nous pouvons à présent expliciter en quoi les distributions fournissent une 'généralisation' au concept classique de fonction :

Proposition 2.1.10. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ un ouvert, on pose*

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\text{Supp }\varphi} f(x)\varphi(x)d\lambda$$

On obtient ainsi une injection continue $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration. L'application $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est clairement une forme linéaire, ensuite, pour $K \subset \Omega$ un compact, et $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, on a

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leqslant \int_K |f||\varphi|d\lambda \leqslant \|f\|_{1,K} \|\varphi\|_\infty$$

Donc T_f est une distribution, d'ordre 0, sur Ω. De plus, l'application T est injective d'après le lemme fondamental du calcul des variations (lemme 2.1.1). Pour vérifier la continuité de l'injection T, il suffit de tester la continuité des applications

$$ev_\varphi \circ T : f \mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f\varphi d\lambda$$

cette application est linéaire, et on a, pour $K \subset \Omega$ un compact contenant Supp φ

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \leqslant \int_K |f||\varphi| d\lambda \leqslant \|f\|_{1,K} \|\varphi\|_\infty$$

on a bien la continuité de $ev_\varphi \circ T$ par la proposition 1.1.10. □

En pratique, on identifiera f et T_f pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Cette définition permettra de définir des opérations habituellement réservées a des classes particulières de fonctions (dérivation, transformée de Fourier...).

Remarque 2.1.11. Par ailleurs, on a $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, donc toute fonction $L^p_{loc}(\Omega)$ induit une distribution (d'ordre 0), et cette correspondance est injective (et continue).

Ceci dit, toute les distributions ne sont pas des fonctions : considérons la forme linéaire $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ (pour $x \in \Omega$) définie par

$$\langle \delta_x, \varphi\rangle := \varphi(x)$$

comme φ est une fonction continue, ceci est bien défini, et, comme $|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|$, δ_x définit bien une distribution sur Ω, c'est la ***masse de Dirac*** en $x \in \Omega$.

De plus, toutes les fonctions usuelles ne sont pas localement intégrables, si l'on prend par exemple la fonction $f : x \mapsto x^{-1}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, il est bien connu que f n'est pas intégrable sur $]0,1[$: si $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un ouvert contenant 0, on ne définit pas une distribution en écrivant

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_\Omega \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

On peut contourner ce problème par un passage à la limite : soit $\varepsilon > 0$, la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_\varepsilon : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^{-1}\mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]^c}(x) \end{array}$$

est localement intégrable, on a donc des distribution $T_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ définies par

$$\langle T_\varepsilon, \varphi\rangle := \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

Lemme 2.1.12. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la limite*

$$\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle := \lim_{n\to\infty} \langle T_\varepsilon, \varphi\rangle$$

existe, et définit une distribution d'ordre inférieur à 1*, appelée* **valeur principale de** $1/x$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $M > 0$ tel que Supp $\varphi \subset [-M, M]$. Si $0 < \varepsilon < M$, par imparité de la fonction f, on a

$$\begin{aligned} \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_\varepsilon^M \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx + \int_\varepsilon^M \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx \\ &= \int_{-M}^{M} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} dx \end{aligned}$$

Or, grâce au théorème des accroissements finis, on a

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right| \leqslant \sup_{x\in[-M,M]} |\varphi'(x)| \text{ donc } \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx = 0$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{-M}^{M} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$$

Ce qui montre que la limite existe, avec de plus

$$\left|\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle\right| = \left|\int_{-M}^{M} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx\right| \leqslant 2M \left\|\varphi'\right\|_{\infty,[-M,M]}$$

□

On a donc pu construire une distribution analogue à ce que serait T_f, on a même, si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert ne contenant pas 0 et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle = \langle T_f, \varphi\rangle$$

2.2 Quelques opérations élémentaires sur les distributions

Comme les distributions 'généralisent' la notion usuelle de fonctions, on cherche à étendre aux distributions des opérations usuelles sur les fonctions, la méthode usuelle pour ce faire consiste à analyser la situation d'une distribution associée à une fonction régulière.

2.2.1 Multiplication par une fonction lisse

Si $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega (f(x)g(x))\varphi(x)dx = \int_\Omega f(x)(g(x)\varphi(x))dx$$

Ce qui justifie la définition suivante

Définition 2.2.1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit le produit de f et T par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle fT, \varphi\rangle := \langle T, f\varphi\rangle$$

Nous devons vérifier que fT définit bien une distribution : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, par hypothèse sur T, pour $K \subset \Omega$ un compact, on a

$$|\langle fT, \varphi\rangle| = |\langle T, f\varphi\rangle| \leqslant C_k \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d\\ |\alpha|\leqslant p_K}} \|\partial^\alpha(f\varphi)\|_{\infty,K}$$

La formule de Leibniz donne alors le résultat voulu (et si T est d'ordre p, alors fT est d'ordre au plus p). La multiplication par une fonction lisse définit donc une application continue de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans lui-même.

Exemple 2.2.2. On cherche à calculer le produit de $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ par la fonction $x \mapsto x$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\left\langle x\mathrm{vp}\frac{1}{x}, \varphi\right\rangle &= \left\langle \mathrm{vp}\frac{1}{x}, x\varphi\right\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{x\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{x\varphi(x)}{x}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\varphi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx \\ &= \langle 1, \varphi\rangle\end{aligned}$$

Donc $x\mathrm{vp}\frac{1}{x} = 1$

Proposition 2.2.3. *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{E}(\Omega)$ convergeant vers f, et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ convergeant vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La suite $(f_nT_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers fT.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite $(\langle T_n, f_n\varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle T, f\varphi\rangle$, ce qui découle de la propriété 2.1.8. □

2.2.2 Translations et dilatations

Les translations et dilatations seront importantes pour la convolution et la transformation de Fourier, pour $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}^d$, on définit

$$\tau_a f(x) := f(x-a) \quad \text{et} \quad D_\lambda f(x) := f(\lambda x)$$

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, par changement de variable, on obtient, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\tau_a f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-a)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x+a)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\tau_{-a}\varphi(x)dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} D_\lambda f(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi\left(\frac{1}{\lambda}x\right)|\lambda|^{-d}dx = |\lambda|^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)D_{\frac{1}{\lambda}}\varphi(x)dx$$

D'où la définition suivante

Définition 2.2.4. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $a \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on définit $\tau_a T$ et $D_\lambda T$ par

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \langle \tau_a T, \varphi\rangle := \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle \quad \text{et} \quad \langle D_\lambda T, \varphi\rangle := |\lambda|^{-d}\left\langle T, D_{\frac{1}{\lambda}}\varphi\right\rangle$$

Exemple 2.2.5. Pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle \tau_a\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \tau_{-a}\varphi\rangle = \tau_{-a}\varphi(0) = \varphi(a)$$

donc $\tau_a\delta_0 = \delta_a$.

Exemple 2.2.6. Pour $a \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle D_\lambda\delta_a, \varphi\rangle = |\lambda|^{-d}\left\langle \delta_a, D_{\frac{1}{\lambda}}\varphi\right\rangle = |\lambda|^{-d}\varphi\left(\frac{a}{\lambda}\right)$$

donc $D_\lambda\delta_a = |\lambda|^{-d}\delta_{\frac{a}{\lambda}}$. En particulier, la suite $n^dD_n\delta_a$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ vers δ_0.

2.2.3 Dérivation

Le premier exemple concerne la dérivation d'une distribution en une variable : soit $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On a, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)dx = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \int_a^b f(x)(-\varphi(x)')dx$$

Le cas d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ plus général se règle en utilisant la formule de Stokes, que nous ne développons pas ici. On obtient ainsi la définition suivante :

Définition 2.2.7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice, pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on pose

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

On définit ainsi une distribution. Si T est d'ordre fini égal à p, alors $\partial^\alpha T$ est d'ordre au plus $p + |\alpha|$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans $K \subset \Omega$ un compact, on a

$$|\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle| = |\langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle| \leqslant C_K \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\beta| \leqslant p_K}} \left\| \partial^{\alpha+\beta} \varphi \right\|_{\infty, K}$$

ce qui donne immédiatement le résultat annoncé.

La première chose que l'on peut remarquer concernant cette définition est que toute distribution est dérivable infiniment, ce qui change radicalement du cas classique ! De plus, la dérivation des distributions forme une application continue, en effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$ev_\varphi \circ \partial^\alpha = ev_{(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi}$$

cette fonction est donc continue, par définition de la topologie initiale, l'opérateur ∂^α est continu sur $\mathcal{D}'(\Omega)$.
Ensuite si l'on a affaire à une fonction suffisamment régulière, ces deux définitions de dérivée 'coïncident' dans le sens suivant :

Proposition 2.2.8. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^m$ où $m \geqslant 1$, alors $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ et pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant m$, on a*

$$T_{\partial^\alpha f} = \partial^\alpha T_f$$

Proposition 2.2.9. *(Formule de Leibniz dans $\mathcal{D}'(\Omega)$)*
Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in \mathbb{C}^\infty(\Omega)$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\partial^\alpha(fT) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ \beta \leqslant \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} T$$

Démonstration. On montre la formule par récurrence sur $|\alpha|$: si $|\alpha| = 1$, alors $\partial^\alpha = \partial_i$ pour un $i \in [\![1, n]\!]$, on a alors, pour $\varphi \in \Omega$

$$\langle \partial_i f T + f \partial_i T, \varphi \rangle = \langle T, \partial_i f \varphi \rangle - \langle T, \partial_i f \varphi + f \partial_i \varphi \rangle = - \langle fT, \partial_i \varphi \rangle = \langle \partial_i (fT), \varphi \rangle$$

Dont $\partial_i f T + f \partial_i T = \partial_i (fT)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ comme annoncé. Si $|\alpha| = n+1$, on choisit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\alpha_i \neq 0$, on a alors, en posant $\alpha' = \alpha - e_i$

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha (fT) = \partial^{\alpha'} \partial_i (fT) = \partial^{\alpha'} (\partial_i f T + f \partial_i T) \\
&= \sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \partial^\beta \partial_i f \partial^{\alpha' - \beta} T + \sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha' - \beta} \partial_i T \\
&= \sum_{e_i \leqslant \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha'}{\beta - e_i} \partial^\beta f \partial^{\alpha' - \beta + e_i} T + \sum_{\beta \leqslant \alpha'} \binom{\alpha'}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} T \\
&= \sum_{e_i \leqslant \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha - e_i}{\beta - e_i} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} T + \sum_{\beta \leqslant \alpha - e_i} \binom{\alpha - e_i}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} T \\
&= \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha - \beta} T
\end{aligned}$$

Comme annoncé (par la formule de Pascal). □

Exemple 2.2.10. Nous allons regarder en particulier le cas de la dimension 1. On se place dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et l'on considère la fonction $f : x \mapsto |x|$. Cette fonction est continue, donc localement intégrable et définit bien une distribution. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans K, on a

$$\begin{aligned}
\langle (T_f)', \varphi \rangle = - \langle |x|, \varphi'(x) \rangle = - \int_{\mathbb{R}} |x| \varphi'(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_-} x \varphi'(x) dx - \int_{\mathbb{R}_+} x \varphi'(x) dx \\
&= [x \varphi(x)]_{-\infty}^0 - \int_{\mathbb{R}_-} \varphi(x) dx - [x \varphi(x)]_0^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (-\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(x) + \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)) \varphi(x) dx
\end{aligned}$$

La dérivée au sens des distributions de $x \mapsto |x|$ est donc la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}$. Ceci dit, remarquons que cette définition vaut à égalité presque partout près.

Exemple 2.2.11. On peut aussi facilement considérer un cas où la dérivée d'une fonction au sens des distributions n'est pas elle-même une fonction : Considérons la fonction de Heaviside $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ et calculons sa dérivée distributionnelle : pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\langle T_H', \varphi \rangle = - \langle T_H, \varphi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx \\
&= - [\varphi(x)]_0^{+\infty} \\
&= \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut réaliser δ_0 comme la dérivée de la fonction H.

L'apparition de mesures de Dirac dans les dérivées distributionnelles est un phénomène général, résumé dans la formule des sauts

Proposition 2.2.12. *(Formule des sauts)*
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et si $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < a_{n+1} = b$ est une subdivision adaptée à f, la dérivée distributionnelle de f est donnée par

$$f' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{n} \left[f(a_i^+) - f(a_i^-) \right] \delta_{a_i}$$

où $\{f'\}$ désigne la fonction continue par morceaux dérivée de f au sens classique.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\sum_{i=0}^{n} [f(x)\varphi(x)]_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx \\
&= \sum_{i=0}^{n} f(a_i^+)\varphi(a_i) - f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx
\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu. □

Cette nouvelle notion de dérivation ouvre la porte à la notion d'équation différentielle sur les distributions, la plus grande souplesse de ces dernières permettra plus souvent d'avoir des résultat d'existence, que l'on pourra ensuite utiliser sur des équations différentielles classiques. Nous pouvons donc donner un premier résultat sur les équations différentielles de distributions :

Lemme 2.2.13. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *est telle que* $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 0$.

(ii) Il existe une unique $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *telle que* $\varphi = \Phi'$.

Démonstration. *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* Si $\varphi = \Phi'$ pour un $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ car $\operatorname{Supp} \varphi \subset \operatorname{Supp} \Phi$, et on a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \Phi'(x)dx = 0$$

car Φ est à support compact.
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Soient a, b, c, d tels que $\operatorname{Supp} \varphi \subset [c,d] \subset]a,b[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\Phi(x) := \int_a^x \varphi(t)dt$$

alors $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ avec $\Phi' = \varphi$. De plus, $\operatorname{Supp} \Phi \subset [c,d]$, en effet, pour $x < c$, on a $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt = 0$ car $\varphi_{|]-\infty,c[} = 0$, et de même $\Phi_{|]d,+\infty[} = 0$. □

Théorème 2.2.14. *(Dérivation et constantes)*
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{D}'(I)$. Si $T' = 0$, alors T est la distribution associée à une fonction constante (presque partout).

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on considère une fonction test $\eta \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\int_I \eta(t)dt = 1$ et on pose

$$\forall x \in I, \psi(x) := \varphi(x) - \eta(x) \int_I \varphi(t)dt$$

on a $\psi \in \mathcal{D}(I)$ et $\int_I \psi(t)dt = 0$, par le lemme précédent,il existe $\Phi \in \mathcal{D}(I)$ telle que $\psi = \Phi'$. On a alors

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) = \Phi'(x) + \eta(x) \int_I \varphi(t)dt$$

et donc

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \Phi' \rangle + \int_I \varphi(t)dt \, \langle T, \eta \rangle = \int_I \varphi(t)dt \, \langle T, \eta \rangle$$

Donc T est la distribution constante égale à $\langle T, \eta \rangle$. □

Corollaire 2.2.15. *(Primitive d'une distribution)*
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Toute distribution $T \in \mathcal{D}'(I)$ possède une primitive dans $\mathcal{D}'(I)$: il existe $S \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $S' = T$ dans $\mathcal{D}'(I)$. De plus, deux primitives de T diffèrent par une constante.

Démonstration. On reprend les notations de la preuve du théorème précédent. Comme Φ est unique, on définit bien une forme linéaire S en posant

$$\langle S, \varphi \rangle := - \langle T, \Phi \rangle$$

On obtient immédiatement que S est une distribution. Afin de prouver que $S' = T$, considérons $f \in \mathcal{D}(I)$:

$$\langle S', f \rangle = - \langle S, f' \rangle = \langle T, F \rangle$$

où F est le seul élément de $\mathcal{D}(I)$ vérifiant

$$F'(x) = f'(x) - \eta(x) \int_I f'(t)dt, \forall x \in I$$

comme $\int_I f'(t)dt = 0$, on conclut que $F = f$ et donc

$$\langle S', f \rangle = \langle T, f \rangle \, \forall f \in \mathcal{D}(I)$$

ceci montre que S est bien une primitive de T. Enfin, si S_1 et S_2 sont deux primitives de T, alors $(S_1 - S_2)' = 0$ d'où le résultat par le théorème précédent. □

2.3 Support d'une distribution, distributions à support compact

La notion de support d'une fonction est bien connue et nous a déjà été notoirement utile dans la définition des distributions. Nous voulons étendre cette notion au cas d'une distribution. Le support d'une fonction peut être défini comme l'adhérence de l'ensemble de ses points de non annulation, mais cette définition se généralise mal au cas d'une distributions (celles-ci ne peuvent pas directement être évaluée sur des points), on lui préfère donc la définition duale : le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel la fonction est identiquement nulle.

Nous commençons par un résultat très pratique sur les duaux des espaces vectoriels topologiques, qui nous resservira souvent.

Proposition 2.3.1. *Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques, et $f : E \to F$ une application linéaire continue. Alors l'application induite*

$$\begin{array}{rccc} {}^t f : & F' & \longrightarrow & E' \\ & T & \longmapsto & T \circ f \end{array}$$

est une application continue (E' et F' sont munie de la topologie faible* (topologie initiale associée aux applications d'évaluations)).

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour $x \in E$, l'application $ev_x \circ {}^t f$ est continue. Soit donc $x \in E$, on a, pour $S \in F'$

$$(ev_x \circ {}^t f)(S) = \langle S \circ f, x \rangle_E = \langle S, f(x) \rangle_F = ev_{f(x)}(S)$$

ainsi, $ev_x \circ {}^t f = ev_{f(x)}$ est continue, d'où le résultat. $\square$

Une première application de ce résultat consiste à dire que, pour $\omega \subset \Omega$ deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, on a une injection continue, $\mathcal{D}(\omega) \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$, qui induit donc une surjection continue $\mathcal{D}'(\Omega) \twoheadrightarrow \mathcal{D}(\omega)$ (qui correspond simplement à la restriction), on note $T_{|\omega}$ la restriction de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à $\mathcal{D}(\omega)$.

Définition 2.3.2. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il existe un plus grand ouvert ω de Ω tel que $T_{|\omega} = 0 \in \mathcal{D}'(\omega)$. On appelle ***support*** de T le complémentaire de cet ouvert.

Démonstration. Pour montrer qu'un tel ouvert existe, on considère l'ensemble

$$\mathcal{U} = \{U \subset \Omega \text{ ouvert} \mid T_{|U} = 0\}$$

et on pose $\omega = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$, on doit montrer que $\omega \in \mathcal{U}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, le support K de φ est recouvert par les ouverts U, on extrait d'un tel recouvrement un sous-recouvrement fini $(U_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$. Pour $i \in [\![1,k]\!]$, il existe $K_i \subset U_i$ un compact tel que $\bigcup_{i=1}^k K_i$ recouvre K. On peut considérer une fonction plateau θ_i pour K_i à support dans U_i. On pose également θ_0 une fonction strictement positive, nulle au voisinage de K et telle que $\sum_{i=0}^l \theta_i(x)$ soit toujours non nulle sur ω, on pose enfin

$$\psi_i(x) = \frac{\theta_i(x)}{\sum_{i=0}^k \theta_i(x)}$$

de sorte que $\sum_{i=0}^{k} \psi_i(x) = 1$ sur ω, on a alors

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i=0}^{k} \langle T, \psi_i \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{l} \langle T, \psi_j \varphi \rangle = 0$$

□

Ainsi, le support de T est un fermé de Ω tel que, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est nulle au voisinage de F, $\langle T, \varphi \rangle = 0$, c'est le plus petit fermé avec cette propriété.

Remarque 2.3.3. Bien-sûr et à nouveau, une fonction continue possède le même support que sa distribution associée.

Remarque 2.3.4. Si Supp $T = K$, alors $\varphi_{|K} = 0$ seulement ne suffit pas à avoir $\langle T, \varphi \rangle = 0$, par exemple on voit facilement que Supp $\delta_0' = \{0\}$, mais φ peut-être nulle en 0 sans que sa dérivée le soit.

Exemple 2.3.5. Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, alors Supp $(fT) \subset$ Supp $f \cap$ Supp T, en effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec

$$\varnothing = \text{Supp } \varphi \cap (\text{Supp } f \cap \text{Supp } T) = (\text{Supp } \varphi \cap \text{Supp } f) \cap \text{Supp } T$$

comme Supp $(f\varphi) \subset$ Supp $f \cap$ Supp φ, on trouve bien que $\langle fT, \varphi \rangle = 0$.

Comme pour les fonctions, on peut s'intéresser au cas des distributions dont le support est compact.

Proposition 2.3.6. *On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace des distributions dont le support est un compact de Ω.*

(a) Toute distribution $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est d'ordre fini.

(b) Plus précisément, si p désigne l'ordre de $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, pour tout voisinage compact K de Supp T*, il existe $C > 0$ telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty, K}$$

Démonstration. Soit K un voisinage de Supp T, et ϕ une fonction plateau pour Supp T à support dans K, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la fonction $\varphi(1 - \phi)$ est nulle au voisinage de Supp T, et on a donc $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \phi\varphi \rangle$. Appelons p le plus petit entier tel qu'il existe $C_1 > 0$ avec

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(K),\ |\langle T, \psi \rangle| \leqslant C_1 \sum_{|\alpha| \leqslant p} \|\partial^\alpha \psi\|_{\infty, K}$$

d'où

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ |\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C_1 \sum_{|\alpha| \leqslant p} \|\partial^\alpha (\phi\varphi)\|_{\infty, K}$$

d'où le résultat par la formule de Leibniz. La minimalité de p donne bien qu'il s'agit de l'ordre de T. □

Proposition 2.3.7. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ d'ordre p. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nulle sur* $\operatorname{Supp} T$ *ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur à p. On a $\langle T, \varphi \rangle = 0$*

Démonstration. Ce résultat permet de raffiner la remarque 2.3.4.
On notera K le support de T et K_ρ l'ensemble des points à une distance de K inférieure à p. On considère χ une fonction lisse positive d'intégrale 1 et à support dans $\mathcal{B}(0,1]$, ainsi que $(\chi_\varepsilon) = \varepsilon^{-d} D_{\frac{1}{\varepsilon}} \chi$ la suite régularisante associée. Pour $\varepsilon > 0$, on pose également $g_\varepsilon := \mathbb{1}_{K_{3\varepsilon}}$, et $\psi_\varepsilon := g_\varepsilon * \chi_\varepsilon$. La fonction ψ_ε est une fonction plateau pour K_ε à support inclus dans $K_{3\varepsilon}$, avec

$$\partial^\alpha \psi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g_\varepsilon(x-y) \partial^\alpha \chi_\varepsilon(y) dy$$

Par définition, on a $\partial^\alpha \chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d-|\alpha|} D_{\frac{1}{\varepsilon}}(\partial^\alpha \chi)$, donc $\|\partial^\alpha \chi_\varepsilon\|_1 = C_\alpha e^{-|\alpha|}$ avec $C_\alpha = \|\partial^\alpha \chi\|_1$. Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ nulle sur K ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant p$, pour $x_0 \in K$ et $\beta \in \mathbb{N}^d$, on a, par développement de Taylor sur $\partial^\beta \varphi$

$$\partial^\beta \varphi(x) = O(|x - x_0|^{p+1-|\beta|}) \leqslant C_{x_0} \varepsilon^{p+1-|\beta|}$$

pour $|x - x_0| \leqslant 3\varepsilon$. Comme K est compact, on peut choisir un nombre fini de points x_0 qui nous donne

$$\left\|\partial^\beta \varphi\right\|_{\infty, K_{3\varepsilon}} \leqslant C \varepsilon^{p+1-|\beta|}$$

On a alors $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi - \varphi\psi_\varepsilon \rangle + \langle T, \varphi\psi \rangle$. Le premier terme est nul car $\psi_\varepsilon = 1$ au voisinage de K, ainsi, $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi\psi_\varepsilon \rangle$ est majoré en module par la somme des normes infinies des $\partial^\alpha(\varphi\psi_\varepsilon)$ pour $|\alpha| \leqslant p$, comme ces fonctions sont nulles hors de $K_{3\varepsilon}$, on a

$$\|\partial(\varphi\psi_\varepsilon)\|_\infty \leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C \varepsilon^{p+1-|\beta|} C_{\alpha-\beta} \varepsilon^{-|\alpha|+|\beta|}$$

donc $\langle T, \varphi \rangle \leqslant C\varepsilon$ et donc $\langle T, \varphi \rangle = 0$. □

Exemple 2.3.8. (Distributions à support ponctuel)
Soit $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une distribution dont le support est $\{0\}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On note p son ordre, pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction valant 1 au voisinage de 0, on a

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) x^\alpha \psi(x) + (1 - \psi(x)) \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) x^\alpha + r(x)|x|^{p+1}$$

Le second membre est nul au voisinage de 0, et le reste est nul en 0, ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant p$, la proposition précédente nous donne alors que

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0) \langle T, x^\alpha \psi(x) \rangle$$

en posant $b_\alpha := \frac{1}{\alpha!} \langle T, x^\alpha \rangle_{\mathcal{E}'}$, on obtient $T = \sum_{|\alpha| \leqslant p} (-1)^{|\alpha|} b_\alpha \partial^\alpha \delta_0$ Donc T est une combinaison linéaire de dérivées de mesures de Dirac. De plus cette décomposition est unique, car les dérivées de δ_0 sont linéairement indépendantes entre elles (en testant contre des monômes biens choisis).

Bien-sûr, la notation $\mathcal{E}'(\Omega)$ n'est pas innocente, et on peut se demander si définir $\mathcal{E}'(\Omega)$ comme le dual topologique de $\mathcal{E}(\Omega)$ n'aurait pas été plus judicieux. Il se trouve que ces deux définitions sont équivalentes (mis à part pour leurs topologies) :

On note F le dual topologique de $\mathcal{E}(\Omega)$, on considère $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts pour Ω. Si $S : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbb{K}$ est linéaire, on a $S \in F$ si et seulement si il existe $K \subset \Omega$ un compact, $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega),\ |\langle S, \varphi\rangle_{\mathcal{E}}| \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant p} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\infty,K}$$

Pour $S \in F$, on note $f(S)$ la restriction de S à $\mathcal{D}(\Omega)$ (on a bien-sûr $f(S) \in \mathcal{D}'(\Omega)$). Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et nulle au voisinage de K, on a

$$|\langle S, \varphi\rangle_{\mathcal{E}}| \leqslant 0$$

donc $f(S) \in \mathcal{E}(\Omega)$ est à support dans K.
Réciproquement, soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, on veut induire T à $\mathcal{E}(\Omega)$ (et ainsi construire la réciproque de f). On note K le support de T et l'on considère θ une fonction plateau pour K dans Ω, on pose ainsi

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega),\ \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{E}} := \langle T, \theta\varphi\rangle$$

Comme $\theta\varphi$ est à support compact, cette définition a un sens, nous montrons qu'elle ne dépend pas de la fonction θ choisie, si θ' est un autre candidat, on a que $(\theta-\theta')\varphi$ est nulle au voisinage de K, d'où $\langle T, (\theta-\theta')\varphi\rangle = 0$ comme annoncé.
Ensuite, notre formule définit bien un élément de F d'après la proposition 2.3.6, on note $g(T)$ cet élément.

Proposition 2.3.9. *Les applications linéaires f et g sont réciproques l'une de l'autre. Ainsi, $\mathcal{E}'(\Omega)$ s'identifie à F comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De plus, f est continue.*

Démonstration. À présent, pour $S \in F$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, on a

$$\langle g(f(S)), \varphi\rangle_{\mathcal{E}} = \langle f(S), \theta\varphi\rangle = \langle S, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{E}}$$

or, on a $(\theta-1)\varphi$ est nulle au voisinage de K, donc $\langle S, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{E}} = \langle S, \varphi\rangle_{\mathcal{E}}$, et donc $g \circ f = Id_F$.
On montre de même que $f \circ g = Id_{\mathcal{E}'(\Omega)}$. Enfin, la fonction f est continue comme transposée de l'injection $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$. □

Remarque 2.3.10. Hélàs, la fonction g peut ne pas être continue : considérons par exemple $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et les distributions $T_n = \mathbb{1}_{[0,1]} + \delta_n$, cette suite converge vers la distribution $T = \mathbb{1}_{[0,1]}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et toutes les distributions considérées sont à support compact. Considérons à présent la fonction constante égale à 1 dans $\mathcal{E}(\Omega)$, on a

$$\langle T_n, 1\rangle_{\mathcal{E}} = 1 + 1 = 2 \quad \text{et} \quad \langle T, 1\rangle_{\mathcal{E}} = 1$$

donc $g(T_n)$ ne converge pas vers $g(T)$ dans F.

Ainsi, la topologie de F est plus fine que celle de $\mathcal{E}'(\Omega)$ par continuité de f. On choisit de noter ces deux espaces de la même manière, et on précisera la topologie utilisée selon les cas (notons toutefois qu'une suite de distributions à support compact qui converge pour la topologie faible* converge pour la topologie induite par $\mathcal{D}'(\Omega)$).

2.4 Convolution

La convolution des fonctions est un outil largement étudié, et il est connu que la convolution n'admet pas d'unité. Nous allons définir une notion de convolution sur les distributions, qui aura de manière supplémentaire une unité, ce qui donnera a terme des outils de résolution d'équations différentielles.

2.4.1 Prérequis techniques

Nous commençons par quelques résultats utiles de commutativité, et nous introduisons la notion de n-uplet convolutifs.

Théorème 2.4.1. *(Dérivation sous crochet)*
Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{d+q})$. Alors la fonction $f : y \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle$ définie sur $\mathbb{R}^d$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \partial^\alpha f(x) = \left\langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y)\right\rangle$$

Démonstration. Montrons déjà que f est continue : si K est un voisinage compact de Supp T, et si $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}^q$ convergeant vers y, on a

$$|f(y_j) - f(y)| \leqslant C \sum_{|\beta|\leqslant p} \left\| \partial_x^\beta \left(\varphi(x, y_j) - \varphi(x, y)\right)\right\|_{\infty, K}$$

où p désigne l'ordre de T. Les dérivées de φ sont uniformément continues sur $K \times K_1$ où K_1 est un voisinage compact de y dans $\mathbb{R}^d$ (théorème de Heine), d'où la continuité de f.
Montrons maintenant l'existence des dérivées partielles de f en un point y fixé. On note $(e_i)_{i\in[\![1,d]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\frac{1}{h}(f(y + he_i) - f(y)) - \langle T, \partial_{y_i}\varphi(\cdot, y)\rangle = \langle T, \psi_h(\cdot, y)\rangle$$

en posant

$$\psi_h(x, y) := \frac{1}{h}\left(\varphi(x, y + he_i) - \varphi(x, y)\right) - \partial_{y_i}\varphi(x, y)$$

la suite de fonction ψ_h converge uniformément vers 0 sur $K \times K_1$ quand h tend vers 0, ainsi que ses dérivées, d'où

$$\partial_{y_j} f = \left\langle T, \partial_{y_j}\varphi(\cdot, y)\right\rangle$$

en remplaçant φ par $\partial_{y_j}\varphi$, on obtient que $\partial_{y_j} f$ est continue. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$, et on conclut par une récurrence immédiate. □

Théorème 2.4.2. *(Intégration sous crochet)*
Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{d+q})$ et Q un pavé compact de $\mathbb{R}^q$. On a alors

$$\left\langle T, \int_Q \varphi(\cdot, y) dy\right\rangle = \int_Q \langle T, \varphi(\cdot, y)\rangle\, dy$$

Démonstration. Si $q = 1$ et $Q = [a, b]$, on pose

$$F(y) = \left\langle T, \int_a^y \varphi(\cdot, t)dt \right\rangle$$

le théorème précédent nous donne $F'(y) = \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle$ et

$$F(b) - 0 = \int_a^b \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle \, dy$$

ce qui clos la démonstration du cas $q = 1$, et le cas général suit par récurrence immédiate (et le théorème de Fubini). □

Définition 2.4.3. Soient F, G deux parties fermées de $\mathbb{R}^d$, on dit que F et G sont ***convolutifs*** si

$$\forall R > 0, \exists \rho(R) \mid \forall (x, y) \in F \times G, \ |x + y| \leqslant R \Rightarrow (|x| \leqslant \rho(R), |y| \leqslant \rho(R))$$

On dit de même qu'une famille $(F_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ de parties fermées de $\mathbb{R}^d$ est ***convolutive*** si, pour tout $J \subset [\![1, k]\!]$ et $R > 0$, il existe $\rho(R) \geqslant 0$ tel que

$$\forall (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} F_j, \left(\left| \sum_{i \in J} x_j \right| < R \Rightarrow \forall j \in J, |x_j| \leqslant \rho(R) \right)$$

Exemple 2.4.4. Si $F \subset \mathbb{R}^d$ est un fermé, alors F et $\mathbb{R}^d$ sont convolutifs si et seulement si F est borné. En effet, si F et $\mathbb{R}^d$ sont convolutifs, en considérant $\rho(0)$, on a pour $x \in \mathbb{F}$ que $|x - x| \leqslant 0$, et donc $|x| \leqslant \rho(0)$ et donc F est borné.
Réciproquement, si F est borné par M, considérons $R > 0$, si x, y sont tels que $|x + y| \leqslant R$, on a

$$|x + y| \geqslant |x| - |y| \geqslant |x| - M \quad \text{donc} \quad |x| \leqslant M + R$$

et de même $|y| \leqslant M \leqslant M + R$, on peut donc prendre $\rho(R) = M + R$.

Exemple 2.4.5. Si $F_1, \cdots, F_n$ est une famille convolutive, alors toute famille $G_1, \cdots, G_n$ avec $G_i \subset F_i$ pour $i \in [\![1, d]\!]$ est encore convolutive (pour la même fonction ρ).

Proposition 2.4.6. *Si $F_1, \cdots, F_p$ sont des fermés de $\mathbb{R}^d$, tous compacts sauf au plus 1, alors ils sont convolutifs.*
De plus, adjoindre des compacts à une famille convolutive donne toujours une famille convolutive.

Démonstration. L'exemple précédent montre qu'un compact et un fermé sont toujours convolutifs, il suffit donc de montrer le second point. Soit $F_1, \cdots, F_p$ une famille convolutive, $K_{p+1}, \cdots, K_n$ des compacts. L'ensemble $K_{p+1} + \cdots + K_n$ est borné par une constante M, il suffit de considére $\rho(R) + M$ pour conclure. □

Proposition 2.4.7. *Si (F,G) est un couple convolutif, alors $F+G$ est un fermé de $\mathbb{R}^d$*

Démonstration. Soit $a_n = x_n + y_n$ une suite convergente de $F+G$. Comme (a_n) converge, elle est bornée par une constante R. Donc $|x_n|$ et $|y_n|$ sont bornées par $\rho(R)$, quitte à extraire deux fois, on obtient deux suites $(x_{\sigma(n)})$ et $(y_{\sigma(n)})$, qui convergent vers x et y. On a donc $x+y=a$ et $x\in F, y\in G$ car ceux-ci sont fermés, d'où le résultat. □

Nous exposons à présent un argument technique qui nous servira régulièrement à étendre des opérations de type convolution.

Théorème 2.4.8. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, stables par multiplication par un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Si $a : (\mathcal{A}\cap\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d))\times(\mathcal{B}\cap\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est bilinéaire et telle que*

$$\forall T, S, \text{Supp } (a(T,S)) \subset \text{Supp } T + \text{Supp } S \tag{2.1}$$

Alors a s'étend naturellement en une forme bilinéaire aux couples de $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ dont les supports sont convolutifs. De plus, l'équation 2.1 reste vraie pour ce prolongement.

Démonstration. Commençons par construire le prolongement. Si $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est une suite de fonctions plateaux pour les boules $\mathcal{B}(0,n]$. Pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$\langle b(T,S),\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle a(\theta_n T, \theta_n S),\varphi\rangle$$

la suite à droite étant carrément constante à partir d'un certain rang : soit $R>0$ tel que Supp $\varphi \subset \mathcal{B}(0,R]$, si $n,m \geqslant \rho(R)$, on a

$$\langle b(\theta_n T,\theta_n S),\varphi\rangle - \langle b(\theta_m T,\theta_m S),\varphi\rangle = \langle b(\theta_n T-\theta_m T,\theta_n S),\varphi\rangle + \langle b(\theta_m T,\theta_n S-\theta_m S),\varphi\rangle$$

Le premier terme du second membre est non nul seulement si

$$\text{Supp } b((\theta_n-\theta_m)T,\theta_n S)\cap \text{Supp } \varphi \neq \varnothing$$

Ce qui entraîne $(\text{Supp } (\theta_n-\theta_m)T + \text{Supp } \theta_n S)\cap \text{Supp } \varphi \neq \varnothing$, autrement dit il existe un $x\in \text{Supp } \varphi$ s'écrivant $y+z$ avec $y\in \text{Supp } (\theta_n-\theta_m)T$ et $z \in \text{Supp } \theta_n S$, comme par hypothèse $|x|\leqslant R$, on obtient une contradiction avec $|y|,|z|\leqslant\rho(R)$, on montre de même que le second terme est également nul.
Ensuite, si $K\subset\mathbb{R}^d$ est un compact, et $\varphi\in\mathcal{D}(K)$, on a (pour n assez grand)

$$\langle b(T,S),\varphi\rangle = \langle b(\theta_n T,\theta_n S),\varphi\rangle$$

Ainsi, on obtient que $b(T,S)$ est une distribution car $b(\theta_n T,\theta_n S)$ en est une.
Enfin, concernant le support, si Supp φ et Supp T + Supp S ne se rencontrent pas, alors Supp φ ne rencontre pas Supp $\theta_n T$ + Supp $\theta_n S$, donc

$$\langle b(\theta_n T,\theta_n S),\varphi\rangle = 0 \quad\text{et}\quad \langle b(T,S),\varphi\rangle = 0$$

d'où le résultat. □

Remarque 2.4.9. Bien-sûr, la démonstration précédente montre également que la valeur de $b(T,S)$ ne dépend pas de la suite de fonctions plateau choisie.

Exemple 2.4.10. Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ à support convolutif, la convolution de f et g peut être définie comme extension du cas $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ à support compact. Si f et g sont à support compact, on a

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$$

dans le cas général, on a donc

$$f * g(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\theta_n(y)g(x-y)\theta_n(x-y)dy$$

2.4.2 Convolution d'une distribution et d'une fonction lisse

Nous pouvons à présent définir la convolution d'une distribution et d'une fonction. On commence par définir la convolution dans le cas ou les deux membres sont à support compacts, et ensuite l'étendre au cas ou les support sont convolutifs. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$(f*\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\varphi(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\check{\varphi}(y-x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau_{-x}\check{\varphi}(y)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau_x\check{\varphi}(y)dx$$

ce qui justifie la définition suivante.

Définition 2.4.11. Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on définit, pour $x \in \mathbb{R}^d$

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tau_x\check{\varphi}\rangle$$

le ***produit de convolution*** de T et φ.

Proposition 2.4.12. *Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, la convolution $T * \varphi$ est un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, et on a*

(a) $\forall\alpha \in \mathbb{N}^d, \partial^\alpha(T*\varphi) = T*(\partial^\alpha\varphi) = (\partial^\alpha T)*\varphi$

(b) $\text{Supp } (T*\varphi) \subset \text{Supp } T + \text{Supp } \varphi$

Démonstration. La régularité de $T * \varphi$ provient immédiatement du théorème de dérivation sous crochet (car $(x, y) \mapsto \tau_x\varphi(y)$ est une application lisse sur $\mathbb{R}^{d+d}$), avec

$$\partial^\alpha(T * \varphi) = T * \partial^\alpha\varphi$$

d'où la première égalité. Ensuite, comme $\partial^\alpha_x\varphi(x-y) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha_y\varphi(x-y)$, on a

$$T * \partial^\alpha\varphi = \partial^\alpha T * \varphi$$

par définition de la dérivée distributionnelle, la propriété concernant les supports est quant à elle évidente. □

Exemple 2.4.13. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$(\delta_a * \varphi)(x) = \langle\delta_a, \tau_x\check{\varphi}\rangle = \tau_x\check{\varphi}(a) = \varphi(x-a) = \tau_a\varphi(x)$$

donc $\delta_a * \varphi = \tau_a\varphi$, en particulier, $\delta_0 * \varphi = \varphi$, on obtient bien un élément neutre pour la convolution, ce qui se propagera aux distributions en général.
Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$((\partial^\alpha\delta_0) * \varphi)(x) = \langle\partial^\alpha\delta_0, \tau_x\check{\varphi}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(\tau_x\check{\varphi})(0) = \tau_x\partial^\alpha(\varphi)(0) = \partial^\alpha\varphi(x)$$

d'où $(\partial^\alpha\delta_0 * \varphi) = \partial^\alpha\varphi$.

Proposition 2.4.14. *Pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, et $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$(T * \varphi) * \psi = T * (\varphi * \psi) \quad et \quad \langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \check{\varphi} * \psi \rangle$$

Démonstration. Si Q est un pavé compact assez grand (contenant les sommes des support des objets considérés), par intégration sous crochet on obtient

$$\begin{aligned}
(T * (\varphi * \psi))(z) &= \left\langle T, \tau_z (\varphi \check{*} \psi) \right\rangle \\
&= \langle T(x), (\varphi * \psi)(z - x) \rangle \\
&= \left\langle T(x), \int_Q \psi(y) \tau_{z-x} \check{\varphi}(y) dy \right\rangle \\
&= \int_Q \langle T(x), \tau_{z-x} \check{\varphi}(y) \rangle \, \psi(y) dy \\
&= \int_Q \langle T, \tau_{z-y} \check{\varphi} \rangle \, \psi(y) dy \\
&= \int_Q (T * \varphi)(z - y) \psi(y) dy \\
&= ((T * \varphi) * \psi)(z)
\end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned}
\langle T * \varphi, \psi \rangle &= \int_Q (T * \varphi)(x) \psi(x) dx \\
&= \int_Q \langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle \, \psi(x) dx \\
&= \left\langle T(y), \int_Q \tau_x \check{\varphi}(y) \psi(y) dx \right\rangle \\
&= \left\langle T(y), \int_Q \check{\varphi}(y - x) \psi(x) dx \right\rangle \\
&= \langle T, \check{\varphi} * \psi \rangle
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.4.15. *Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ dont les supports sont convolutifs. On peut définir leur produit de convolution par le théorème 2.4.8. Il s'agit d'un élément de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ à support dans* $\operatorname{Supp} T + \operatorname{Supp} S$.

Démonstration. Les conditions du théorème 2.4.8 sont remplies pour $\mathcal{A} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $B = \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$. La convolution de T et φ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ en considérant une fonction plateau pour un compact assez grand.
Ensuite, si T, φ, ψ sont à support convolutifs, pour θ une fonction plateau d'un compact assez grand, on a

$$(T * \varphi) * \psi = ((\theta T) * (\theta \varphi)) * (\theta \psi) \quad \text{et} \quad T * (\varphi * \psi) = (\theta T) * ((\theta \varphi) * (\theta \psi))$$

les membres respectifs de droite coïncident par la proposition précédente, d'où le résultat. □

On a vu que, pour T,φ et ψ à support compact, on a $(T * \varphi) * \psi = T * (\varphi * \psi)$. On souhaite propager cette définition au cas général, ce pourquoi on aura besoin d'un résultat de continuité.

Lemme 2.4.16. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, dont les supports respectifs sont inclus dans un couple convolutif (F, G).*

(a) Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers T et dont les supports sont inclus dans F, on a $\lim_{n\to\infty} T_n * \varphi = T * \varphi$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

(b) Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers φ et dont les supports sont inclus dans G, on a $\lim_{n\to\infty} T * \varphi_n = T * \varphi$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Démonstration. (a) Soit $\psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, et $R > 0$ telle que Supp $\varphi \subset \mathcal{B}(0, R]$, en considérant le couple convolutif (F, G), on peut considérer θ une fonction plateau pour $\mathcal{B}(0, \rho(R)]$, qui donne

$$\langle T_n * \varphi, \psi\rangle = \langle \theta T_n * \theta\varphi, \psi\rangle = \left\langle \theta T_n, \check{\theta\varphi} * \psi\right\rangle = \left\langle T_n, \theta(\check{\theta\varphi} * \psi)\right\rangle$$

Ceci converge vers $\left\langle T, \theta(\check{\theta\varphi} * \psi)\right\rangle = \langle \theta T * \theta\varphi, \psi\rangle$, et ceci est égal à $\langle T * \varphi, \psi\rangle$ car le choix de θ ne dépend que du couple (F, G).
(b) On utilise le même argument, avec

$$\langle T * \varphi_n, \psi\rangle = \left\langle \theta T, \check{\theta\varphi_n} * \psi\right\rangle \to \left\langle \theta T, \check{\theta\varphi} * \psi\right\rangle = \langle T * \varphi, \psi\rangle$$

□

Proposition 2.4.17. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ dont les supports forment un triplet convolutif, on a*

$$(T * \varphi) * \psi = T * (\varphi * \psi)$$

Démonstration. Soient $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions plateaux, respectivement pour $\mathcal{B}(0, n]$. En appliquant le lemme 2.4.16,

$$\begin{aligned}(T * \varphi) * \psi &= \lim_{p\to\infty} (T * \varphi) * \theta_p\psi \\ &= \lim_{p\to\infty} \lim_{m\to\infty} (T * \theta_m\varphi) * \theta_p\psi \\ &= \lim_{p\to\infty} \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\theta_n T * \theta_m\varphi) * \theta_p\psi\end{aligned}$$

On peut alors appliquer l'associativité du cas où les supports sont compacts pour obtenir

$$\begin{aligned}&= \lim_{p\to\infty} \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \theta_n T * (\theta_m\varphi * \theta_p\psi) \\ &= \lim_{p\to\infty} \lim_{m\to\infty} T * (\theta_m\varphi * \theta_p\psi) \\ &= \lim_{p\to\infty} T * (\varphi * \theta_p\psi) = (T * \varphi) * \psi\end{aligned}$$

□

Remarque 2.4.18. Dans les cas $(T, \varphi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ou $(T, \varphi) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, la convolution de T et φ s'exprime à nouveau de la façon suivante

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \tau_x \check{\varphi} \rangle$$

Comme dans le cas des fonctions classiques, la convolution donne un outil 'régularisant' qui permet d'établir des résultats de densité :

Théorème 2.4.19. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$: l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (pour la topologie de ce dernier bien-sûr).*

Démonstration. On considère une suite exhaustive de compacts pour Ω, $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions plateaux pour ces compacts (respectivement), et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante vers 0 telle que

$$\varepsilon_n < \frac{1}{2} d(\text{Supp } \psi_n, {}^c\Omega)$$

soient enfin (χ_ε) une suite régularisante (une approximation de l'identité lisse). On pose

$$f_n := (\psi_n T) * \chi_{\varepsilon(n)}$$

Il s'agit pour tout n d'un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$, et pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \left\langle \psi_n T, \check{\chi_{\varepsilon(n)}} * \varphi \right\rangle$$

par la proposition 2.4.14. La suite $\check{\chi_\varepsilon}$ étant elle aussi une suite régularisante, la suite $(\check{\chi_{\varepsilon(n)}} * \varphi)$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Pour n assez grand, on a

$$\left\langle T, \check{\chi_{\varepsilon(n)}} * \varphi \right\rangle = \left\langle \psi_n T, \check{\chi_{\varepsilon(n)}} * \varphi \right\rangle$$

qui donne donc que $\langle f_n, \varphi \rangle$ converge vers (T, φ) d'où le résultat. □

Corollaire 2.4.20. *Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, les régularisées $T * \chi_\varepsilon$ sont des fonctions lisses qui convergent vers T au sens des distributions.*

Application 2.4.21. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est telle que les dérivées partielles $\partial_i T$ sont des fonctions continues pour tout $i \in [\![1, d]\!]$. Alors T est en fait une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. Le résultat est clair en dimension 1 (à cause du théorème fondamental de l'analyse). En dimension supérieure, c'est un peu plus délicat. On considère (χ_ε) une suite régularisante. On pose $f_\varepsilon = T * \chi_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, la formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre 0) nous donne

$$f_\epsilon(x) = f_\epsilon(0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 x_i \partial_i f_\varepsilon(tx) dt =: f_\varepsilon(0) + g_\varepsilon(x)$$

Comme $\partial_i f_\varepsilon = (\partial_i T) * \chi_\varepsilon$, ceci converge uniformément sur tout compact vert $\partial_i T$ (car il s'agit d'une fonction continue), on obtient que g_ε converge uniformément sur tout compact vers

$$g : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 x_i \partial_i T(tx) dt$$

À présent, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est d'intégrale non nulle (par exemple une fonction plateau), on a

$$\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle = f_\varepsilon(0) \langle 1, \varphi \rangle + \langle g_\varepsilon, \varphi \rangle$$

Comme $\langle f_\varepsilon, \varphi \rangle$ et $\langle g_\varepsilon, \varphi \rangle$ convergent, respectivement vers $\langle T, \varphi \rangle$ et $\langle g, \varphi \rangle$, la suite $f_\varepsilon(0)$ converge vers une constante. Ainsi, f_ε converge sur tout compact vers une fonction continue, qui est égale à T d'où le résultat. □

On peut à présent donner une caractérisation plus abstraite de la convolution : la convolution contre une distribution fixée est un opérateur linéaire continu qui commute avec les translations.

Proposition 2.4.22. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, T induit un opérateur $U : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ envoyant φ sur $T * \varphi$. L'opérateur U commute avec les translations et est continu (pour la topologie induite sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ par $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$).*

Démonstration. La commutation avec les translations est claire :

$$(U(\tau_a \varphi)(x) = (T * \tau_a \varphi)(x) = \langle T, \tau_x \check{\tau_a \varphi} \rangle = \langle T, \tau_x \tau_{-a} \check{\varphi} \rangle = (\tau_a(T * \varphi))(x)$$

La continuité est un renforcement du point (b) dans le lemme 2.4.16 (on a montré une convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on veut ici une convergence dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$). On pose H un voisinage compact de Supp T, et r son ordre. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact, $x \in K$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha (T * \varphi)(x)| &= |(T * \partial^\alpha \varphi)(x)| \\
&= | \langle T, \tau_{-x} \partial^\alpha \varphi \rangle | \\
&\leqslant C \sum_{|\beta| \leqslant r} \left\| \partial^\beta (\tau_{-x} \partial^\alpha \varphi) \right\|_{\infty, H} \\
&= C \sum_{|\beta| \leqslant r} \left\| \tau_{-x} \partial^{\alpha+\beta} \varphi \right\|_{\infty, H} \\
&= C \sum_{|\beta| \leqslant r} \left\| \partial^{\alpha+\beta} \varphi \right\|_{\infty, x+H} \\
&\leqslant C \sum_{|\beta| \leqslant r} \left\| \partial^{\alpha+\beta} \varphi \right\|_{\infty, K+H}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\sum_{|\alpha| \leqslant p} \| \partial^\alpha (T * \varphi) \|_{\infty, K} \leqslant C' \sum_{|\gamma| \leqslant r+p} \| \partial^\gamma \varphi \|_{\infty, K+H}$$

□

On a également une réciproque à ce résultat, qui donne une caractérisation

Proposition 2.4.23. *Soit $U : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ un opérateur continu (toujours pour la topologie induite par $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$) et qui commute avec les translation. Il existe une unique distribution $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \mid U(\varphi) = T * \varphi$$

Démonstration. L'unicité découle de

$$U(\varphi)(0) = (T * \varphi)(0) = \langle T, \check{\varphi} \rangle)$$

À présent, considérons la forme linéaire S définie par

$$\langle S, \varphi \rangle := U(\varphi)(0) = (\delta_0 \circ U)(\varphi)$$

Ainsi, S est une distribution à support compact, et on a

$$\begin{aligned} U(\varphi)(a) &= (\tau_{-a} U(\varphi))(0) \\ &= U(\tau_{-a}\varphi)(0) \\ &= \langle S, \tau_{-a}\varphi \rangle \\ &= \left\langle \check{S}, \tau_a \check{\varphi} \right\rangle \\ &= (\check{S} * \varphi)(a) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Avec une preuve similaire, on obtient

Proposition 2.4.24. *Si $U : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ est linéaire continue (pour leurs topologie respectives !) et commute avec les translations. Alors U est issue de la convolution par un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

2.4.3 Convolution des distributions

À présent, on veut convoler des distributions à proprement parler. On va à nouveau commencer par le cas ou tous les supports sont compacts, pour ensuite le généraliset au cas des supports convolutifs.
On sait déjà convoler deux distributions dans certains cas particulier (quand ce sont des fonctions test par exemple) et on a associativité dans ces cas. On va 'partir' de cette associativité pour donner une définition générale.

Proposition-Définition 2.4.25. *Pour $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique distribution $R \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),\ T * (S * \varphi) = R * \varphi$$

On note $T * S$ cette distribution, et on a

$$\text{Supp }(T * S) \subset \text{Supp } T + \text{Supp } S$$

Démonstration. On connait déjà le cas où $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, ou $T, S \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
Soient U, V les opérateurs de convolution respectivement associés à T et S, on pose $W = U \circ V$, on a que $W : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et linéaire continu (pour la topologie de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$) et commute avec les translations, il existe donc par la proposition 2.4.23 qu'il existe une unique distribution $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),\ W(\varphi) = R * \varphi = (U \circ V)(\varphi) = T * (S * \varphi)$$

ce qui donne bien le résultat. Il reste à montrer la propriété concernant les supports : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et telle que

$$\text{Supp } \varphi \cap (\text{Supp } T + \text{Supp } S) = \varnothing$$

On a
$$\langle T * S, \varphi \rangle = ((T * S) * \check{\varphi})(0) = (T * (S * \check{\varphi}))(0)$$
On sait que le support de cette fonction est inclus dans Supp $T +$ Supp $S +$ Supp $\check{\varphi}$, si 0 se trouve dans ce dernier ensemble, on a $0 = x + y - z$ avec $x \in$ Supp $T, y \in$ Supp $S, z \in$ Supp φ, donc $z = x + y$ se trouve dans Supp $T +$ Supp S ce qui contredit notre hypothèse, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 2.4.26. *Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dont les supports sont convolutifs. On peut étendre la définition précédente de leur produit de convolution, avec la même propriété d'inclusion des supports (cf théorème 2.4.8)*

À nouveau se pose la question de l'associativité de cette notion de convolution, pour obtenir un tel résultat, on passera à nouveau par un résultat de continuité.

Proposition 2.4.27. *Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, dont les supports respectifs sont inclus dans un couple convolutif (F, G).*

(a) Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers T et dont les supports sont inclus dans F, on a $\lim_{n\to\infty} T_n * S = T * S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

(b) Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers S et dont les supports sont inclus dans G, on a $\lim_{n\to\infty} T * S_n = T * S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pour θ une fonction plateau pour un compact assez grand, on a
$$\langle T_n * S, \varphi \rangle = \langle (\theta T_n) * (\theta S), \varphi \rangle = \left\langle T_n, \theta(\check{\theta S} * \varphi) \right\rangle$$
Par hypothèse, ceci converge vers $\left\langle T, \theta(\check{\theta S} * \varphi) \right\rangle$, ceci étant égal à $\langle T * S, \varphi \rangle$ (en effet, comme θ ne dépend que du support de T et S, on peut prendre le même θ pour $T * S$ et $T_n * S$).
On utilise un argument symétrique pour le second cas. $\square$

Proposition 2.4.28. *(Associativité sous conditions) Soient $T, S, R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dont les supports forment un triplet convolutif. Les distributions*
$$(T * S) * R \quad \textit{et} \quad T * (S * R)$$
sont bien définies et égales.

Démonstration. D'abord si T, S, R sont à support compact, U, V, W les opérateurs de convolution associés sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On a
$$(U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W)$$
d'où l'associativité par définition de la convolution.
Dans le cas général, on peut utiliser le même argument qu'à la proposition 2.4.17. $\square$

Remarque 2.4.29. Il faut faire attention à bien avoir un triplet convolutif dans la proposition précédente : tous les membres de l'égalité peuvent être bien définis (si l'on a quatre couples convolutifs) sans pour autant que l'on ait égalité. On verra un exemple de ce résultat en 2.4.32

Proposition 2.4.30. *(Commutativité)*
Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dont les supports sont convolutifs. On a

$$T * S = S * T$$

Démonstration. Par définition de la convolution, il suffit de montrer le résultat dans le cas où T et S sont à support compact, il suffit alors de montrer que $T * (S * \varphi) = S * (T * \varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, autrement dit

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \langle T * (S * \varphi), \psi \rangle = \langle S * (T * \varphi), \psi \rangle$$
$$\Leftrightarrow (T * (S * \varphi)) * \check{\psi}(0) = (S * (T * \varphi)) * \check{\psi}(0)$$

or, sachant que la convolution des fonctions est associative, en utilisant l'associativité, on obtient

$$\begin{aligned}
(T * (S * \varphi)) * \check{\psi} &= T * ((S * \varphi) * \check{\psi}) \\
&= T * (\check{\psi} * (S * \varphi)) \\
&= (T * \check{\psi}) * (S * \varphi) \\
&= (S * \varphi) * (T * \check{\psi}) \\
&= S * (\varphi * (T * \check{\psi})) \\
&= S * ((T * \check{\psi}) * \varphi) \\
&= S * (T * (\check{\psi} * \varphi)) \\
&= S * (T * (\varphi * \check{\psi})) \\
&= (S * (T * \varphi)) * \check{\psi}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 2.4.31. *Soient T et S des distributions dont une à support compact.*

(a) On a $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \langle T * S, \varphi \rangle = \left\langle T, \check{S} * \varphi \right\rangle$

(b) On a $\delta_0 * T = T$, $\delta_a * T = \tau_a T$ et $(\partial^\alpha \delta_0) * T = \partial^\alpha T$

(c) Pour dériver/translater un produit de convolution quelconque, il suffit de dériver/translater un des facteurs.

Démonstration. (a) Comme deux des trois facteurs sont à support compact, on a associativité et donc

$$\langle T * S, \varphi \rangle = (T * S) * \check{\varphi}(0) = T * (S * \check{\varphi})(0) = \left\langle T, \check{S} * \varphi \right\rangle$$

(b) On utilise les résultats de l'exemple 2.4.13 : pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle \delta_a * T, \varphi \rangle = \langle T, \delta_{-a} * \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \varphi \rangle = \langle \tau_a T, \varphi \rangle$$

d'où en particulier $\delta_0 * T$: la mesure de Dirac est bien un neutre pour la convolution des distributions. Ensuite, pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\langle \partial^\alpha (\delta_0 * T), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \delta_0 * \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle$$

(c) Si T et S sont des distributions à support convolutif, alors rajouter un compact à $(\operatorname{Supp} T, \operatorname{Supp} S)$ donne un triplet convolutif, on a donc par associativité (et commutativité)

$$\delta_a * (T * S) = (\delta_a * T) * S = T * (\delta * S)$$

donc $\tau_a(T * S) = (\tau_a T) * S = T * (\tau_a S)$ par le second point. De même, on obtient $\partial^\alpha (T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S) = (\partial^\beta T) * (\partial^\gamma S)$ où $\gamma + \beta = \alpha$. □

Exemple 2.4.32. Comme promis, la proposition précédente nous permet de montrer que sur $\mathbb{R}$, on a

$$(1 * \delta_0') * H = 0 * H = 0 \quad \text{et} \quad 1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1$$

toutes les convolutions considérées sont bien définies car elles possèdent toujours un facteur à support compact. On n'a donc pas associativité dans le cas général.

Théorème 2.4.33. *(Continuité)*
Soient F, G deux fermés convolutifs de $\mathbb{R}^d$, ainsi que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de distributions, à support respectivement dans F et G, qui convergent respectivement vers T et S. Alors

$$\lim_{n\to\infty} T_n * S_n = T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

Démonstration. On a déjà montré le résultat dans le cas où (T_n) ou (S_n) est constante (c'est le lemme 2.4.27). Nous allons pouvoir conclure grâce au corollaire 1.1.18. On se restreint au cas F, G compact, (le cas général en découlant directement). On considère E l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^d$ à support dans F. On montre que si K est un compact, l'application

$$\begin{array}{ccc} E \times \mathcal{D}(K) & \longrightarrow & \mathcal{D}(F+K) \\ (T, \varphi) & \longmapsto & T * \varphi \end{array}$$

est continue, si $(T_n) \to T$ dans E et $(\varphi_n) \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(K)$, on doit montrer que $\partial^\alpha(T * \varphi)$ converge uniformément vers $\partial^\alpha(T*\varphi)$ sur K. Si par l'absurde ceci est faux, il existe $(x_n) \to x$ dans $F + K$ telle que $\partial^\alpha(T_n * \varphi_n)(x_n)$ ne converge pas vers $\partial^\alpha(T * \varphi)(x)$, or, en posant $\psi_n : x \mapsto \varphi_n(x_n - y)$, on a directement que (ψ_n) converge vers ψ dans $\mathcal{D}(L)$ où $L = K + F - K$, donc par la proposition 2.1.9, on a

$$\partial^\alpha(T_n * \varphi_n)(x_n) = \langle \partial^\alpha T_n, \psi_n \rangle \to \langle \partial^\alpha T, \psi \rangle = \partial^\alpha(T * \varphi)(x)$$

d'où une contradiction. Revenons au théorème, on doit montrer que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\left\langle T_n, \check{S}_n * \varphi \right\rangle = \langle T_n * \varphi_n, \varphi \rangle \to \langle T * S, \varphi \rangle$$

on vient de montrer que $\check{S}_n * \varphi$ converge vers $\check{S} * \varphi$ dans $\mathcal{D}(L)$ où $L = \text{Supp } \varphi - G$. À nouveau par la proposition 2.1.9, le membre de gauche converge vers $\left\langle T, \check{S} * \varphi \right\rangle$ d'où le résultat. □

Troisième partie

Théorie de Fourier des distributions

3.1 Transformation de Fourier

3.1.1 Classe de Schwartz

Nous avons défini les distributions comme le dual topologique des espaces de fonctions test $\mathcal{D}(\Omega)$. Un outil remarquable pour la résolution d'équations aux dérivées partielles est l'analyse de Fourier, nous cherchons ainsi à étendre ces notions au monde des distributions : nous voulons pouvoir définir la transformée de Fourier d'une distribution, comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, on peut chercher à définir cette opération par dualité :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)\varphi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,y\rangle} f(y)dy\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,y\rangle} f(y)\varphi(x)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,y\rangle}\varphi(x)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\widehat{\varphi}(y)dy\end{aligned}$$

remarquons que nous avons appliqué le théorème de Fubini, ce qui est ici valide car φ et f sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$.
On voudrait donc définir la transformée de Fourier d'une distribution par la formule

$$\left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle := \langle T, \widehat{\varphi}\rangle$$

Seulement nous rencontrons un problème : l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas en général stable par transformation de Fourier, la formule $\langle T, \widehat{\varphi}\rangle$ peut donc ne pas avoir de sens, pour pallier cette lacune, on doit s'intéresser à un espace de fonctions régulières stables par transformation de Fourier : la classe de Schwartz

Définition 3.1.1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, on dit que φ est à ***décroissance rapide*** si

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, (x \mapsto x^\alpha \varphi(x)) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$$

On apelle ***classe de Schwartz*** sur $\mathbb{R}^d$ l'espace des fonctions lisses, à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \left\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \left\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\right\|_\infty < \infty\right\}$$

Nous munissons $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ d'une topologie avec la famille de semi normes

$$\mathcal{N}_p(\varphi) := \sum_{\substack{\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha|,|\beta| \leqslant p}} \left\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\right\|_\infty$$

Par définition, on a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $\mathcal{N}_p(\varphi) < \infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.1.2. *La famille $(\mathcal{N}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ d'une structure d'espace de Fréchet, pour laquelle $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ si et seulement si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \lim_{n\to\infty} \left\|x^\alpha \partial^\beta (\varphi_n - \varphi)\right\|_\infty = 0$$

Démonstration. Comme $\mathcal{N}_0 = \|.\|_\infty$, la suite $(\mathcal{N}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ donne une structure d'espace localement convexe métrisable. Ensuite, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, la suite $(x^\alpha \partial^\beta \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur $\mathbb{R}^n$: elle converge uniformément vers une fonction $\varphi_{\alpha,\beta}$. La multiplication par une fonction polynomiale étant une application continue, on a $x^\alpha \varphi_{0,\beta} = \varphi_{\alpha,\beta}$, et on a déja vu que $\partial^\beta \varphi_{0,0} = \varphi_{0,\beta}$, on obtient ainsi que φ est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, qui est donc un espace de Fréchet. □

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par multiplication par une fonction polynômiale et par dérivation, c'est plutôt évident mais ça nous sera utile.

Remarque 3.1.3. Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, la fonction

$$x \mapsto x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, en effet, la fonction $x \mapsto |x|^{d+1} x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)$ est bornée, on a donc

$$|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{d+1}}$$

comme $x^\alpha \partial^\beta \varphi$ est lisse, il suffit de montrer que $\left\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\right\|_{1,\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{B}(0,1[}$ est finie, or on a

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{B}(0,1[} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{B}(0,1[} \frac{1}{|x|^{d+1}} dx = C\lambda(\mathbb{S}^{d-1}) \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr < \infty$$

d'où le résultat.

On pourra ainsi considérer la transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Concernant la stabilité de la classe de Schwartz, on remarque que la multiplication d'un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par un élément de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas toujours dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, en effet, sur $\mathbb{R}$, $\exp(-x^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\exp(x^2) \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ en donnent un contre exemple frappant, nous voulons donc trouver un critère convenable.

Définition 3.1.4. Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ est dite à ***croissance lente*** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \ |f(z)| \leqslant C(1 + |x|)^n$$

Autrement dit, f est bornée en module par un certain polynôme.

Remarque 3.1.5. Il ne faut pas confondre la croissance lente et la décroissance rapide introduite à la définition 3.1.1. La première affirme que la croissance de f est controlée par un polynôme, tandis que la seconde affirme que f tend vers 0 plus vite que l'inverse de tout polynôme.

Lemme 3.1.6. *Soit $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ est à croissance lente ainsi que ses dérivées, alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) & \longmapsto & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ & \varphi & \longmapsto & f\varphi \end{array}$$

est bien définie et continue.

Démonstration. Il est clair que l'application F est au moins bien définie à valeurs dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, nous allons montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \mathcal{N}_p(F(\varphi)) \leqslant C\mathcal{N}_q(\varphi)$$

(cela suffira à conclure que $F(\varphi)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et que F est continue, par la proposition 1.1.10).
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, et $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}
|x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)(x)| &= \left| x^\alpha \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^{\beta-\gamma} f(x) \partial^\gamma \varphi(x) \right| \\
&\leqslant \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} |\partial^{\beta-\gamma} f(x)||x^\alpha \partial^\gamma \varphi(x)| \\
&\leqslant \sum_{\gamma \leqslant \beta} \binom{\beta}{\gamma} C_{\beta-\gamma}(1+|x|)^{n_{\beta-\gamma}} |x^\alpha \partial^\gamma \varphi(x)| \\
&\leqslant C' \mathcal{N}_q(\varphi)
\end{aligned}$$

où C' et q ne dépendent que de α et de β (et de f bien-sûr). □

Proposition 3.1.7. *La transformée de Fourier induit une bijection $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. On commence par un rappel fondamental sur la transformée de Fourier, qui justifie la définition de la classe de Schwartz

Lemme 3.1.8. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a*

(a) Si $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, la fonction $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et les dérivées partielles de $\widehat{f}$ sont données par $\partial_k \mathcal{F}(f) = -i\mathcal{F}(x_k f)$

(b) Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, de limite nulle quand $|x|$ tend vers $+\infty$, et si les dérivées partielles de f sont dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}(\partial_k f) = i\xi_k \widehat{f}$.

Démonstration. (a) On voit $\widehat{f}$ comme une intégrale à paramètre, on a

- La fonction $x \mapsto e^{-i(x,\xi)} f(x)$ est intégrable pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.
- La fonction $\xi \mapsto e^{-i(x,\xi)} f(x)$ admet une k-ème dérivée partielle continue (en ξ), avec

$$\partial_k \left(e^{-i(x,\xi)} f(x) \right) = -ix_k e^{-i(x,\xi)} f(x)$$

- Par hypothèse, on a $|\partial_k \left(e^{-i(x,\xi)} f(x) \right)| \leqslant |x_k f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, $\widehat{f}$ admet une k-ème dérivée partielle continue, avec la formule voulue.
(b) On utilise à la suite le théorème de Fubini et une intégration par parties pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\partial_k f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)} \partial_k f(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\left(\check{x_k}, \check{\xi_k}\right)} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_k\xi_k} \partial_k f(x) dx_k d\check{x}_k \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\left(\check{x_k}, \check{\xi_k}\right)} \left(\left[e^{-ix_k\xi_k} f(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} + i\xi_k \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_k\xi_k} f(x) dx_k \right) d\check{x}_k \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\left(\check{x_k}, \check{\xi_k}\right)} i\xi_k \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_k\xi_k} f(x) dx_k d\check{x}_k \\
&= i\xi_k \mathcal{F}(f)(x)
\end{aligned}$$

□

C'est grâce à ce lemme que nous pouvons montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par transformée de Fourier : soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la fonction $\widehat{\varphi}$ est lisse car, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, on a $x^\beta\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ et donc

$$\partial^\beta \widehat{\varphi} = -i\mathcal{F}(x^\beta f)$$

existe. Ensuite, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\left|x^\alpha \partial^\beta \widehat{\varphi}\right| = \left|x^\alpha (-i)^{|\beta|}\mathcal{F}\left(x^\beta \varphi\right)\right| = \left|(-i)^{|\alpha|+|\beta|}\mathcal{F}\left(\partial^\alpha\left(x^\beta\varphi\right)\right)\right|$$

Comme la fonction $\partial^\alpha\left(x^\beta\varphi\right)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, cette dernière quantité est bornée par $\left\|\partial^\alpha\left(x^\beta\varphi\right)\right\|_1$, ainsi, $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Réciproquement, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, par inversion de Fourier, on alors $\varphi = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\check{\widehat{\varphi}})$, ainsi, $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est surjective, et son injectivité est un conséquence générale de la formule d'inversion de Fourier. □

Théorème 3.1.9. *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. La majorité du travail a été effectuée dans la proposition précédente : on sait que $\mathcal{F}$ induit une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans elle même. Comme $\mathcal{F}^{-1}$ est donnée par $\frac{1}{(2\pi)^{2d}}\mathcal{F}^4$, il suffit de vérifier la continuité de $\mathcal{F}$, en appliquant la condition de la proposition 1.1.10. Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on considère $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha|, |\beta| \leqslant p$. Comme la fonction $f : x \mapsto \left(1 + |x|^2\right)^{-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\left\|x^\alpha \partial^\beta \widehat{\varphi}\right\|_\infty \leqslant \left\|\partial^\alpha (x^\beta)\varphi\right\|_1 \leqslant \|f\|_1 \left\|(1+|x|^2)^d \partial^\alpha (x^\beta\varphi)\right\|_\infty$$

d'où

$$\mathcal{N}_p(\widehat{\varphi}) \leqslant \|f\|_1 \mathcal{N}_{p+2d}(\varphi)$$

□

Nous reviendrons sur la classe de Schwartz quand nous parlerons des liens entre convolution et transformée de Fourier dans la section 3.3.

3.1.2 Distributions tempérées, transformation de Fourier

Maintenant que nous possédons un espace adéquat du point de vue de la transformée de Fourier, nous nous intéressons à son dual topologique :

Définition 3.1.10. On appelle ***distribution tempérée*** toute forme linéaire continue $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{K}$, c'est à dire telle que

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d \mid \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), |\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C\left\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\right\|_\infty$$

On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées.

Proposition 3.1.11. *Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, la restriction des distributions tempérées aux fonctions tests sur Ω donne une application continue $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration. On a une injection continue $\iota : \mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, dont la transposée est une application continue $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{D}(\Omega)$, qui correspond à la restriction des distributions aux fonctions dont le support est un compact inclus dans Ω (qui sont bien des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Il peut être en pratique ardu de déterminer si une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ se prolonge en une distribution tempérée, mais on a quelques critères.

Proposition 3.1.12. *(a) Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ est une fonction à croissance lente, alors T_f est une distribution tempérée.*

(b) Toute distribution à support compact induit une distribution tempérée. On obtient ainsi une application $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, continue pour les deux topologies sur $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

(c) Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ est lisse, à croissance lente ainsi que ses dérivées, alors la multiplication par f est une application continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

Démonstration. (a) Reprenons les hypothèses, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$|\langle T_f, \varphi\rangle| \leqslant \left\|C(1+|x|)^k\varphi\right\|_1 \leqslant \|f\|_1 \left\|C(1+|x|)^k(1+|x|^2)^d\varphi\right\|_\infty$$

où $f : x \mapsto (1+|x|^2)^{-d}$. On a bien que T_f est tempérée.
(b) On a vu que l'espace $\mathcal{E}'(\Omega)$ s'identifie au dual topologique de $\mathcal{E}(\Omega)$, la transposée de l'injection $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ donne alors la continuité de la restriction étudiée (pour la plus forte topologie sur $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, cf remarque 2.3.10).
(c) La multiplication par f est simplement la transposée de la multiplication par f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, qui est continue par le lemme 3.1.5. □

Proposition 3.1.13. *Les distributions tempérées sont stables par dérivations, et la dérivation définit une opération continue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C\mathcal{N}_p(\varphi)$$

pour un $p \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$. Ainsi, on obtient

$$|\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle| = |\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle| \leqslant C\mathcal{N}_{p+|\alpha|}(\varphi)$$

Soit ensuite $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, l'application $\partial^\alpha : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ donne

$$ev_\varphi \circ \partial^\alpha = ev_{(-1)^\alpha\partial^\alpha\varphi}$$

qui est continue car $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation. □

Exemple 3.1.14. Considérons la fonction $f : x \mapsto e^x(\cos(x) + i\sin(x))$ définie sur $\mathbb{R}$. On a $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, en effet, une primitive de f est donnée par $x \mapsto i\exp(ie^x)$, qui est une fonction bornée, donc une distribution tempérée. On conclut alors par le résultat précédent.
De même, la fonction $x \mapsto \ln|x|$ étant à croissance lente, sa dérivée distributionnelle $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution tempérée.

Nous sommes à présent parés pour définir une notion de transformée de Fourier des distributions.

Définition 3.1.15. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, la formule suivante

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \ \left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle$$

définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$, que l'on appelle ***transformée de Fourier*** de la distribution T (suivant les cas, on notera également $\mathcal{F}(T)$ cette distribution).

Cette définition est correcte grâce au théorème 3.1.9. Par dualité, on retrouver immédiatement certaines propriétés élémentaires de la transformée de Fourier :

Proposition 3.1.16. *Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a*

(a) Pour $a \in \mathbb{R}^d$, on a $\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-i\xi a}\widehat{T}$

(b) Pour $a \in \mathbb{R}^d$, on a $\mathcal{F}(e^{ixa}T) = \tau_a \widehat{T}$

(c) Pour $k \in [\![1, d]\!]$, la fonction $x \mapsto x_k$ est lisse, à croissance lente ainsi que ses dérivées. On a ainsi $x_k T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et de plus $-i\mathcal{F}(x_k T) = \partial_k \mathcal{F}(T)$.

(d) On a de même $\mathcal{F}(\partial_k T) = i\xi_k \mathcal{F}(T)$.

Démonstration. (a) On rappelle que pour $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle \tau_a T, \varphi \rangle := \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle$, donc ici, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{\tau_a T}, \varphi \right\rangle &= \langle \tau_a T, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \langle T, \tau_{-a}\widehat{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

Or, on a

$$\tau_{-a}\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi + a) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-ix(\xi+a)} dx = \mathcal{F}(e^{-ixa}\varphi)(\xi)$$

donc

$$\left\langle \widehat{\tau_a T}, \varphi \right\rangle = \left\langle \widehat{T}, e^{-ixa}\varphi \right\rangle = \left\langle e^{-ixa}\widehat{T}, \varphi \right\rangle$$

d'où le résultat.
(b) De même, on a

$$\left\langle \tau_a \widehat{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\tau_{-a}\varphi) \rangle = \left\langle T, e^{-ia\xi}\widehat{\varphi} \right\rangle = \left\langle \widehat{e^{-ia\xi}T}, \varphi \right\rangle$$

(c) et (d) sont conséquences directe du lemme 3.1.8 □

Théorème 3.1.17. *Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a $\widehat{\widehat{T}} = (2\pi)^d \check{T}$, avec $\left\langle \check{T}, \varphi \right\rangle := \langle T, \check{\varphi} \rangle$.
De plus, la transformation de Fourier définit un homéomorphisme $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Le premier point est simplement la conséquence de la formule d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\left\langle \widehat{\widehat{T}}, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \widehat{\widehat{\varphi}} \right\rangle = (2\pi)^d \langle T, \varphi \rangle$$

On déduit de ceci que $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui même, dont il reste seulement à montrer la continuité. Soit $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a

$$ev_\varphi \circ \mathcal{F}(T) = \left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle = ev_{\widehat{\varphi}}(T)$$

ainsi, $ev_\varphi \circ \mathcal{F}$ est continue, et $\mathcal{F}$ est continue. □

Remarque 3.1.18. On aurait également pu avancer que la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est la transposée de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 3.1.19. Cette nouvelle notion permet de calculer les transformées de Fourier de fonctions classiques pour lesquelles les définitions usuelles n'ont pas cours : par exemple, considérons la fonction constante égale à 1. Il s'agit d'une distribution temérée, avec

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \left\langle \widehat{1}, \varphi \right\rangle = \langle 1, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \widehat{\widehat{\varphi}}(0) = (2\pi)^d \check{\varphi}(0) = (2\pi)^d \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

De même, pour $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{e^{ixa}} = \tau_a \widehat{1} = \delta_a$$

Ce résultat est très naturel si l'on interpréte les transformées de Fourier comme fonctions d'une fréquence : la fonction e^{ixa} n'est finalement qu'une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{a}$, donc un signal pur de fréquence $\frac{a}{2\pi}$, ce qu'exprime la transformée de Fourier que nous avons trouvé.

Exemple 3.1.20. On déduit immédiatement de l'exemple précédent que $\widehat{\cos} = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$ et $\widehat{\sin} = \frac{1}{2i}(\delta_1 - \delta_{-1})$.
De même, en itérant la proposition 3.1.16, on obtient

$$\widehat{x^n} = i^n (-i)^n \widehat{x^n} = i^n \mathcal{F}(1)^{(n)} = i^n \delta_0^{(n)}$$

on peut ainsi déterminer les transformées de Fourier des polynômes réels.

Exemple 3.1.21. (Fonction de Heaviside)
On souhaite calculer la transformée de Fourier de la fonction $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$. On sait que $H' = \delta_0$, on a donc, en posant $T = \widehat{H}$

$$1 = \widehat{\delta_0} = \mathcal{F}(H') = ix\widehat{H}$$

donc $xT = -i$. Résolvons cette équation : on pose $T_0 = -i\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$, on a vu que $xT_0 = -i$, on a donc $x(T - T_0) = 0$, cette dernière équation se résout à nouveau grâce à la transformation de Fourier :

$$xS = 0 \Rightarrow \widehat{xS} = 0 = i\widehat{S}'$$

donc $\widehat{S}' = 0$ et $\widehat{S}$ est une constante, par inversion de Fourier, S s'écrit $\alpha\delta_0$, où $\alpha \in \mathbb{C}$ est une constante.

On a obtenu $T = T_0 + \alpha\delta_0$, et il reste à évaluer la constante α, ce que l'on fait en appliquant T à la fonction $\varphi : x \mapsto \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il est connu que $\widehat{\varphi} = \sqrt{2\pi}\varphi(x)$, on a donc

$$\langle T, \varphi\rangle = \left\langle H, \sqrt{2\pi}\varphi\right\rangle = \sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(x)dx = \pi$$

et par ailleurs

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T_0, \varphi\rangle + \alpha\varphi(0) = \alpha$$

car φ est paire, donc $\alpha = \pi$, et

$$\widehat{H} = -i\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \pi\delta_0$$

3.1.3 Théorème de Paley-Wiener-Schwartz

Nous avons introduit la classe de Schwartz pour contourner le problème d'instabilité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ par transformée de Fourier, le théorème de Paley-Wiener-Scwartz permet de donner une caractérisation de la transformée de Fourier d'une fonction (et d'une distribution) dont le support est compact. Notre exposition est essentiellement issue de [Zui]
Cette caractérisation fera appel à la notion de fonction holomorphe en plusieurs variables, que nous introduisons rapidement.
Commençons par spécifier que nous identifions $\mathbb{C}^d$ et $\mathbb{R}^{2d}$ par

$$(x_1 + iy_1, \cdots, x_d + iy_d) \mapsto (x_1, y_1, \cdots, x_d, y_d)$$

Définition 3.1.22. Soit $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$, on dit que F est ***holomorphe*** si la fonction associée $F : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\forall j \in [\![1, d]\!],\ \partial_{\overline{z_j}}F = (\partial_{x_j} + i\partial_{y_j})F = 0$$

Remarque 3.1.23. Dans le cas $d = 1$, en séparant $F = u + iv$ où $u = \Re\mathrm{e}(F)$ et $v = \Im\mathrm{m}(F)$, on obtient

$$(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = (\partial_x u - \partial_y v) + i(\partial_x v + \partial_y u)$$

On retrouve que F est holomorphe si et seulement si elle satisfait les équations de Cauchy-Riemann.

On commence par traiter le cas des fonctions test :

Théorème 3.1.24. *(Paley-Wiener)*

(a) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\mathrm{Supp}\ \varphi \subset \mathcal{B}(0, r]$, *alors il existe $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ telle que $F_{|\mathbb{R}^d} = \widehat{\varphi}$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists C_n > 0 \mid |F(z)| \leqslant C_n(1 + |z|)^{-n}e^{r|\Im\mathrm{m} z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}^d \tag{3.2}$$

(b) Réciproquement, si $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ est holomorphe et respecte 3.2, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans $\mathcal{B}(0, r]$ telle que $F_{|\mathbb{R}^d} = \widehat{\varphi}$.

Remarque 3.1.25. En particulier, il n'y a pas de fonctions test non triviale dont la transformée de Fourier soit à support compact. En effet, une fonction holomorphe est analytique par rapport à chacune de ses variables, elle est donc non bornée ou nulle.

Démonstration. (*a*) Pour $z \in \mathbb{C}^d$, on pose $f(t,z) := e^{-i(t,z)}\varphi(t)$ où $(t,z) := \sum_{j=1}^{d} t_j z_j$ pour $t \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{C}^d$. On pose ensuite

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t,z)dt$$

Il est clair que $\partial_{\overline{z_j}} f = 0$ pour $j \in [\![1,d]\!]$, ensuite, pour $|z| < R$, on a

$$\left|\partial_{x_j} f(t,z)\right| = \left|\partial_{y_j} f(t,z)\right| = \left|t_j e^{-i(t,z)}\varphi(t)\right| = \left|t_j e^{(t,\Im \mathrm{m} z)}\varphi(t)\right| \leqslant r e^{rR}|\varphi(t)|$$

car $|t| \leqslant r$ sur Supp φ. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, on peut appliquer le théorème de dérivation sous intégrale, qui nous donne que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et holomorphe sur $\mathcal{B}(0,R[$ pour tout $R > 0$, donc sur $\mathbb{C}^d$.

D'autre part, on a $F_{|\mathbb{R}^d} = \widehat{\varphi}$ par définition de la transformée de Fourier des fonctions intégrables.

Il reste à montrer la propriété 3.2, on a

$$|z| = \left(\sum_{j=1}^{d} |z_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{j=1}^{d} |z_j| \Rightarrow |z|^n \leqslant C_n \sum_{j=1}^{d} |z_j|^n$$

Ensuite, on a

$$z_j^n F(z) = \int_{\mathbb{R}^d} (i\partial_{t_j})^n e^{-i(t,z)}\varphi(t)dt$$

comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on peut utiliser le théorème de Fubini pour intégrer par partie et obtenir

$$z_j^n F(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(t,z)}(-i\partial_{t_j})^n \varphi(t)dt$$

on a alors

$$|z_j^n F(z)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} e^{|(t,\Im \mathrm{m} z)|}|\partial_{t_j}\varphi(t)|dt \leqslant e^{r|\Im \mathrm{m} z|}\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_{t_j}\varphi(t)|dt$$

car $|t| \leqslant r$ sur Supp φ. Ceci étant valable pour tout $j \in [\![1,d]\!]$, on obtient bien 3.2.

(*b*) On veut tirer profit de la formule d'inversion de Fourier, on pose

$$\varphi(t) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,x)}F(x)dx$$

3.2 donne clairement que $F_{|\mathbb{R}^d}$ est intégrable, et plus généralement que $(1+|x|)^d F(x)$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc φ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$, avec $\widehat{\varphi} = F_{|\mathbb{R}^d}$. Il reste à montrer que le support de φ est inclus dans $\mathcal{B}(0,r]$, ce pourquoi on utilise le lemme suivant

Lemme 3.1.26. *Pour $y \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\varphi(t) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(t,x+iy)}F(x+iy)dx$$

Démonstration. Fixons $z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, on pose $t' = (t_2, \cdots, t_n)$ et $z' = (z_2, \cdots, z_n)$. La fonction

$$g : z \mapsto e^{i(t_1 z + (t', z'))} F(z, z_2, \cdots, z_n)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$. On considère le lacet Γ_R définit par concaténation $\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$ avec

- $\gamma_1(x) = x$ sur $[-R; R]$
- $\gamma_2(x) = R + ix$ sur $[0; y_1]$
- $\gamma_3(x) = x + iy_1$ sur $[R; -R]$
- $\gamma_4(x) = -R + ix$ sur $[y_1; 0]$

On a

$$0 = \oint_{\Gamma_R} g(z)dz = \int_{-R}^{R} g(x)dx + \int_0^{y_1} g(R + iy)idy + \int_R^{-R} g(x + iy_1)dx + \int_{y_1}^{0} g(-R + iy)idy$$

Quand R tend vers $+\infty$, les intégrales sur γ_2 et γ_4 tendent vers 0, on a en effet

$$|g(R + iy)| \leqslant C_n(1 + R + |y|)^{-n} e^{r(|y| + \sum_{j=2}^{d} |\Im\mathrm{m} z_j|)} e^{-t_1 y - \sum_{j=2}^{d} t_j \Im\mathrm{m} z_j}$$

(on a une majoration similaire pour $g(-R + iy)$) on conclut par le lemme suivant :

Lemme 3.1.27. *(Lumpy)*
Soient $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction méromorphe, telle que $\lim_{M\to\infty} \|f\|_{\infty, \Re\mathrm{e}(z) > M} = 0$, et $(\gamma_R)_{R \in \mathbb{R}_+^*}$ une famille de chemins de longueur bornée telle que

$$\forall M > 0, \exists R_0 > 0 \mid R > R_0 \Rightarrow |\Re\mathrm{e}(\gamma_R)| > M$$

Alors

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

Démonstration. Soit L une borne pour la longueur de γ_R, on a, pour $M > 0$ et R assez grand

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| = \left| \int_0^1 f(\gamma_R(t))\gamma_R'(t)dt \right| \leqslant \|f\|_{\infty, \Re\mathrm{e}(z) > M} L$$

d'où le résultat. □

Par convergence dominée, on obtient alors

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x + iy_1)dx$$

on peut ensuite généraliser la procédure pour obtenir le résultat voulu. □

Soit à présent $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on pose $y = \lambda y/|y|$ où $\lambda > 0$, on a $(t, y) = \lambda|t|$, et $|y| = \lambda$. Pour $n > d + 1$, 3.2 donne

$$|e^{i(t, x+iy)} F(x + iy)| \leqslant C_n e^{-\lambda|t|} (1 + |x|)^{-n} e^{r\lambda}$$

d'où

$$|\varphi(t)| \leqslant C_n' e^{\lambda(r - |t|)} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{-n} dx$$

en laissant λ tendre vers $+\infty$, on trouve que $\varphi(t) = 0$ pour $r - |t| \leqslant 0$, donc Supp $\subset \mathcal{B}(0, r]$. □

Ce premier cas nous sera utile pour étudier le cas des distributions à support compact :

Théorème 3.1.28. *(Paley-Wiener-Schwartz)*

(a) Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est d'ordre n et telle que Supp $T \subset \mathcal{B}(0,r]$*, alors il existe $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ telle que $F_{|\mathbb{R}^d} = \widehat{T}$ et*

$$\exists C > 0 \mid |F(z)| \leqslant C(1+|z|)^n e^{r|\Im \mathrm{m} z|} \quad \forall z \in \mathbb{C}^d \tag{3.3}$$

(b) Réciproquement, si $F : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ est holomorphe et respecte 3.3, il existe $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ à support dans $\mathcal{B}(0,r]$ telle que $F_{|\mathbb{R}^d} = \widehat{T}$.

Démonstration. (a) On pose $F(z) = \left\langle T, e^{-i(\cdot,z)} \right\rangle$ pour $z \in \mathbb{C}^d$. Par dérivation sous crochet, on obtient que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et holomorphe. Ensuite, comme T est d'ordre n et à support compact, la proposition 2.3.6 donne que pour tout voisinage compact K de Supp T, il existe $C > 0$ tel que

$$|F(z)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n} \left\| \partial^\alpha (e^{-i(\cdot,z)}) \right\|_{\infty,K}$$

en particulier, si K est inclus dans la boule $\mathcal{B}(0, r+\varepsilon]$, on obtient

$$|F(z)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n} |z^\alpha| e^{(r+\varepsilon)|\Im \mathrm{m} z|} \leqslant C'(1+|z|)^n e^{(r+\varepsilon)|\Im \mathrm{m} z|}$$

comme la constante C' dépend de n et non de ε, on peut faire tendre ce dernier vers 0 pour obtenir que F satisfait 3.3.
(b) Réciproquement, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a par 3.3 que

$$|F(x)| \leqslant C(1+|x|)^n$$

donc $F_{|\mathbb{R}^d}$ est à croissance lente et induit une distribution tempérée : il existe $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{T} = F_{|\mathbb{R}^d}$. Il reste à montrer que T est à support compact dans $\mathcal{B}(0,r]$. Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ positive à support dans $\mathcal{B}(0,1]$ et d'intégrale 1. On pose $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, par le théorème de Paley-Wiener, $\widehat{\rho_\varepsilon}$ se prolonge à $\mathbb{C}^d$ en une fonction holomorphe, que l'on notera aussi $\widehat{\rho_\varepsilon}(z)$, telle que

$$|\rho_\varepsilon(z)| \leqslant C_{n,\varepsilon}(1+|z|)^{-n} e^{\varepsilon|\Im \mathrm{m} z|}$$

pour $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}^d$. On pose $F_\varepsilon(z) = F(z)\widehat{\rho_\varepsilon}(z)$, par hypothèse, on a

$$|F_\varepsilon(z)| \leqslant C(1+|z|)^n C_{n,\varepsilon}(1+|z|)^{-n} e^{(r+\varepsilon)|\Im \mathrm{m} z|}$$

le théorème de Paley-Wiener, il existe $\phi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support inclus dans $\mathcal{B}(0, r+\varepsilon]$ et telle que $\widehat{\phi_\varepsilon} = F_{\varepsilon|\mathbb{R}^d}$.
Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que Supp $\psi \subset \mathcal{B}(0,r]^c$, on montre que $\langle T, \psi \rangle = 0$. Comme Supp ψ est compact, on a $\phi_\varepsilon \psi = 0$ pour ε assez petit, on a ensuite

$$\langle T, \psi \rangle = \left\langle \mathcal{F}(T), \mathcal{F}^{-1}(\psi) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} F(\xi) \mathcal{F}^{-1}(\psi)(\xi) d\xi$$

Comme ρ_ε est une approximation de l'unité, donc $\widehat{\rho_\varepsilon}$ converge vers 1 au sens des distributions par continuité de la transformation de Fourier, donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\langle F_{|\mathbb{R}^d} \rho_{\varepsilon|\mathbb{R}^d}, \mathcal{F}^{-1}(\psi) \right\rangle = \left\langle F_{|\mathbb{R}^d}, \mathcal{F}^{-1}(\psi) \right\rangle$$

Mais on a
$$\left\langle F_{|\mathbb{R}^d}\rho_{\varepsilon|\mathbb{R}^d}, \mathcal{F}^{-1}(\psi)\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}(F_{|\mathbb{R}^d}\rho_{\varepsilon|\mathbb{R}^d}), \psi\right\rangle = (2\pi)^d \left\langle \check{\phi}_\varepsilon, \psi\right\rangle$$
et ce ceci vaut 0 pour ε assez petit, d'où $\langle T, \psi\rangle = 0$, ainsi, le support de T est inclus dans $\mathcal{B}(0, r]$, d'où le résultat. $\square$

Application 3.1.29. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe à croissance lente :

$$|f(z)| \leqslant C(1 + |z|)^n$$

on remarque que f satisfait la condition 3.3 pour $r = 0$. Ainsi, $\widehat{f_{|\mathbb{R}}}$ est une distribution à support dans $\{0\}$ d'après Paley-Wiener-Schwartz, par l'exemple 2.3.8, on a

$$\widehat{f_{|\mathbb{R}}} = \sum_{k=1}^{p} (\delta_0)^{(k)}$$

Par inversion de Fourier, $f_{|\mathbb{R}}$ est un polynôme, et donc f est un polynôme complexe par prolongement analytique.

Application 3.1.30. On se place dans $\mathbb{R}^d$, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\mathrm{e}(z) > 0$ et $u(x) = e^{-z|x|^2}$, la transformée de Fourier de u est donnée par

$$\widehat{u}(\xi) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}\right)^d e^{\frac{-|\xi|^2}{4z}}$$

(l'application $z \mapsto \sqrt{z}$ est définie sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re\mathrm{e}(z) > 0\}$ par inversion locale, il s'agit d'une fonction holomorphe).

Démonstration. Étape 1 : le résultat est connu si $d = 1$ et $z = \lambda$ est un réel strictement positif : on a $u(x) = e^{-\lambda x^2}$, et $u' = -2\lambda x u$, donc

$$\widehat{u'} = -2\lambda \widehat{xu} \Rightarrow i\xi \widehat{u} = -2\lambda i \widehat{u}' \Rightarrow \frac{\xi}{-2\lambda}\widehat{u} = \widehat{u}'$$

On obtient $\widehat{u}(\xi) = C \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda}\right)$, la valeur de C étant $\widehat{u}(0) = \|u\|_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}$.
Étape 2 : Si $d \geqslant 1$ et $z = \lambda$ est un réel strictement positif, par le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(\xi,x)} e^{-\lambda|x|^2} dx = \prod_{k=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x_k,\xi_k)} e^{-\lambda x_k^2} dx_k = \prod_{k=1}^{d} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} e^{\frac{-x_k^2}{4\lambda}}\right)$$

par l'étape 1.
Étape 3 : Enfin pour $d \geqslant 1$ et $\Omega = \{\Re\mathrm{e}(z) > 0\}$, pour ξ fixé, on considère la fonction

$$\phi(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)} e^{-z|x|^2} dx$$

il s'agit d'une fonction holomorphe par le théorème d'holomorphie sous intégrale, or cette fonction coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la forme voulue, on conclut par prolongement analytique. $\square$

Application 3.1.31. Dans $\mathbb{R}^d$, pour $t > 0$ fixé, on note T_t la transformée de Fourier inverse de la distribution $\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$. On a

$$\text{Supp } T_t \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid |x| \leqslant t\}$$

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème de Paley-Wiener-Schwartz : on considère la fonction F définie sur $\mathbb{C}^d$ par

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (h(z))^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{avec} \quad h(z) = \sum_{j=1}^{d} z_j^2 \in \mathbb{C}$$

où $z_j = \xi_j + i\eta_j \in \mathbb{C}$. On a $h(z) = |\xi|^2 - |\eta|^2 + 2i(\xi,\eta)$, la fonction

$$G : z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (par convergence normale sur les disques fermés centrés en 0). Comme la fonction h est trivialement holomorphe sur $\mathbb{C}^d$, F est holomorphe sur $\mathbb{C}^d$. Ensuite, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k |\xi|^{2d} t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$$

donc F prolonge $\widehat{T_t}$ à $\mathbb{C}^d$, il reste à vérifier la condition de croissance :
Si $|h(z)| \leqslant 1$, on a

$$|F(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = C(t)$$

Si $|h(z)| > 1$, soit $Z = a + ib$ une racine de $h(z)$ dans $\mathbb{C}$, on a $|Z| > 1$, et

$$F(z) = \frac{\sin(tZ)}{Z} = \frac{1}{2iZ}(e^{itZ} - e^{-itZ}) \Rightarrow |F(z)| \leqslant \frac{e^{t|\Im\mathrm{m}(Z)|}}{|Z|} \leqslant e^{t|\Im\mathrm{m}(Z)|}$$

Il reste à relier $\Im\mathrm{m}(Z)$ et $\Im\mathrm{m}(z)$, on a

$$\begin{aligned} |Z|^2 = |a|^2 + |b|^2 = |h(z)| &= \left((|\xi|^2 - |\eta|^2)^2 + 4(\xi,\eta)^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left((|\xi|^2 - |\eta|^2)^2 + 4|\xi|^2|\eta|^2\right)^{1/2} \\ &= |\xi|^2 + |\eta|^2 \end{aligned}$$

Comme $Z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ et $a^2 - b^2 = \Re\mathrm{e}(h(z)) = |\xi|^2 - |\eta|^2$, on a

$$2b^2 \leqslant 2|\eta|^2 \Rightarrow |\Im\mathrm{m}(Z)| \leqslant |\Im\mathrm{m}(z)|$$

On peut donc appliquer le théorème de Paley-Wiener-Schwartz, qui donne le résultat voulu. □

3.2 Distributions périodiques, séries de Fourier des distributions

Nous avons pu définir les transformées de Fourier de certaines distributions, ne voulant pas nous arrêter en si bon chemin, on souhaite maintenant étendre au monde des distributions la notion de série de Fourier.
Notre première difficulté consistera à définir la notion de distribution périodique.

3.2.1 Distributions 2π-périodiques

On se place sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Une fois n'est pas coutume, nous aurons ici l'embarras du choix pour définir les distributions périodiques. Comme on sait translater les distributions, on pourrait choisir de définir qu'une distribution est 2π-périodiques si elle est invariante par la translation $\tau_{2\pi}$.
Mais, de la même manière que les fonctions périodiques $\mathbb{R} \to \mathbb{K}$ s'identifient aux fonctions $\mathbb{T} \to \mathbb{K}$, on peut chercher à définir les distributions 2π-périodique comme les éléments du dual topologique d'un espace de fonctions régulières 2π-périodiques.
Introduisons donc quelques espaces : on pose

$$\mathcal{E}(\mathbb{T}) := \{f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) \mid \tau_{2\pi} f = f\} \quad \text{et} \quad F := \{T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \tau_{2\pi} T = T\}$$

Nous devons donner quelques éléments de topologie pour $\mathcal{E}(\mathbb{T})$, on le munit de la suite de semi-normes N_p définies par

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T}),\ N_p(\varphi) := \sum_{n \leqslant p} \left\|\varphi^{(n)}\right\|_{\infty,[0,2\pi]}$$

Proposition 3.2.1. *La famille $(N_p)_{p\in\mathbb{N}}$ munit $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ d'une structure d'espace localement convexe métrisable, isomorphe a sa topologie induite par $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. Il s'agit d'un espace de Fréchet.*

Démonstration. La suite (N_p) est bien une suite croissante de semi-normes, et si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ est telle que $N_p(\varphi) = 0$, on a en particulier $\varphi_{|[0,2\pi]} = 0$, donc $\varphi = 0$ car elle est 2π-périodique.
On reprend la topologie de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ définie par les normes P_i de la proposition 1.2.8 (pour la suite exhaustive $([-n,n])_{n\in\mathbb{N}}$). Soient $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ et $p \in \mathbb{N}$, on a

$$N_p(\varphi) \leqslant P_{\max(7,p)}(\varphi)$$

en effet, pour $q = \max(7,p) \geqslant 7$, on a $[0,2\pi] \subset [-n,n]$, donc

$$\sum_{n \leqslant p} \left\|\varphi^{(n)}\right\|_{\infty,[0,2\pi]} \leqslant \sum_{n \leqslant q} \left\|\varphi^{(n)}\right\|_{\infty,[-q,q]}$$

Ainsi, notre nouvelle topologie est plus fine que la topologie usuelle. Réciproquement, pour $p \in \mathbb{N}$, comme $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ est périodique, ainsi que ses dérivées, on a

$$N_p(\varphi) = \sum_{n \leqslant p} \left\|\varphi^{(n)}\right\|_{\infty,[-p,p]} \leqslant \sum_{n \leqslant p} \left\|\varphi^{(n)}\right\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sum_{n \leqslant p} \left\|\varphi^{(n)}\right\|_{\infty,[0,2\pi]} = P_p(\varphi)$$

d'où le résultat par le corollaire 1.1.12.
Il suffit pour conclure de montrer que $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ est un fermé de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, ce qui découle de $\mathcal{E}(\mathbb{T}) = \text{Ker}\ (\tau_{2\pi} - Id)$: c'est l'image réciproque de 0 par une application continue, donc un fermé de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. □

On peut donc définir le dual topologique $\mathcal{E}'(\mathbb{T})$, constitué des formes linéaires $T : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \to \mathbb{K}$ respectant la condition de continuité suivante :

$$\exists C > 0, p \in \mathbb{N} \mid \forall \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T}), |\langle T, \varphi\rangle_{\mathbb{T}}| \leqslant C \sum_{n \leqslant p} \left\|\varphi^{(n)}\right\|_{\infty,[0,2\pi]}$$

(on notera exceptionnellement $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{T}}$ le crochet de dualité pour $\mathcal{E}(\mathbb{T})$, afin d'éviter les confusions avec les distributions 'classiques').

Nous pouvons dès à présent énoncer le résultat qui résoudra notre question : les espaces F et $\mathcal{E}'(\mathbb{T})$ sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels topologiques. Nous allons pour montrer ceci construire 'explicitement' des applications continues entre $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, qui induiront les applications voulues entre F et $\mathcal{E}(\mathbb{T})$.

Dans le cas des fonctions, une fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ induit une fonction sur $\mathbb{T}$ par simple restriction, autrement dit par multiplication d'une indicatrice : on ne peut pas être aussi grossier pour nos fonctions test puisqu'on souhaite conserver leur caractère lisse, on utilise donc une fonction qui va 'imiter' $\mathbb{1}_{[0,2\pi[}$ dans le sens suivant :

Lemme 3.2.2. *Il existe $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{2k\pi}\phi = 1$$

Démonstration. On considère φ une fonction plateau pour $[-\pi/2, \pi/2]$, à support inclus dans $[-\pi, \pi]$, et paire (la fonction que nous avons introduite au lemme 1.2.7 permet de construire une telle fonction). On remarque que $[-\pi/2, \pi + \pi/2[$ est un système de représentants de $\mathbb{T}$, on a alors

- Soit $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $\phi(x) = 1$ et $\phi(x + 2k\pi) = 0$ pour $k \neq 0$ dans $\mathbb{Z}$. D'où la formule voulue.
- Soit $x \in]\pi/2, \pi + \pi/2[$, on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(x + 2k\pi) = \phi(x) + \phi(x - 2k\pi) = 1$ par symétrie de ϕ.

Donc ϕ respecte la condition souhaitée. □

En réalité, le lemme précédent sert juste à affirmer l'existence de la fonction ϕ, nous ne ferons pas appel à sa définition, mais juste à la propriété qui la définit (on remarquera donc que nos résultat ne dépendent pas du choix qu'on pourrait faire de la fonction ϕ).

Proposition 3.2.3. *L'application suivante*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{E}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \longmapsto & \phi\varphi \end{array}$$

Est linéaire et continue.

Démonstration. En notant $K = \operatorname{Supp} \phi$, on remarque que f est en fait à valeur dans $\mathcal{D}(K)$, il nous suffit de montrer la continuité de f vue comme à valeur dans $\mathcal{D}(K)$, on remarque premièrement que f est bien définie et linéaire : nous pouvons utiliser la proposition 1.1.10. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in K$

$$\begin{aligned} |(\phi\varphi)^{(n)}(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\phi^{(n-k)}(x)||\varphi^{(k)}(x)| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\|\phi^{(n-k)}\right\|_{\infty,K} \left\|\varphi^{(k)}\right\|_{\infty,[0,2\pi]} \end{aligned}$$

On a donc

$$\left\|(\phi\varphi)^{(n)}\right\|_{\infty,K} \leqslant M \sum_{k\leqslant n} \left\|\varphi^{(k)}\right\|_{\infty,[0,2\pi]}$$

où M est le maximum des constantes $\binom{n}{k} \left\|\phi^{(n-k)}\right\|_{\infty,K}$, d'où le résultat. □

Nous voulons à présent construire une application $g : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}(\mathbb{T})$, qui évite de 'perdre de l'information', comme on travaille avec des fonctions à support compact, on peut tout simplement sommer sur toutes les périodes :

Proposition 3.2.4. *Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction $\widetilde{\varphi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{2k\pi}\varphi$ est un élément de $\mathcal{E}(\mathbb{T})$. De plus l'application suivante*

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathbb{T}) \\ \varphi & \longmapsto & \widetilde{\varphi} \end{array}$$

est linéaire et continue.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un nombre fini d'entiers k tels que $x + 2k\pi \in \text{Supp } \varphi$, ainsi, $\widetilde{\varphi}(x)$ est toujours défini comme une somme finie, et $\widetilde{\varphi}$ est une fonction bien définie. Soit ensuite $x \in \mathbb{R}$ et U un voisinage de x de longueur finie, il existe à nouveau un nombre fini d'entiers k tels que φ soit non nulle sur $U + 2k\pi$, ainsi, $\widetilde{\varphi}$ est lisse sur U comme somme finie de fonctions lisses, le même raisonnement permet de montrer que g est linéaire. Ensuite, $\tau_{2k\pi}\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}$ découle immédiatement de la définition de $\widetilde{\varphi}$, il reste à montrer la continuité de g : soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact, $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ et $p \in \mathbb{N}$. Sur $[0, 2\pi]$, $\widetilde{\varphi}$ s'écrit comme une somme finie : $\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{k\in J} \tau_{2k\pi}\varphi$, on a alors

$$\left\|\widetilde{\varphi}^{(n)}\right\|_{\infty,[0,2\pi]} \leqslant \sum_{k\in J} \left\|\varphi^{(n)}\right\|_{\infty,K}$$

d'où la continuité de g. □

On peut enfin en venir au théorème à proprement parler :

Théorème 3.2.5. *Les applications ${}^t f$ et ${}^t g$ induisent des homéomorphismes linéaires entre F et $\mathcal{E}'(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Nous pouvons commencer par expliciter les applications ${}^t f$ et ${}^t g$: si $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est 2π-périodique, on a

$$\left\langle {}^t f(T), \varphi \right\rangle_{\mathbb{T}} = \langle T, \phi\varphi \rangle$$

et pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$, on a

$$\left\langle {}^t g(T), \varphi \right\rangle = \langle T, \widetilde{\varphi} \rangle_{\mathbb{T}}$$

On peut déjà remarquer que $g \circ f = Id_{\mathcal{E}(\mathbb{T})}$, on a en effet, pour $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(f(\varphi))(x) = \widetilde{\phi\varphi}(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{2k\pi}(\phi\varphi)(x) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(x + 2k\pi)\varphi(x) \\ &= \varphi(x) \end{aligned}$$

(à noter que toutes les sommes sur $\mathbb{Z}$ sont en réalité des sommes finies, sans problèmes de définition). On a donc ${}^t f \circ {}^t g = Id_{\mathcal{E}'(\mathbb{T})}$, réciproquement, pour $T \in F$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \left\langle {}^t g \circ {}^t f(T), \varphi \right\rangle &= \langle T, g \circ f(\varphi) \rangle \\ &= \langle T, \phi\widetilde{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

Remarquons que, comme φ et ψ sont à support compact, les suites $\varphi \sum_{k=-n}^{n} \tau_{2k\pi}\phi$ et $\phi \sum_{k=-n}^{n} \tau_{2k\pi}\varphi$ sont toutes deux constantes à partir d'un certain rang, respectivement égales à φ et $\phi\widetilde{\varphi}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\langle T, \phi\widetilde{\varphi}\rangle &= \lim_{n\to\infty} \left\langle T, \phi \sum_{k=-n}^{n} \tau_{2k\pi}\varphi \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=-n}^{n} \tau_{2k\pi}(\phi T), \varphi \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle T \sum_{k=-n}^{n} \tau_{2k\pi}\phi, \varphi \right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle T, \varphi \sum_{k=-n}^{n} \tau_{2k\pi}(\phi T) \right\rangle \\
&= \langle T, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

d'où le résultat (nous avons notamment utilisé que T est périodique, ainsi, ${}^t g \circ {}^t f$ n'est pas égal à $Id_{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}$, on a bien besoin de le restreindre à F. $\square$

Remarque 3.2.6. En réalité, la valeur de ϕT ne dépend pas de la fonction ϕ choisie : Soient ϕ et ϕ' deux fonctions respectant les hypothèses du lemme 3.2.2, on pose $g = \phi - \phi'$, on a alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(x + 2k\pi) = 0$$

(remarquons que cette somme est en fait finie car g, comme ϕ et ϕ', est continue à support compact). Il existe donc $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $h(x+2\pi) - h(x) = g(x)$, en effet il suffit de poser

$$h(x) := -\sum_{k=0}^{\infty} g(x + 2k\pi)$$

Ainsi, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution 2π-périodique, et $f \in E$ on a

$$\langle T, gf\rangle = \langle T, (\tau_{-2\pi}h)f\rangle - \langle T, hf\rangle = \langle T, (\tau_{-2\pi}hf)\rangle - \langle T, hf\rangle = 0$$

3.2.2 Séries de Fourier des distributions

Dans l'espace de Hilbert, $H = L^2(\mathbb{T})$, muni du produit scalaire $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$, on sait que les fonctions $e_k : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ forment une case hilbertienne de H.
On a alors, pour $f \in L^2(\mathbb{T})$

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f, e_k)e_k \quad \text{avec} \quad (f, e_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

En définissant $c_k(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f, e_k)$, on a $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{-ikx}$ dans H, et cette dernière série induit un prolongement de f à $\mathbb{R}$ en une fonction 2π-périodique.
Pour généraliser ce raisonnement au cas des distributions périodiques, nous devons pouvoir les appliquer contre les applications $e_k \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, ce que nous savons maintenant faire en toutes situation grâce au théorème 3.2.5

Définition 3.2.7. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $e_k : x \mapsto e^{ikx} \in E$. Ainsi, pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \langle T, e_{-k} \rangle_{\mathbb{T}}$$

les ***coefficients de Fourier*** de T. Pour $T \in F$, les coefficients de Fourier de T sont par définition ceux de $f(T) = \phi T \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$.

Cette définition est une autre adaptation au monde des distributions d'une définition usuelle sur des applications. Mais, à la différence du cas des fonctions, la convergence d'une série de Fourier est bien plus facile à obtenir.

Définition 3.2.8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite numérique. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est à ***croissance lente*** s'il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \ |u_n| < C(1 + |k|)^m$$

Exemple 3.2.9. Les coefficients de Fourier d'une fonction 2π-périodique forment une suite à croissance lente par le lemme de Riemann Lebesgue.

Proposition 3.2.10. *Soit $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite à croissance lente, la suite*

$$S_N := \sum_{k=-N}^{N} \gamma_k e^{ikt}$$

converge au sens des distributions vers une distribution $T \in F$ dont les γ_k sont les coefficients de Fourier.

Démonstration. [Bon, p. 129-131] Soit $(\gamma_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ une suite à croissance lente : il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $|\gamma_p| \leqslant C(1 + |p|)^m$ pour $p \in \mathbb{Z}$. On considère la série

$$\sum_{p\neq 0} \frac{\gamma_p}{(ip)^{m+2}} e^{ipt}$$

Elle converge normalement, la norme infinie du terme général est un $O(p^{-2})$. On a donc convergence au sens des distributions, et on peut donc dériver la série termes à termes, en dérivant $N + 2$ fois, on trouve la convergence voulue. □

Ce résultat est fondamental, et distingue nettement le cas des distributions et celui des fonctions. Il reste cependant à montrer que la série de Fourier d'une distribution converge effectivement vers cette distribution (et non vers une autre).

Proposition 3.2.11. *Soient $T \in F$, la suite $(C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de T est à croissance lente.*

Démonstration. Soit $T \in F$, $(C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ les coefficents de Fourier de T. Comme T est une distribution, il existe $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$|C_k| = |\langle T, e_{-k} \rangle_E| = |\langle T, \phi e_{-k} \rangle| \leqslant C \max_{a \leqslant p} \left\| (\phi e_{-k})^{(a)} \right\|_\infty$$

On a par ailleurs

$$
\begin{aligned}
|(\phi e_{-k})^{(a)}| &\leqslant \left| \sum_{q=0}^{a} \binom{q}{a} e_{-k}^{(q)} \phi^{(a-q)} \right| \\
&= \left| \sum_{p=0}^{a} \binom{a}{p} (-ik)^p e_{-k} \phi^{(a-p)} \right| \\
&\leqslant \sum_{p=0}^{a} \binom{a}{p} |k|^p |\phi^{(a-p)}| \\
&\leqslant \sum_{p=0}^{a} \binom{a}{p} |k|^p \left\| \phi^{(a-p)} \right\|_\infty \\
&\leqslant \left\| \phi^{(a-p)} \right\|_\infty \sum_{p=0}^{a} \binom{a}{p} |k|^p
\end{aligned}
$$

Donc la suite $(C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bien à croissance lente. □

Lemme 3.2.12. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, on pose $\widetilde{f} : x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x + 2k\pi)$. Alors $\widetilde{f} \in L^1([0, 2\pi])$ est bien définie, et les coefficients de Fourier de $\widetilde{f}$ sont donnés par*

$$
\forall k \in \mathbb{Z},\ c_k(\widetilde{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{f}(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(k)
$$

où $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

Démonstration. Considérons dans un premier temps la fonction $\widetilde{f}^+ := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\tau_{2k\pi} f|$, qui est bien définie à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ (comme série à terme général positifs), on a

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \widetilde{f}^+(x) dx &= \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(x + 2k\pi)| dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |f(x + 2k\pi)| dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1}
\end{aligned}
$$

L'ensemble des $x \in [0, 2\pi]$ tels que $\widetilde{f}^+(x) = +\infty$ est donc de mesure nulle, on peut ainsi définir $\widetilde{f} \in L^1([0, 2\pi])$ et g est bien périodique, donc $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$. Enfin, on a pour $k \in \mathbb{Z}$

$$
\begin{aligned}
c_k(\widetilde{f}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{f}(x) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x + 2n\pi) e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(x + 2n\pi) e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(k)
\end{aligned}
$$

□

Proposition **3.2.13.** *Si $(\gamma_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ et $(\theta_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ sont deux suites à croissance lente. Les distributions*

$$\Gamma = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \gamma_p e^{ipt} \quad et \quad \Theta = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \theta_p e^{ipt}$$

sont égales si et seulement si les suites (γ_p) et (θ_p) sont égales.

Démonstration. On remarque immédiatement que la suite $(u_p) = (\gamma_p) - (\theta_p)$ est à croissance lente, et on a

$$\Gamma - \Theta = \sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p e^{ipt}$$

il suffit donc de montrer le cas où $\theta_p = 0$ et $\Theta = 0$. Soit donc $(\gamma_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ une suite à croissance lente telle que $\Gamma = 0$.
Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{k=-N}^{N} \gamma_p e^{ipt}, \alpha \right\rangle &= \sum_{k=-N}^{N} \gamma_p \left\langle e^{ipt}, \alpha \right\rangle \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \gamma_p \int_{\mathbb{R}} e^{ipt} \alpha(x) dx \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \gamma_p \widehat{\alpha}(-p) \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \gamma_p c_{-p}(\widetilde{\alpha})
\end{aligned}$$

Où $\widetilde{\alpha} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{2k\pi}\alpha$ a été définie au lemme 3.2.12. Ainsi, on a

$$\langle \Gamma, \alpha \rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_p c_{-p}(\widetilde{a}) = 0$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{Z}$, en posant $\alpha = \phi e_n$, on a

$$\widetilde{\alpha} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{2k\pi}(\phi e_n) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tau_{2k\pi}\phi \right) e_n = e_n$$

Donc

$$\langle \Gamma, \alpha \rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_p c_{-p}(e_n) = \gamma_n = 0$$

et donc $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}} = 0$. □

En résumé, nous avons obtenu le résultat suivant.

Proposition **3.2.14.** *L'application qui à une distribution 2π-périodique associe la suite de ses coefficients de Fourier induit une bijection avec l'ensemble des suites à croissance lente (la réciproque de cette bijection étant l'application envoyant une suite à croissance lente sur la série de Fourier associée).*

On peut également noter que cette bijection munit naturellement l'ensemble des suites à croissance lente d'une topologie :

Proposition 3.2.15. *Une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ converge vers $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$ si et seulement si tous ces coefficients de Fourier convergent vers ceux de T.*

Démonstration. Le sens direct est évident, en effet, on a en particulier $\langle T_n, e_k\rangle \to \langle T, e_k\rangle$ d'où la convergence des coefficients de Fourier. Réciproquement, si tous les membres de la suite $(\gamma_k^n)_{k\in\mathbb{Z}}$ convergent individuellement vers $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, on obtient que $\langle T_n, P\rangle_{\mathbb{T}}$ converge vers $\langle T, P\rangle_{\mathbb{T}}$ si P est un polynôme trigonométrique.
Ensuite, pour $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{T})$, φ est limite dans $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ de sa série de Fourier (la suite de ses coefficients est à décroissance rapide), d'où le résultat. $\square$

Application 3.2.16. (Formule sommatoire de Poisson)
Considérons le peigne de Dirac : $T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}$, ses coefficients de Fourier sont donnés par

$$\frac{1}{2\pi}\langle T, \phi e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(2k\pi)e_k(2k\pi) = \frac{1}{2\pi}$$

Ainsi, au sens des distributions, on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e_{-k}$. On constate que ces distributions sont tempérées, on a donc

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x+2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in Z} e^{ikx}\widehat{\varphi}(k)$$

3.3 Liens avec la convolution

Nous avons vu comment adapter les notions de transformation de Fourier et de convolution au cas des distributions. Il est connu que pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

cette égalité ayant lieu dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Nous voulons élargir cette relation autant que possible au cas des distributions. Ceci demandera un certain nombre de résultats intermédiaires, on peut déjà établir le résultat dans le cas des distributions à support compacts :

Proposition 3.3.1. *Pour $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on a $T * S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\mathcal{F}(T*S) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S)$$

dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Remarquons que l'égalité annoncée a du sens : par le théorème de Paley-Wiener-Schwartz, $\mathcal{F}(T), \mathcal{F}(S)$ et $\mathcal{F}(T*S)$ sont des fonctions lisses et à croissance lente sur $\mathbb{R}^d$, on a de plus

$$\widehat{T*S}(\xi) = \langle T*S, \exp(-i(.,\xi))\rangle = \left\langle T, \check{S} * \exp(-i(.,\xi))\right\rangle$$

la dernière égalité tient grâce à la proposition 2.4.31, car S est à support compact. On a de plus

$$\left(\check{S} * \exp(-i(.,\xi))\right)(x) = \left\langle \check{S}(y), \exp(-i(x-y,\xi))\right\rangle = \langle S(y), \exp(-i(x+y,\xi))\rangle = \widehat{S}(\xi)e^{-i(x,\xi)}$$

on obtient donc

$$\widehat{T * S}(\xi) = \left\langle T, \widehat{S}(\xi)e^{-i(.,\xi)}\right\rangle = \widehat{T}(\xi)\widehat{S}(\xi)$$

□

Pour étendre cette relation dans un cas plus général, nous devons prendre quelques précautions, notamment sur les liens entre convolution et classe de Schwartz, que nous établissons à présent.

Proposition 3.3.2. *Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la convolution $T * \varphi$, a priori un élément de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, est en fait dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, avec*

$$\mathcal{F}(T * \varphi) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(\varphi)$$

Démonstration. Comme φ n'est pas nécéssairement à support compact, on doit utiliser une suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions plateau pour $\mathcal{B}(0,n]$ pour définir la convolution. Comme nous sommes libre de choisir une quelconque telle suite, on pose

$$\theta_n(x) = \mathcal{D}_{\frac{1}{n}}\theta$$

où $\theta =: \theta_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est positive, d'intégrale 1 et valant 1 au voisinage de 0 (on conservera cette suite au cours de cette section). On a donc par définition

$$(T * \varphi)(x) = \lim_{n\to\infty}(T * \theta_n\varphi)(x)$$

On montre que la suite $(\theta_n\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|x^\alpha\partial^\beta(\theta_n - 1)\varphi(x)| \leqslant \sum_{\gamma\leqslant\beta}\binom{\beta}{\gamma}\left|x^\alpha\partial^\gamma(\theta_n-1)(x)\partial^{\beta-\gamma}\varphi(x)\right|$$

où p désigne l'ordre de T, ensuite on a

$$\partial^\gamma\theta_n = \frac{1}{n^{|\gamma|}}D_{\frac{1}{n}}\partial^\gamma\theta$$

comme la fonction $\theta_n - 1$ est nulle sur $\mathcal{B}(0,n]$, on a

$$|x^\alpha\partial^\beta(\theta_n - 1)\varphi(x)| \leqslant \sum_{\gamma\leqslant\beta}(1 + \|\partial^\gamma\theta\|_\infty)\left\|x^\alpha\partial^{\beta-\gamma}\varphi\right\|_{\infty,\mathcal{B}(0,n]^c}$$

Comme la fonction $x \mapsto x^\alpha\partial^{\beta-\gamma}\varphi$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la suite $(\left\|x^\alpha\partial^{\beta-\gamma}\varphi\right\|_{\infty,\mathcal{B}(0,n]^c})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite $(\mathcal{N}_p((\theta_n - 1)\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $\theta_n\varphi$ converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
À présent, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\widehat{T * \theta_n\varphi} = \widehat{T}\widehat{\theta_n\varphi}$$

Par continuité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{\theta_n\varphi}$ converge vers $\widehat{\varphi}$, par le théorème de Paley-Wiener-Schwartz, la fonction $\widehat{T}$ est à croissance lente sur $\mathbb{R}^d$, de même que ses

dérivées (car $\partial^\alpha \widehat{T} = (-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha T}$ est aussi la transformée de Fourier d'un élément de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$), donc la suite $\widehat{T * \theta_n \varphi}$ converge vers $\widehat{T}\widehat{\varphi}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Ainsi, $(T * \theta_n \varphi)$ converge vers $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{T}\widehat{\varphi}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, la continuité de la convolution dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ donne que $T * \theta_n\varphi$ converge vers $T * \varphi$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, l'unicité de la limite nous donne alors $T * \varphi = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{T}\widehat{\varphi}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et le résultat. □

Remarque 3.3.3. Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En effet, comme $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, la convolution $\varphi * \psi$ est bien définie dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, avec

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}(\varphi)\mathcal{F}(\psi)$$

le second membre est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par le lemme 3.1.5 ($\mathcal{F}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est en particulier à croissance lente), ainsi, on a bien $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ car $\mathcal{F}$ induit une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans elle même.

Proposition 3.3.4. *Pour $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on peut définir la convolution $S * \varphi$ en posant*

$$S * \varphi(x) := \langle S, \tau_x \check{\varphi} \rangle$$

cette fonction est à croissance lente, donc appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, avec

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle S * \varphi, \psi \rangle = \langle S, \check{\varphi} * \psi \rangle \quad et \quad \mathcal{F}(S * \varphi) = \mathcal{F}(S)\mathcal{F}(\varphi)$$

De plus si S et φ ont des supports convolutifs, $S * \varphi$ coïncide avec la définition classique.

Démonstration. On reprend la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions plateaux introduite dans la démonstration de la proposition 3.3.2. La suite $(\theta_n\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ainsi on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \left\langle S, \tau_x \check{\theta_n \varphi} \right\rangle \to \langle S, \tau_x \check{\varphi} \rangle$$

Ainsi, la suite de fonctions lisses $S * \theta_n\varphi$ converge simplement vers $S * \varphi$. Ensuite, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|\left\langle S, \tau_x \check{\theta_n \varphi} \right\rangle| \leqslant C\mathcal{N}_p(\tau_x \check{\theta_n \varphi}) \to C\mathcal{N}_p(\tau_x \check{\varphi})$$

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ et $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|y^\alpha \partial^\beta \tau_x \check{\varphi}(y)| = |(-1)^{|\beta|} y^\alpha \tau_x \partial^\beta \check{\varphi}(y)| = |(x-y)^\alpha \partial^\beta \varphi(y)|$$

ceci donne un fonction polynômiale, dont les coefficients s'expriment en fonction des $\mathcal{N}_q(\varphi)$.
Ainsi, $S * \varphi$ est à croissance lente et donc un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par la proposition 3.1.12.
Ensuite, pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle S * \theta_n \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle S, \tau_x \check{\varphi} \rangle \psi(x) dx$$

comme $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la majoration précédente de $\langle S, \tau_x \check{\varphi} \rangle$ nous permet d'utiliser le théorème de convergence dominée : $S * \theta_n \varphi$ converge vers $S * \varphi$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\langle S * \varphi, \psi \rangle &= \lim_{m\to\infty} \langle S * \varphi, \theta_m \psi \rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \langle S * \theta_n \varphi, \theta_m \psi \rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \left\langle S, \check{\theta_n \varphi} * \theta_m \psi \right\rangle \\
&= \langle S, \check{\varphi} * \psi \rangle
\end{aligned}$$

car S est tempérée. Enfin, on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(S*\varphi), \psi\rangle &= \left\langle S*\varphi, \widehat{\psi}\right\rangle \\
&= \left\langle S, \check{\varphi} * \widehat{\psi}\right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{F}^{-1}(S), \widehat{\check{\varphi}}\widehat{\widehat{\psi}}\right\rangle \\
&= (2\pi)^d \left\langle \mathcal{F}^{-1}(S), \check{\widehat{\varphi}}\check{\psi}\right\rangle \\
&= \left\langle \check{\widehat{S}}, \check{\widehat{\varphi}}\check{\psi}\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{S}, \widehat{\varphi}\psi\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{\varphi}\widehat{S}, \psi\right\rangle
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{F}(S*\varphi) = \mathcal{F}(S)\mathcal{F}(\varphi)$.
Enfin, si S et φ sont à supports convolutifs, on a

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n S * \theta_n\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \left\langle S, \theta_n(\tau_x \check{\theta_n\varphi})\right\rangle$$

Or, on a

$$\theta_n(\tau_x\check{\theta_n\varphi}) - \tau_x\check{\varphi} = \theta_n(\tau_x\check{\theta_n\varphi}) - (\tau_x\check{\theta_n\varphi}) + (\tau_x\check{\theta_n\varphi}) - \tau_x\check{\varphi}$$

d'où le résultat. □

On peut enfin en venir au théorème principal qui résume les liens que nous avons donnés entre convolution et transformée de Fourier.

Théorème 3.3.5. *La relation $\mathcal{F}(T*S) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S)$ a lieu dans les cas suivants :*

- *Si $T, S \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a alors égalité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.*
- *Si $T, S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a alors égalité dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*
- *Si $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on a alors égalité dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$.*
- *Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a alors égalité dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*
- *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a alors égalité dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*
- *Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a alors égalité dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Seul le dernier point n'a pas encore été démontré, nous utiliserons pour ce faire un lemme de densité :

Lemme 3.3.6. *L'espace $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$: toute distribution tempérée est limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ d'une suite de distributions à support compact.*

Démonstration. Pour $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la suite $(\theta_n S)_{n\in\mathbb{N}}$ répond à la question. □

Soit donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers S dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{F}(T * S_n) = \widehat{T}\widehat{S_n}$, mais comme $\widehat{T}$ est à croissance lente, ceci converge vers $\widehat{T}\widehat{S}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Par continuité de $\mathcal{F}^{-1}$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on conclut que $T * S_n$ converge vers $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{T}\widehat{S})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Comme la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ entraîne la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{T}\widehat{S}) = T * S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, ce qui clos la démonstration. □

À présent, comme dans le cas des fonctions, on sait qu'une relation entre convolution et transformée de Fourier a également lieu sur les fonctions périodiques :

Proposition 3.3.7. *Soient $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, on pose*

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy$$

La fonction $f * g$ est alors bien définie, appartient à $L^1(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, et ses coefficients de Fourier sont les produits de coefficients de Fourier de f et de g.

Démonstration. Comme $\mathbb{T}$ est de mesure finie, on a bien $L^1(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ par l'inégalité de Hölder. Pour $x \in \mathbb{T}$, on a

$$|f * g(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)||g(x-y)| dy \leqslant \|f\|_{2,\mathbb{T}} \|\tau_x \check{g}\|_{2,\mathbb{T}} < \infty$$

donc $f * g$ est bien définie, de plus, comme $f * g$ est bornée, elle appartient à $L^2(\mathbb{T})$ et on peut considérer ses coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned}
\langle f * g, e_n \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) dy e_{-n}(x) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e_{-n}(x) dx g(y) dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e_{-n}(x+y) dx g(y) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_n(f) e_{-n}(y) g(y) dy \\
&= C_n(f) C_n(g)
\end{aligned}$$

$\square$

On pourrait définir la convolution des distributions périodiques par un raisonnement similaire à celui que nous avons utilisé pour la convolution sur $\mathbb{R}^d$, nous choisissons plutôt ici de la définir 'naïvement' grâce aux coefficients de Fourier.

Définition 3.3.8. Soient $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$, on définit le ***produit de convolution*** $T * S$ comme la distribution périodique dont les coefficients de Fourier sont les $C_n(T) C_n(S)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 3.3.9. Le produit de deux suites à croissance lente étant lui même à croissance lente, $T * S$ est une distribution périodique bien définie.
Nous avons par définition une relation entre la convolution et les coefficients de Fourier : $C_n(T * S) = C_n(T) C_n(S)$.

Proposition 3.3.10. *Soient $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$C_k(T^n) = (-i)^n C_k(T) \quad et \quad (T * S)^{(n)} = T^{(n)} * S = T * S^{(n)}$$

Démonstration. La première relation découle immédiatement de la définition de la dérivée :

$$C_k(T^{(n)}) = \left\langle T^{(n)}, e_k \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, (e_k)^{(n)} \right\rangle = (-i)^n \left\langle T, e_k \right\rangle = (-i)^n C_k(T)$$

Ensuite, on a

$$C_n((T * S)^{(n)}) = (-i)^n C_n(T * S) = (-i)^n C_n(T) C_n(S)$$

On conclut par la proposition 3.2.13 $\square$

Nous n'irons pas beaucoup plus loin sur ce sujet, nous pouvons terminer en énonçant une application à la résolution de l'équation de la chaleur.

Proposition 3.3.11. *(Équation de la chaleur sur un cercle)*
On considère la fonction $K : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie par

$$K(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} e_n(x)$$

La fonction K est bien définie et lisse.
Soit à présent $T_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$, la fonction $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(T_0) e^{-n^2 t} e_n(x)$$

est à nouveau bien définie et lisse, avec $\partial_{x^2} u = \partial_t u$, et $u(., x)$ converge vers T_0 dans $\mathcal{E}'(\mathbb{T})$

Remarque 3.3.12. Ce résultat, déjà connu pour le cas d'une donnée initiale dans $L^2(\mathbb{T})$, reste en fait vrai pour une distribution. On remarque un nouvel effet régularisant de l'équation de la chaleur.

Démonstration. On pose $f_n(t, x) = e^{-n^2 t} e_n(x)$, on a

$$\partial_{t^p} \partial_{x^q} f_n(t, x) = (-n^2)^p (in)^q f_n(t, x)$$

Par dérivation sous intégrale, on obtient que K est lisse.
Comme la suite $C_n(T_0)$ est à croissance lente, la suite $C_n(T_0) e^{-n^2 t} e_n(x)$ est toujours à décroissance rapide, donc u est lisse à nouveau par dérivation sous intégrale.
On note ensuite que $u(t, .) = T_0 * K(t, .)$, donc $\partial_{x^2} u = T_0 * \partial_{x^2} K(t, \cdot)$, ensuite, par dérivation sous intégrale, on obtient $\partial_t u = \partial_{x^2} u$.
Enfin, quand T tend vers 0, les coefficients de la distribution $u(t, \cdot)$ convergent vers ceux de T_0, d'où le résultat par la proposition 3.2.15 $\square$

Quatrième partie

Notion de solutions fondamentales

Comme nous l'avions annoncé au début de ce travail, un des buts majeurs dans l'introduction des distributions est l'étude d'équations aux dérivées partielles. Nous choisissons de nous pencher ici sur la recherche de solutions fondamentales d'opérateurs différentiels, qui constitue un des points centraux de ces techniques (et fait recours de manière cruciale aux outils développés précédemment).

4.1 Quelques prérequis techniques

4.1.1 Solution fondamentale, définition

Nous avons vu que, pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a (grâce à l'exemple 2.4.13)

$$\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \partial^\alpha \delta_0 * T = \partial^\alpha T$$

Ainsi, un opérateur différentiel à coefficients constant (on ne considèrera que ce cas précis) peut se réecrire comme un opérateur de convolution. Si T et f sont deux distributions, on a

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha \partial^\alpha T = f \Leftrightarrow \left(\sum_{\alpha \in A} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \right) * T = f$$

On peut donc s'íntéresser en général aux équations de convolution de la forme

$$A * T = f$$

où A et f sont des distributions fixées, on remarque déjà quelques problèmes pour définir proprement une telle équation (la notion de supports convolutifs doit rentrer en jeu pour que ceci ait du sens).

Définition 4.1.1. Soit $A \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on appelle ***solution fondamentale*** de A toute distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, de support convolutif avec celui de A, et telle que $A * E = \delta_0$.

Cette définition n'est pas sans évoquer celle d'un inverse dans une algèbre. Mais l'algèbre considérée ici n'étant pas associative, ce point de vue n'est pas le plus fructueux, mais il rend heuristiquement clair le résultat suivant, qui justifie l'introduction de la notion de solution fondamentale :

Proposition 4.1.2. *Soit $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ possédant une solution élémentaire E,*

(a) Pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, la distribution $T = E * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est une solution de l'équation $A * T = f$.

(b) De plus, si l'équation $A * T = f$ admet une solution élémentaire à support compact, cette solution est en fait $T = E * f$.

Démonstration. (a) Comme f et A sont à supports compacts, les supports de A,f et E sont convolutifs et on a associativité de la convolution :

$$A * T = A * (E * f) = (A * E) * f = \delta_0 * f = f$$

d'où le premier point.
(b) Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est telle que $A * S = f$, alors

$$S = (A * E) * S = (E * A) * S = E * (A * S) = E * f$$

□

Ceci dit, les solutions fondamentales ne sont en pratique jamais uniques (dans le cas d'un opérateur différentiel en dimension 1, l'ensemble des solutions fondamentales est stables sous translation par une solution de léquation différentielle associée). De plus, toute distribution n'admet pas de solution fondamentale : si $A = \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a vu que $\varphi * T$ est une fonction lisse, et ne peut donc être égale à δ_0.
Nous étudierons essentiellement des opérateurs différentiels, donc issus de distributions à support compact (car réduit à $\{0\}$), ce qui rend la condition de support convolutif superflue dans la définition précédente. Justement dans le cas des opérateurs différentiels (à coefficients constants), un théorème de Malgrange et Ehrenpreis permet d'affirmer l'existence de solution fondamentale de tout opérateur différentiel non trivial (cf [Bon, p. 150]), nous donnons ici la démonstration du cas simple où $d = 1$:

Proposition 4.1.3. *Soient $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$, on pose $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ la solution de l'équation différentielle*

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \phi^{(j)} = 0$$

telle que $\phi(0) = 0 = \phi'(0) = \cdots = \phi^{n-2}(0)$ et $1 = \phi^{(n-1)}(0)$. Alors[3] *$E = \frac{1}{a_n} H\phi$ est une solution fondamentale de l'opérateur $\sum_{j=0}^{n} a_j \partial^j$.*

Démonstration. Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires garantit l'existence et l'unicité de $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, le produit $H\varphi$ a donc un sens dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, et la formule de Leibniz nous donne alors

$$\begin{aligned}(H\phi)^{(m)} &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \partial^k H \partial^{m-k} \phi \\ &= H\phi^{(m)} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \delta_0^{(k-1)} \phi^{(m-k)}\end{aligned}$$

Si $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n-1$, alors δ^{k-1} est une distribution d'ordre $k-1$, et les $k-1$ premières dérivées de $\phi^{(m-k)}$ sont nulles en 0, on a alors $\delta_0^{(k-1)} \phi^{(m-k)} = 0$ par la proposition 2.3.7, ainsi

$$(H\phi)^{(m)} = H\phi^{(m)}$$

et donc

$$\begin{aligned}(H\phi)^{(n)} = \left((H\phi)^{(n-1)}\right)' &= H'\phi^{(n-1)} + H\phi^{(n)} \\ &= \delta_0 \phi^{(n-1)} + H\phi^{(n)} \\ &= \delta_0\end{aligned}$$

3. On rappelle que $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ désigne la fonction de Heaviside

Car $\phi^{(n-1)}(0) = 1$, enfin on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} a_j E^{(j)} &= a_m^{-1} \sum_{j=0}^{n} a_j (H\phi)^{(j)} \\ &= a_m^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j H\phi^{(j)} + a_m(\delta + H\phi^{(n)}) \right) \\ &= a_m^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j H\phi^{(j)} + a_m \delta \right) \\ &= a_m^{-1} H \sum_{j=0}^{n} a_j \phi^{(j)} + \delta = \delta\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. □

Exemple 4.1.4. Considérons l'opérateur différentiel $\partial^2 - 2\partial - 3$ sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle associée est

$$y'' - 2y' - 3$$

les valeurs propres de l'équation caractéristique associée sont 3 et -1, les solutions sont donc de la forme

$$Ae^{3t} + Be^{-t}$$

ainsi, une solution fondamentale de cet opérateur différentiel est

$$f(t) = \frac{H(t)}{4}(e^{3t} - e^{-t})$$

4.1.2 Produit tensoriel des distributions et transformée de Fourier partielle

Nous avons déjà largement évoqué la transformée de Fourier des distributions et ses liens précieux avec la dérivation. Ceci dit, la plupart des opérateurs différentiels que nous allons considérer font intervenir une variable 'privilégiée' à savoir le temps, pour rendre compte de cette spécificité, nous serons amenés à utiliser la transformée de Fourier sur les 'variables d'espaces', c'est le rôle de la transformée de Fourier partielle. Un point de vue utile pour introduire cette notion passe par le produit tensoriel des distributions : étant données deux distributions $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, on cherche à induire une distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. Une fois de plus, on sait déjà effectuer cette opération sur les fonctions continues :

On considère $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}(\Omega_1) \times \mathcal{C}(\Omega_2)$, on peut définir

$$\forall (x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2,\ f_1 \otimes f_2(x_1, x_2) := f_1(x_1) f_2(x_2)$$

Cette nouvelle fonction est bien un élément de $\mathcal{C}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, on note $\mathcal{C}(\Omega_1) \otimes \mathcal{C}(\Omega_2)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ engendré par les fonctions de la forme $f_1 \otimes f_2$.

On peut tout-à fait remplacer, dans la construction précédente, Ω_1 et Ω_2 par des espaces métriques quelconques, si les espaces sont de plus compacts, on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.1.5. *Si X et Y sont des espaces métriques compacts, le sous-espace $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y)$ est dense dans $\mathcal{C}(X \times Y)$ pour la norme infinie.*

Démonstration. On cherche à appliquer le théorème de Stone-Weierstrass ([HL, p. 30]), soient $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X)$, $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(Y)$, on a

- $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y)$ est par définition un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X \times Y)$.
- On a immédiatement $(f_1 \otimes g_1)(f_2 \otimes g_2) = (f_1 f_2) \otimes (g_1 g_2)$, donc $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y)$ est stable par produit : il s'agit bien d'une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X \times Y)$.
- La fonction constante égale à c est donnée par $1 \otimes c$.
- On a $\overline{f_1 \otimes g_1} = \overline{f_1} \otimes \overline{g_1}$ car la conjugaison complexe est un automorphisme de corps.
- Si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux points distincts de $X \times Y$, on peut considérer les fonctions $d(., x_1) \otimes 1$ et $1 \otimes d(., y_1)$, l'une de ces fonctions (au moins) sépare (x_1, y_1) et (x_2, y_2).

La sous-algèbre $\mathcal{C}^0(X) \otimes \mathcal{C}^0(Y)$ est donc séparante, auto-conjuguée et contient les constantes, d'où le résultat. □

Revenons aux ouverts de $\mathbb{R}^d$, pour lesquels on a également un résultat de densité :

Proposition 4.1.6. *Le sous-espace $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$ est dense dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.*

Démonstration. On remarque premièrement que $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$ est bien inclus dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ (la dérivabilité est immédiate, et le support du produit est inclus dans le produit des supports).
Soit ensuite $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, en projetant Supp φ sur les deux coordonnées, on obtient K_1 et K_2 deux compacts, respectivement de Ω_1 et Ω_2 tels que $K = K_1 \times K_2$ contienne Supp φ. Il existe une suite $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de polynômes en (x_1, x_2) telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n_1 + n_2}$, $(\partial^\alpha P_j)$ converge uniformément sur K vers $\partial^\alpha \varphi$.
Soit θ_i une fonction plateau pour K_i, on pose $\varphi_j = (\theta_1 \otimes \theta_2) P_j$, comme les polynômes sont inclus dans $\mathcal{E}(\Omega_1) \otimes \mathcal{E}(\Omega_2)$, il s'agit bien d'une suite de $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$, qui converge par construction vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ (la propriété du support captif étant assurée par θ_1, θ_2). □

À présent, le théorème de Fubini nous donne que, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle f_1 \otimes f_2, \varphi \rangle &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_1(x_1) f_2(x_2) \varphi(x_1, x_2) d(x_1, x_2) \\
&= \int_{\Omega_1} u(x_1) \int_{\Omega_2} u(x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\
&= \langle u_1, \langle u_2, \varphi(x_1, .) \rangle \rangle
\end{aligned}$$

En particulier si $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ où $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega_j)$, on a

$$\langle f_1 \otimes f_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle f_1, \varphi_1 \rangle \langle f_2, \varphi_2 \rangle$$

Cette dernière formule nous servira de guide pour définir le produit tensoriel des distributions.

Proposition-Définition 4.1.7. *Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_1) \times \mathcal{D}'(\Omega_2)$ deux distributions. Il existe une unique distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telle que*

$$\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{D}(\Omega_1) \times \mathcal{D}(\Omega_2), \langle T, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle T_1, \varphi_1 \rangle \langle T_2, \varphi_2 \rangle$$

De plus, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_1, \langle T_2, \varphi(x_1, .) \rangle \rangle = \langle T_2, \langle T_1, \varphi(., x_2) \rangle \rangle$$

On écrit alors $T = T_1 \otimes T_2 = T_2 \otimes T_1$ et on appelle T le **produit tensoriel** *de T_1 et T_2. Si T_1 et T_2 sont à supports compacts, ces formules s'étendent au cas où φ est seulement lisse.*

Nous ne détaillerons pas la preuve ici (cf [Zui, chapitre 5, théorème 1.1]) nous ferons un usage très superficiel de cette notion.

Exemple 4.1.8. - Soient $a \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}^q$, on a

$$\left\langle \delta_{(a,b)}, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \right\rangle = (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)$$

donc $\delta_{(a,b)} = \delta_a \otimes \delta_b$.

- Si $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_x)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_y)$ deux distributions, on a $\partial_{x_j}(T_1 \otimes T_2) = (\partial_{x_j} T_1 \otimes T_2)$, en effet, on a

$$\begin{aligned}\left\langle \partial_{x_j}(T_1 \otimes T_2), \varphi_1 \otimes \varphi_2 \right\rangle &= -\left\langle T_1 \otimes T_2, \partial_{x_j}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \right\rangle \\ &= -\left\langle T_1 \otimes T_2, \partial_{x_j}\varphi_1 \otimes \varphi_2 \right\rangle \\ &= -\left\langle T_1, \partial_{x_j}\varphi_1 \right\rangle \langle T_2, \varphi_2 \rangle \\ &= \left\langle \partial_{x_j} T_1, \varphi_1 \right\rangle \langle T_2, \varphi_2 \rangle\end{aligned}$$

d'où le résultat par unicité.

De l'exemple précédent, nous pouvons d'ores et déjà déduire la solution d'un premier opérateur différentiel, certes très simple : considérons dans $\mathbb{R}^n$ l'opérateur $\partial_{x_1} \cdots \partial_{x_n}$, on a immédiatement

$$\partial_{x_1} \cdots \partial_{x_n}(H(x_1) \otimes \cdots \otimes H(x_n)) = \partial_{x_1} H(x_1) \otimes \cdots \otimes \partial_{x_n} H(x_n) = \delta_{x_1=0} \otimes \cdots \otimes \delta_{x_n=0} = \delta_0$$

Nous pouvons à présent en venir à la transformée de Fourier partielle : on se place dans $\mathbb{R}^{q+d} = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^d$, on notera (t, x) la variable courante.

Définition 4.1.9. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^d)$, on définit la ***transformée de Fourier partielle*** de φ par

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\varphi)(t, \xi) = \widetilde{\varphi}(t, \xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)} \varphi(t, x) dx$$

De même, pour $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^d)$, on définit la transformée de Fourier partielle par

$$\left\langle \widetilde{\mathcal{F}}(S), \varphi \right\rangle = \left\langle \widetilde{S}, \varphi \right\rangle = \langle S, \widetilde{\varphi} \rangle$$

De la même manière que la transformée de Fourier classique, la transformée de Fourier partielle est un homéomorphisme linéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^d)$ dans lui même (et identiquement pour $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^d)$). Avec

$$\widetilde{\widetilde{\varphi}}(t, x) = (2\pi)^d \varphi(t, -x)$$

On a de plus les résultats suivants (qui se démontrent comme pour la transformée de Fourier classique)

Proposition 4.1.10. *Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^d)$, on a*

(a) *Pour $i \in [\![1,q]\!]$, on a $\widetilde{\mathcal{F}}(\partial_{t_i} S) = \partial_{t_i} \widetilde{\mathcal{F}}(S)$.*
(b) *Pour $i \in [\![1,q]\!]$, on a $\widetilde{\mathcal{F}}(t_i S) = t_i \widetilde{\mathcal{F}}(S)$.*
(c) *Pour $i \in [\![1,d]\!]$, on a $\widetilde{\mathcal{F}}(\partial_{x_i} S) = i\xi_i \widetilde{\mathcal{F}}(S)$.*
(d) *Pour $i \in [\![1,d]\!]$, on a $\widetilde{\mathcal{F}}(x_i S) = i\partial_{\xi_i} \widetilde{\mathcal{F}}(S)$.*

On a enfin la propriétés suivante, qui donne un lien avec le produit tensoriel

Proposition 4.1.11. *Soit $S = S_1 \otimes S_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^d)$ avec $S_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^q), S_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\widetilde{\mathcal{F}}(S) = S_1 \otimes \widehat{S_2}$$

Démonstration. Soit $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$, on a

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{\mathcal{F}}(S), \varphi_1 \otimes \varphi_2 \right\rangle &= \left\langle S, \widetilde{\mathcal{F}}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \right\rangle \\ &= \langle S, \varphi_1 \otimes \widehat{\varphi_2} \rangle \\ &= \langle S_1, \varphi_1 \rangle \langle S_2, \widehat{\varphi_2} \rangle \\ &= \langle S_1, \varphi_1 \rangle \left\langle \widehat{S_2}, \varphi_2 \right\rangle \end{aligned}$$

D'où le résultat, à nouveau par unicité du produit tensoriel. □

Exemple 4.1.12. Pour $\delta_{(0,0)}$, on obtient

$$\widetilde{\mathcal{F}}(\delta_{(0,0)}) = \delta_{t=0} \otimes 1_\xi$$

qui est une distribution à support dans $\{(t,x) \mid t = 0\}$.

4.1.3 Mesure de surface sur la sphère

Un exemple classique de distribution que nous n'avons pas encore abordé est celui des mesures de Radon :

Définition 4.1.13. Soit X un espace métrique, on appelle ***mesure de Radon positive*** toute forme linéaire positive sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c(X)$ des fonctions continues à support compact sur X (à valeurs dans $\mathbb{K}$).
On appelle ***mesure de Radon*** toute forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(X)$ s'écrivant $R = R_1 - R_2 + i(R_3 - R_4)$, ou R_1, R_2, R_3, R_4 sont des mesures de Radon positives.

Notons que par 'positive' on entend $\langle R, \varphi \rangle \geqslant 0$ si $\varphi \geqslant 0$. Le terme 'mesure' n'est pas innocent : il existe un lien entre les mesures de Radon et les mesures au sens 'classique' : Si $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ est un espace muni d'une mesure borélienne, on définit une mesure de Radon positive en posant

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(X),\ R(f) = \int_X f d\mu$$

Le théorème suivant (issu de [Rud, p. 40]) donne une réciproque au résultat précédent : une mesure de Radon positive est issu d'une unique mesure 'classique' :

Théorème 4.1.14. *(Riesz)*
Soit X un espace topologique séparé localement compact, R une mesure de Radon positive sur $\mathcal{C}_c(X)$. Il existe une unique tribu $\mathcal{M}$ sur X contenant les boréliens et une unique mesure μ sur X telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(X),\ \langle R, f\rangle = \int_X f d\mu$$

On dit que μ représente R, on a de plus que $\mathcal{M}$ est une tribu complète pour μ, qui est par ailleurs $\sigma-$finie, régulière extérieurement, et régulière intérieurement sur les ensembles ouverts ou de mesure finie.

Dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on peut montrer que toute mesure de Radon positive se restreint à $\mathcal{D}(\Omega)$ en une distribution, et réciproquement une forme linéaire positive sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution, qui s'étend de manière unique à $\mathcal{C}_c(\Omega)$ en une mesure de Radon positive.

Nous pouvons à présent définir la mesure de surface sur les sphères, pour des raisons de lisibilité, on notera

$$\mathcal{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leqslant r\} \text{ et } \mathbb{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| = r\}$$

Théorème 4.1.15. *Il existe une unique famille $(\sigma_r)_{r\in\mathbb{R}_+^*}$ de mesures de Radon positives sur $\mathbb{R}^d$ telles que*

(a) Pour $r > 0$, σ_r est à support dans $\mathbb{S}_r$, au sens ou si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est nulle sur $\mathbb{S}_r$, $\langle \sigma_r, f\rangle = 0$.

(b) Pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et $r > 0$, on a

$$\langle \sigma_r, f\rangle = r^{d-1}\langle \sigma_1, D_r f\rangle$$

(c) Pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et $r > 0$, on a

$$\int_{\mathcal{B}_r} f d\lambda = \int_0^r \langle \sigma_\rho, f\rangle\, d\rho$$

On appelle σ_r la **mesure de surface** *sur $\mathbb{S}_r$*

Notons que σ_r induit une mesure de Radon sur $\mathbb{S}_r$ vue comme espace topologique, en effet, pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{S}_r)$, on définit une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$ en posant

$$\widetilde{f}(x) = \theta(x)|x| f\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

où θ est une fonction plateau pour $\mathbb{S}_r$. De plus, la propriété (a) montre que la valeur de $\langle \sigma_r, f\rangle$ ne dépend pas de l'extension de f à $\mathbb{R}^d$, on obtient donc bien une mesure de Radon positive sur $\mathbb{S}_r$, qui induit une mesure par le théorème de Riesz, on sera donc amenés à noter

$$\int_{\mathbb{S}_r} f d\sigma_r := \langle \sigma_r, f\rangle$$

Démonstration. L'unicité est le point le plus facile : la propriété (b) entraine qu'il suffit de définir σ_1, or la troisième propriété entraîne que la fonction

$$g(r) = \int_{\mathcal{B}_r} f d\lambda$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $g'(1) = \langle \sigma_1, f \rangle$, ce qui fixe les valeurs de σ_1.
À présent pour l'existence, considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S}_1 & \longmapsto & \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \\ & (r, u) & \longmapsto & ru \end{array}$$

est un homéomorphisme, de réciproque $\phi^{-1} : x \mapsto \left(|x|, \frac{x}{|x|}\right)$. Soit A un borélien de $\mathbb{S}_1$, on note

$$\widetilde{A} := \phi(]0,1[\times A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < |x| < \text{ et } \frac{x}{|x|} \in A \right\}$$

Il s'agit d'un borélien de $\mathbb{R}^d$, et on pose

$$\sigma_1(A) := d \times \lambda(\widetilde{A})$$

On obtient une mesure borélienne de masse finie sur $\mathbb{S}_1$ (donc une mesure de Radon positive), de même, on pose

$$\sigma_r(A) := r^{d-1} \sigma_1 \left(\frac{1}{r} A \right)$$

si A est un borélien de $\mathbb{S}_r$, on obtient une mesure borélienne de masse finie sur $\mathbb{S}_r$, qui satisfait les conditions (a) et (b) par définition. Il reste à vérifier la condition (c) : soit A un borélien de $\mathbb{S}_1$, et $0 < r_1 < r_2$ deux réels, on a

$$\begin{aligned} \lambda(\phi([r_1, r_2[\times A)) &= \lambda(\phi(]0, r_2[\times A)) - \lambda(\phi(]0, r_1[\times A)) \\ &= \lambda(r_2 \widetilde{A}) - \lambda(r_1 \widetilde{A}) \\ &= \frac{1}{d}(r_2^d - r_1^d)\sigma_1(A) \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \int \left(\int \mathbb{1}_{\phi([r_1,r_2[\times A)} d\sigma_\rho \right) d\rho &= \int \sigma_\rho(\phi([r_1, r_2[\times A)) d\rho \\ &= \int \mathbb{1}_{[r_1,r_2[} \sigma_\rho(\rho A) d\rho \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \sigma_\rho(\rho A) d\rho \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \rho^{d-1} \sigma_1(A) d\rho \\ &= \frac{1}{d}(r_2^d - r_1^d)\sigma_1(A) \end{aligned}$$

On a donc

$$\int \mathbb{1}_{[r_1,r_2[}(|x|) \mathbb{1}_A \left(\frac{x}{|x|} \right) d\lambda = \int \mathbb{1}_{[r_1,r_2[}(\rho) \int \mathbb{1}_A \left(\frac{x}{\rho} \right) d\sigma_\rho(x) d\rho$$

et ce pour tout borélien A de $\mathbb{S}_1$ et $0 < r_1 < r_2$ quelconques. Ainsi, si $0 < a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a,b]), g \in \mathcal{C}(\mathbb{S}_1)$, on a

$$\int_{\phi([a,b]\times S_1)} (f \otimes g) \circ \phi^{-1} d\lambda = \int_a^b \left(\int (f \otimes g) \circ \phi^{-1} d\sigma_\rho \right) d\rho$$

par densité de $\mathcal{C}([a,b]) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{S}_1)$ dans $\mathcal{C}([a,b] \times \mathbb{S}_1)$ (proposition 4.1.5) on obtient

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\phi([a,b] \times \mathbb{S}_1)), \int_{\phi([a,b]\times \mathbb{S}_1)} f d\lambda = \int_{a,b} \int f d\sigma_\rho d\rho$$

et comme $\phi([a,b] \times \mathbb{S}_1) = \mathcal{B}_b \setminus \mathcal{B}_a$, on obtient bien la troisième condition. □

La condition (c) s'étend par densité aux fonction boréliennes positives, en particulier

$$\int_{\mathcal{B}_r} d\lambda = \lambda(\mathcal{B}_r) = \int_0^r \int d\sigma_\rho d\rho$$

ainsi, la dérivé du volume de la boule de rayon r est la surface de la sphère de rayon r. En dimension 2, on retrouve bien les formules classiques πr^2 et $2\pi r$.
De plus, la condition (b) donne également

$$\int_{\mathcal{B}_1} d\lambda = \lambda(\mathcal{B}_1) = \int_0^1 \int \rho^{d-1} d\sigma_1 d\rho = \frac{1}{d}\sigma_1(\mathbb{S}_1)$$

on a donc $\sigma_1(\mathbb{S}_1) = d\lambda(\mathcal{B}_1)$ et ce en toute dimension.

La mesure σ_r est donc une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$: elle induit une distribution à support compact (inclus dans $\mathbb{S}_r$), il est donc possible de calculer sa transformée de Fourier (calcul que l'on mènera uniquement en dimension 3. Par le théorème de Paley-Wiener-Schwartz, il s'agit d'une fonction, donnée par

$$\widehat{\sigma_r}(\xi) = \left\langle \sigma_r, e^{-i(\cdot,\xi)} \right\rangle = \int_{\mathbb{S}_r} e^{-i(x,\xi)} d\sigma_r$$

Comme la mesure de Lebesgue est invariante par transformation orthogonale, c'est également le cas de σ_r. Or si S est une distribution tempérée invariante par transformation orthogonale, on a pour $A \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$

$$\langle \mathcal{F}(S \circ A), \varphi \rangle = \langle S \circ A, \widehat{\varphi} \rangle = \left\langle S, \widehat{\varphi} \circ {}^t A \right\rangle$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
(\widehat{\varphi} \circ {}^t A)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,{}^t A\xi)} \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(Ax,\xi)} \varphi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)} \varphi({}^t A x) dx \\
&= \mathcal{F}(\varphi \circ {}^t A)(\xi)
\end{aligned}$$

donc

$$\langle \mathcal{F}(S \circ A), \varphi \rangle = \left\langle S, \mathcal{F}(\varphi \circ {}^t A) \right\rangle = \left\langle \widehat{S}, \varphi \circ {}^t A \right\rangle = \left\langle \widehat{S} \circ A, \varphi \right\rangle$$

Donc $\widehat{\sigma_r}$ est également invariante par transformation orthogonale. D'où

$$\widehat{\sigma_r}(\xi) = \widehat{\sigma_r}(0,0,|\xi|) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix_3|\xi|} d\sigma_r$$

On passe en coordonées polaires : à (x_1, x_2, x_3) on associe $(R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$ avec $\theta \in [0,\pi[$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$. On admet $d\sigma_r = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, et on obtient ainsi

$$\widehat{\sigma_r}(\xi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ir|\xi|\cos\theta} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi r^2 \int_0^{\pi} e^{-ir|\xi|\cos\theta} \sin\theta d\theta$$

par le changement de variables $t = \cos\theta$, on obtient

$$\widehat{\sigma_r}(\xi) = 2\pi r^2 \int_{-1}^{1} e^{-ir|\xi|t} dt = 2\pi R^2 \frac{\sin(r|\xi|)}{|\xi}$$

Donc $\frac{\widehat{\sigma_r}}{4\pi r} = \frac{\sin(r|\xi|)}{|\xi|}$

4.2 Exemples de solutions fondamentales

Nous pouvons enfin en venir aux solutions fondamentales annoncées.

4.2.1 Opérateur de Laplace

Nous commençons par un opérateur bien connu, celui de Laplace :

$$\Delta = \sum_{k=1}^{d} \partial_k^2$$

Cet opérateur ne fait pas intervenir de variable temporelle (il est d'ailleur totalement invariant par réordonnancement des variables), si S est une solution élémentaire tempérée de cet opérateur, on obtient

$$\mathcal{F}(\Delta S) = 1 = -|\xi|^2 \mathcal{F}(S)$$

cette équation ne nous est utile que si l'on sait calculer la transformée de Fourier inverse de $\frac{-1}{|\xi|^2}$, dans les cas où il s'agit d'une distribution tempérée.
Nous passons plutôt par une exposition directe des solutions :
Pour $d = 1$, une solution fondamentale est donnée par $E(x) = \frac{|x|}{2}$, en effet, par la formule des sauts, on a

$$E'(x) = H(t) - \frac{1}{2} \text{ et } E''(x) = \delta$$

C'est le cas le plus simple, en dimension 2, on a

Proposition 4.2.1. *Pour $d = 2$, une solution fondamentale de Δ est donnée par la fonction*

$$E(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Démonstration. On considère la fonction $g : (x, y) \mapsto \ln r = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$, cette fonction est localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$, car

$$\int_{\mathcal{B}(0,1]} g(x,y)d(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\ln r dr d\theta < \infty$$

(la fonction g étant par ailleurs continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$). Comme g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on va approcher g par une suite de fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2$, et utiliser la continuité de la dérivation sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Pour $\varepsilon \in]0,1[$, on considère g_ε la fonction définie par

$$g_\varepsilon(x) := \begin{cases} g(x) & \text{si } r \geqslant \varepsilon \\ a_\varepsilon r^2 + b_\varepsilon & \text{si } r \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

pour qu'une telle fonction soit de classe $\mathcal{C}^1$, on doit avoir

$$a_\varepsilon \varepsilon^2 + b\varepsilon = \ln \varepsilon \quad \text{et} \quad 2a_\varepsilon \varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$$

on pose donc $a_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon^2}$ et $b_\varepsilon = \ln\varepsilon - \frac{1}{2}$. On a alors, pour $r \leqslant \varepsilon$

$$|g_\varepsilon(x)| = |a_\varepsilon r^2 + b_\varepsilon| = \left|\frac{1}{2\varepsilon}r^2 + \ln\varepsilon - \frac{1}{2}\right| \leqslant \ln\frac{1}{r} + \frac{1}{2}$$

donc $|g_\varepsilon|$ est majoré par $|g| + \frac{1}{2}$, qui est localement intégrable, la suite (g_ε) converge donc vers g dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Il reste à calculer le laplacien de g_ε, on a

$$\partial_j g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2}x_j & \text{si } r \leqslant \varepsilon \\ \frac{x_j}{r^2} & \text{si } r \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

On peut appliquer la formule des sauts pour obtenir

$$\partial_j^2 g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2} & \text{si } r \leqslant \varepsilon \\ \frac{r^2 - 2x_j^2}{r^4} & \text{si } r \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$\Delta g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{2}{\varepsilon^2} & \text{si } r \leqslant \varepsilon \\ 0 & \text{si } r \geqslant \varepsilon \end{cases} = \frac{2}{\varepsilon^2}\mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,\varepsilon]}$$

Or, ceci converge vers $2\pi\delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, ce que nous voulions démontrer. □

La solution fondamentale que nous allons donner pour la dimension $d \geqslant 3$ fait intervenir les mesures des sphères unités et des boules unités en dimension supérieure, on notera ω_d la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^d$, et s_d celle de la sphère unité (donc la mesure de $\mathbb{S}^{d-1}$), on a vu dans la sous-section 4.1.3 que $s_d = d\omega_d$.

Proposition 4.2.2. *Pour $d \geqslant 3$, une solution fondamentale de Δ est donnée par la fonction*

$$E : x \mapsto \frac{|x|^{2-d}}{s_d(d-2)}$$

Démonstration. Comme précédemment, on notera $r = |x|$, on remarque que comme $d \geqslant 3$, la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{r^{d-2}}$ est localement intégrable : elle est en effet continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}_1} \frac{1}{|x|^{d-2}} dx &= \int_0^1 \int_{\mathbb{S}_r} \frac{1}{|x|^{d-2}} dx dr \\
&= \int_0^1 r^{d-1} \int_{\mathbb{S}_1} \frac{1}{|rx|^{d-2}} d\sigma_1 dr \\
&= \int_0^1 \frac{r^{d-1}}{|r|^{d-2}} \int_{\mathbb{S}_1} d\sigma_1 dr \\
&= \int_0^1 r s_d dr < \infty
\end{aligned}$$

On va utiliser une astuce similaire au cas $d = 2$, en approchant g par une suite de fonctions g_ε de classe $\mathcal{C}^1$, on pose

$$g_\varepsilon(x) := \begin{cases} r^{2-d} & \text{si } r \geqslant \varepsilon \\ a_\varepsilon r^2 + b_\varepsilon & \text{si } r \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

à nouveau, notre volonté d'avoir une fonction continûment dérivable contraint les valeurs de a_ε et b_ε :

$$\varepsilon^{2-d} = a_\varepsilon \varepsilon^2 + b_\varepsilon \quad \text{et} \quad (2-d)\varepsilon^{1-d} = 2a_\varepsilon \varepsilon$$

On obtient donc $a_\varepsilon = \frac{2-d}{2}\varepsilon^{-d}$ et $b_\varepsilon = \frac{d}{2}\varepsilon^{2-d}$, ainsi

$$a_\varepsilon r^2 + b_\varepsilon = \varepsilon^{2-d}\left(\frac{d}{2} - \frac{d-2}{2}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2\right) \leqslant r^{2-d}\frac{d}{2}$$

on a donc $|g_\varepsilon| \leqslant \frac{d}{2} r^{2-d}$, et donc g_ε converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ vers g par convergence dominée. Il reste à calculer le laplacien de g_ε : on a

$$\Delta(a_\varepsilon r^2 + b_\varepsilon) = 2da_\varepsilon \quad \text{et} \quad \Delta(r^{2-d}) = 0$$

donc

$$\Delta(g_\varepsilon) = d(2-d)\varepsilon^{-d}\mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,\varepsilon[}$$

enfin, le théorème 4.1.15 nous donne que

$$\int_{\mathcal{B}(0,\varepsilon[} d\lambda = \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{S}_r} d\sigma_r dr = \int_0^\varepsilon r^{d-1} s_d dr = \varepsilon^d \omega_d$$

ainsi, $\varepsilon^{-d}\mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,\varepsilon[}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ vers $\omega_d \delta_0$, en effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\left\langle \varepsilon^{-d}\mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,\varepsilon[}, \varphi \right\rangle - \omega_d \varphi(0) = \int_{\mathcal{B}(0,\varepsilon[} \varepsilon^{-d}(\varphi(x) - \varphi(0))dx$$

Pour tout $\alpha > 0$, à partir d'un ε assez petit, on a $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \alpha$, donc

$$\left|\left\langle \varepsilon^{-d}\mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,\varepsilon[}, \varphi \right\rangle - \omega_d \varphi(0)\right| \leqslant \alpha \omega_d$$

d'où la convergence annoncée. On a donc $\Delta g = d(2-d)\omega_d \delta_0 = (2-d)s_d \delta_0$, d'où le résultat. $\square$

Les solutions fondamentales que nous avons trouvées présentent une particularité intéressante : ce sont des fonctions lisses, sauf en l'origine, cette forme remarquable va nous permettre d'énoncer un résultat remarquable sur les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ de l'équation $\Delta T = 0$.

Proposition 4.2.3. *Pour $d \geqslant 3$ et $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, la distribution $T = E * f$ est une solution de l'équation $\Delta T = f$. En dehors de* Supp f*, il s'agit d'une fonction lisse qui tend vers* 0 *quand* $|x|$ *tend vers* $+\infty$.

Démonstration. La proposition 4.1.2 démontre directement le premier point. Soit ensuite Φ_ε une fonction plateau pour $\{0\}$ à support inclus dans $\mathcal{B}(0, \varepsilon[$, et à valeurs dans $[0, 1]$, la fonction $\theta_\varepsilon = 1 - \Phi_\varepsilon$ vaut 1 sur $\mathcal{B}(0, \varepsilon[^c$ et vaut 0 au voisinage de $\{0\}$, la fonction $\theta_\varepsilon E = E_\varepsilon$ est lisse (car la seule éventuelle singularité de E se trouve en 0), et on a Supp $(E - E_\varepsilon) \subset \mathcal{B}(0, \varepsilon[$, avec

$$T = E_\varepsilon * f + (E - E_\varepsilon) * f$$

Le premier terme est une fonction lisse, et le second une distribution à support dans Supp $f + \mathcal{B}(0, \varepsilon[$.
Si $a \notin$ Supp f, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2} d(a, \text{Supp } f)$, on obtient que T est lisse au voisinage de a, d'où la régularité annoncée.
Ensuite, si n est l'ordre de f et K' un voisinage compact de son support, on a

$$|(E_\varepsilon * f)(x)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n} \left\| \partial^\alpha \tau_x \check{E}_\varepsilon \right\|_{\infty, K'}$$

donc, si $d(a, K') \geqslant \varepsilon$, on a

$$|T(x)| = |(E_\varepsilon * f)(x)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n} \left\| \partial^\alpha \tau_x \check{E}_\varepsilon \right\|_{\infty, K'}$$

Comme E est un $O(1/r)$ quand r tends vers $+\infty$, il en va de même de E_ε et de ses dérivées, le second membre ci dessus tend donc vers 0 quand x tend vers $+\infty$. $\square$

On remarque que pour le premier point, nous n'avons pas utilisé la forme particulière de E comme solution de Δ, on a en fait, le résultat général suivant

Proposition 4.2.4. *Soit $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et E une solution fondamentale pour A, qui soit une fonction lisse hors de l'origine. La distribution $T = E * f$ est une solution de l'équation $A * T = f$, et en dehors de* Supp f*, il s'agit d'une fonction lisse.*

Corollaire 4.2.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, P un opérateur différnetiel à coefficients constants. Si P admet une solution fondamentale lisse sur $\mathbb{R}^d$ sauf peut-être en l'origine, alors toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant $P(T) = 0$ est une fonction lisse.*

Démonstration. Il suffit de montrer que T est lisse au voisinage de tout point a de Ω, soient donc $a \in \Omega$ et φ une fonction plateau pour un voisinage de $\{a\}$ dans Ω, il suffit de montrer que $T\varphi$ est lisse au voisinage de a (car elle y est égale à T).

$$T * \varphi = (E * P) * (\varphi T) = E * (P * \varphi T) = E * 0 = 0$$

on a associativité de la convolution car P et φT sont à supports compacts. Comme $P(T) = 0$, et comme les dérivées de φ sont nulles au voisinage de a, on a $a \notin$ Supp φT, donc φT y est lisse par la proposition précédente. $\square$

Ce dernier résultat sera réutilisé dans les cas suivants. En particulier, en l'occurrence, on obtient que toute distribution (en particulier toute fonction $\mathcal{C}^2$) harmonique sur $\mathbb{R}^d$ est en fait une fonction lisse.

4.2.2 Opérateur de Cauchy-Riemann

On se place sur $\mathbb{R}^2$, que l'on identifiera à $\mathbb{C}$, on sait qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et si elle respecte les équations de Cauchy-Riemann :

$$\partial_x \Re\mathrm{e}(f) = \partial_y \Im\mathrm{m}(f) \quad \text{et} \quad \partial_y \Re\mathrm{e}(f) = -\partial_x \Im\mathrm{m}(f)$$

Ce qui est équivalent à dire que

$$\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)f = 0$$

On s'intéresse donc à l'opérateur $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, (on peut accessoirement se demander s'il existe des distributions 'holomorphes' dans le sens ou $D(T) = 0$).
On recherche donc une solution fondamentale de l'opérateur $\partial_{\overline{z}}$. Commençons par supposer que T est une solution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, par transformée de Fourier, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_x T) + i\mathcal{F}(\partial_y T) = 2 &\Leftrightarrow ix\widehat{T} - y\widehat{T} = 2 \\ &\Leftrightarrow i(x+iy)\widehat{T} = 2 \\ z\widehat{T} &= -2i \end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{I} : z \mapsto \frac{1}{z}$ est localement intégrable sur $\mathbb{C}$, comme elle est méromorphe, il suffit de considérer le cas d'un compact contenant 0, et donc de vérifier que l'intégrale suivante est finie

$$I = \int_{\mathcal{B}(0,1]} \left|\frac{1}{z}\right| d\lambda$$

par changement de variables polaires, on obtient

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{r} dr = 2\pi$$

ainsi, $\mathcal{I}$ définit bien une distribution. Montrons qu'elle définit une distribution tempérée : soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{C}} \varphi(\zeta)\mathcal{I}(\zeta)d\zeta\right| &\leqslant \int_{\mathcal{B}(0,1]} |\varphi(\zeta)\mathcal{I}(\zeta)|d\zeta + \int_{\mathbb{C}\setminus\mathcal{B}(0,1]} |\varphi(\zeta)|d\zeta \\ &\leqslant 2\pi \|\varphi\|_\infty + \|\varphi\|_\infty \end{aligned}$$

Donc $-2i\mathcal{I}$ est une solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ de l'équation $zS = -2i$.

Proposition 4.2.6. *La fonction $\frac{1}{\pi}\mathcal{I}$ est une solution fondamentale de l'opérateur $\partial_{\overline{z}}$.*

Démonstration. Remarquons que la distribution $\mathcal{I}$ est homogène de degré -1 (au sens où $D_\lambda \mathcal{I} = \frac{1}{\lambda}\mathcal{I}$), ainsi, la distribution $\partial_{\overline{z}}\mathcal{I}$ est homogène de degré -2. Par ailleurs, comme $\mathcal{I}$ est holomorphe sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la distribution $\partial_{\overline{z}}\mathcal{I}$ est à support dans $\{0\}$: il s'agit d'une combinaison linéaire de dérivées de mesures de Dirac :

$$\partial_{\overline{z}}\mathcal{I} = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$$

Mais, on a, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$

$$\lambda^{-2}\partial_{\bar{z}}\mathcal{I} = D_\lambda \partial_{\bar{z}}\mathcal{I}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \lambda^{-2}\sum_{\alpha\in A} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0 &= D_\lambda \sum_{\alpha\in A} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \\ &= \sum_{\alpha\in A} a_\alpha D_\lambda \partial^\alpha \delta_0 \\ &= \sum_{\alpha\in A} a_\alpha \lambda^{-2-|\alpha|}\partial^\alpha \delta_0\end{aligned}$$

Comme les dérivées de δ_0 forment une famille libre, on a $|\alpha| = 0$ pour tout $\alpha \in A$: ainsi, $\partial_{\bar{z}} I = a\delta_0$ pour une constante a.
Pour déterminer la constante a, on applique $\partial_{\bar{z}} I$ sur la fonction $f : (x, y) \mapsto \exp\left(\frac{-(x^2+y^2)}{2}\right)$ qui est à croissante lente, on a

$$a = \langle \partial_{\bar{z}}\mathcal{I}, f\rangle = -\langle \mathcal{I}, \partial_{\bar{z}} f\rangle = -\left\langle \mathcal{I}, \frac{1}{2}(-x - iy)f\right\rangle = \frac{1}{2}\langle z\mathcal{I}, f\rangle = \frac{1}{2}\langle 1, f\rangle = \pi$$

d'où le résultat. $\square$

Du résultat précédent, on déduit que $S = \frac{1}{\pi}\widehat{\mathcal{I}}$ est solution de $zS = -2i$, on obtient donc que $S = -2i\mathcal{I} + R$ où R est une solution de $zR = 0$.

On veut donc résoudre l'équation $zR = (x + iy)R = 0$ où $R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. On montre que Supp $R = \{0\}$: soit K un compact ne contenant pas 0, la multiplication par z donne une bijection de $\mathcal{D}(K)$ dans lui même, donc $R_{|K} = 0$ si et seulement si $(zR)_{|K} = 0$, ce qui est le cas par hypothèse. Ainsi, Supp $R = 0$ et R est une combinaison linéaire de dérivées de mesures de Dirac, donc

$$S = \frac{1}{\pi}\widehat{\mathcal{I}} = -2i\mathcal{I} + \sum_{\alpha\in A} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \Rightarrow \widehat{\mathcal{I}} = -2i\pi\mathcal{I} + \pi\sum_{\alpha\in A} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$$

d'où

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{\mathcal{I}}} = 4\pi^2\check{\mathcal{I}} = -4\pi^2\mathcal{I} = -2i\pi\widehat{\mathcal{I}} + \sum_{\alpha\in A} a_\alpha (x,y)^\alpha \\ &= -2i\pi\left(-2i\pi\mathcal{I} + \pi\sum_{\alpha\in A} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0\right) + \sum_{\alpha\in A} a_\alpha (x,y)^\alpha \\ &= -4\pi^2\mathcal{I} - 2i\pi^2\sum_{\alpha\in A} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0 + \sum_{\alpha\in A} a_\alpha (x,y)^\alpha\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$0 = -2i\pi^2\sum_{\alpha\in A} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0 + \sum_{\alpha\in A} a_\alpha (x,y)^\alpha$$

On conclut que $a_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in A$, et donc

$$\widehat{\mathcal{I}} = -2i\pi\mathcal{I}$$

La fonction $\mathcal{I}$ est ainsi un vecteur propre pour la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

De plus, comme la fonction $\mathcal{I}$ est lisse hors de l'origine, on obtient le résultat suivant :

Proposition 4.2.7. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, si T est une distribution holomorphe, alors T est une fonction holomorphe (et en particulier lisse)*

Démonstration. C'est une application du corollaire 4.2.5. □

Remarque 4.2.8. Une fonction entière induit une distribution tempérée si et seulement si il s'agit d'un polynôme. La réciproque est claire car un polynôme est à croissance lente, et réciproquement si $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\partial_{\bar{z}} S = 0$, on en déduit que $z\widehat{S} = 0$, donc $\widehat{S}$ est à support dans $\{0\}$ et S est une fonction polynomiale réelle, donc à croissance lente, on conclut par l'application 3.1.29.

4.2.3 Opérateur de la chaleur

On se place dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et l'on considère (à nouveau) l'opérateur bien connu de la chaleur :

$$D := \partial_t - \Delta = \partial_t - \sum_{k=1}^{d} \partial_k^2$$

Si E est une solution fondamentale tempérée de cet opérateur, on obtient par transformée de Fourier partielle :

$$(\partial_t + |\xi|^2)\widetilde{E} = \delta_{t=0} \otimes 1_\varepsilon$$

Hors de $t = 0$, on obtient l'équation $\partial_t \widetilde{E} = -|\xi|^2 \widetilde{E}$, une équation différentielle dont on connait bien les solutions, on a donc $\widetilde{E}(t, \xi) = a(\xi)\exp(-t|\xi|^2)$ pour $t > 0$, on cherche donc $\widetilde{E}$ sous la forme

$$\widetilde{E}(t, \xi) = H(t)a(\xi)\exp(-t|\xi|^2)$$

on a

$$\partial_t \widetilde{E} = \delta_{t=0} \otimes a(\xi) - H(t)a(\xi)|\xi|^2 \exp(-t|\xi|^2)$$

donc $a = 1$ convient pour avoir $(\partial_t - \Delta)\widetilde{E} = 0$, on veut donc calculer la transformée de Fourier partielle inverse de

$$\widetilde{E}(t, \xi) = H(t)e^{-t|\xi|^2}$$

L'application 3.1.30 nous permet de calculer

$$\widetilde{\widetilde{E}}(t, x) = H(t)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}\right)^d e^{\frac{-|x|^2}{4t}} = (2\pi)^d E(t, -x)$$

On trouve donc la solution fondamentale suivante

$$E(t, x) = H(t)(4\pi t)^{-d/2} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$$

On peut à nouveau appliquer le corollaire 4.2.5 pour obtenir que toute distribution vérifiant $\partial_t T = \Delta T$ est une fonction lisse.

4.2.4 Opérateur de Schrödinger

Il est aisé de donner une solution fondamentale pour un opérateur de chaleur de la forme $\partial_t - c\Delta$ pour $c > 0$. L'opérateur de Schrödinger constitue une nouvelle modification, on considère désormais un paramètre complexe :

$$P := \partial_t - i\Delta_x = \partial_t - i\sum_{k=1}^{d} \partial_k^2$$

À nouveau, nous allons utiliser la transformée de Fourier partielle : si E est une solution fondamentale, on a

$$(\partial_t + i|\xi|^2)\widetilde{E} = \delta_{t=0} \otimes 1_\xi$$

Pour $t > 0$, on est donc amenés à résoudre $\partial_t \widetilde{E} = -i|\xi|^2 \widetilde{E}$, d'où $\widetilde{E}(t,x) = a(\xi)e^{-i|\xi|^2}$, on recherche $\widetilde{E}$ sous la forme

$$\widetilde{E}(t,x) = H(t)a(\xi)e^{-i|\xi|^2}$$

On a alors

$$\partial_t \widetilde{E} = \delta_{t=0} \otimes a(\xi) - iH(t)a(\xi)|\xi|^2 \exp(-it|\xi|^2)$$

on prend à nouveau a constante égale à 1, on souhaite donc calculer la transformée de Fourier inverse de

$$\widetilde{E}(t,\xi) = H(t)e^{-it|\xi|^2}$$

et pour cela, calculer la transformée de Fourier de $T : x \mapsto e^{-it|\xi|^2}$ où $t > 0$. En l'état, l'application 3.1.30 ne peut être utilisée, on introduit donc la fonction intermédiaire

$$T_\varepsilon(x) := e^{(-\varepsilon - it)|\xi|^2}$$

Par convergence dominée, T_ε converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il suffit de calculer $\mathcal{F}(T_\varepsilon)$:

$$\mathcal{F}(T_\varepsilon)(x) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(\varepsilon + it)}}\right)^d e^{\frac{-|x|^2}{4(\varepsilon+it)}}$$

À nouveau par convergence dominée, ceci converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vers

$$\mathcal{F}(T)(x) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{it}}\right)^d e^{\frac{-|\xi|^2}{2it}} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-i\pi/4}\right)^d e^{\frac{i|x|^2}{4t}}$$

On obtient donc la solution fondamentale suivante :

$$E(t,x) = \frac{H(t)}{(2\pi)^d} \left(\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-i\pi/4}\right)^d e^{\frac{i|x|^2}{4t}} = H(t) \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-i\pi/4}\right)^d e^{\frac{i|x|^2}{4t}}$$

4.2.5 Opérateur des ondes

Nous terminons cette exposition rapide par l'équation des ondes : on se place dans $\mathbb{R}^{d+1}$ et on considère l'opérateur de D'Alembert :

$$\square := \partial_t^2 - \Delta_x = \partial_t^2 - \sum_{k=1}^{d} \partial_k^2$$

Si E est une solution fondamentale de cet opérateur dans $\mathbb{R}^{d+1}$, on obtient par transformée de Fourier partielle que

$$(\partial_t^2 + |\xi|^2)\widetilde{E} = \delta_{t=0} \otimes 1_\xi$$

Hors de $t = 0$, on doit avoir $(\partial_t^2 + |\xi|^2)\widetilde{E} = 0$, les solutions sont de la forme

$$a(\xi)\cos(t|\xi|) + b(\xi)\sin(t|\xi|)$$

On cherche donc une solution de la forme

$$\widetilde{E}(t,\xi) = H(t)(a(\xi)\cos(t|\xi|) + b(\xi)\sin(t|\xi|))$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\partial_t \widetilde{E}(t,\xi) &= \delta_{t=0} \otimes (a(\xi)\cos(t|\xi|) + b(\xi)\sin(t|\xi|)) + H(t)(-a(\xi)|\xi|\sin(t|\xi|) + b(\xi)|\xi|\cos(t|\xi|)) \\
&= \delta_{t=0} \otimes a(\xi) + H(t)|\xi|(-a(\xi)\sin(t|\xi|) + b(\xi)\cos(t|\xi|)) \\
\partial_t^2 \widetilde{E}(t,\xi) &= \delta'_{t=0} \otimes a(\xi) + \delta_{t=0} \otimes b(\xi)|\xi| - H(t)|\xi|^2(a(\xi)\cos(t|\xi|) + b(\xi)\sin(t|\xi|))
\end{aligned}$$

Donc

$$(\partial_t^2 + |\xi|)\widetilde{E} = \delta'_{t=0} \otimes a(\xi) + \delta_{t=0} b(\xi)|\xi|$$

On prend donc $a = 0$ et $b(\xi) = \frac{1}{|\xi|}$, on aurait donc $\widetilde{E}(t,\xi) = H(t)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}$, une fonction continue en ξ, et bornée par $\max(t,0)$, donc un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$.

Nous n'avons calculé la transformée de Fourier partielle inverse de $\widetilde{E}$ que dans le cas de la dimension 3 (à la section précédente), on a donc la solution fondamentale suivante pour $d = 3$:

$$E(t,x) = H(t)\frac{\sigma_t}{2\pi t}$$

On remarque que cette distribution est à support dans le cône $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid |x| \leqslant t\}$, ce qui traduit des propriétés physiques de transmission des ondes. Nous avons par ailleurs démontré cette dernière propriété sur les supports en toute dimension dans l'application 3.1.31.

Bibliographie

[Bon] Jean-Michel Bony, Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier, Éditions de l'école Polytechnique (2001).

[HL] Francis Hirsch, Gilles Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle. Cours et exercices avec réponses, Dunod (1999).

[Mey] Yves Meyer, Wavelets and operators, Cambridge University Press (1992).

[Nor] Benedetta Noris, Éléments de distributions et introduction aux EDP linéaires, cours de Master 1, Université de Picardie Jules Verne (2019).

[Rud] Walter Rudin, Real and complex analysis (3e édition), McGraw-Hill Book Company (1987).

[Zui] Claude Zuily, Éléments de distributions et équations aux dérivées partielles, Dunod (2002).