265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Réf: [Rud!] Rudin, analyse réelle et complexe. [Gou] Gourdon analyse [Can] Candelpergher, probabilités [Hau] Hauchecorne, les contre exemples en mathématiques.

Dev
18 Intégrale Gauss résidus.
27, 28, 34 Prolongement complexe Γ. [ZQ].

I. Fonction exponentielle et fonctions associées.

1) La fonction exponentielle [Rud!] 3

Def 1: La fonction somme de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, on la note exp, la fonction exponentielle.

Rq 2: Cette définition s'étend naturellement à tout espace de Banach.

Prop 3: La restriction de exp à $\mathbb{R}$ donne une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, unique solution globale du problème de Cauchy $\{y' = y ; y(0) = 1\}$.

Prop 4: Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$ (exp donne un morphisme de groupes $(\mathbb{C},+) \to (\mathbb{C}^*, \times)$)

Prop 5: Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\exp(it)$ est de module 1.

Cor 6: Ainsi, pour $a+ib \in \mathbb{C}$, on a $\exp(a+ib) = \exp a \exp(ib)$ et $|\exp(a+ib)| = \exp a \in \mathbb{R}_+^*$.

Not 7: On définit $e = \exp(1) \in \mathbb{R}_+^*$, on note alors $e^z = \exp z$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Rq 8: Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\exp(n) = \exp(1)^n$ donc cette notation est justifiée.

Prop 9: Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x x^n = 0$. Conclut que e^x est à croissance rapide.

Cor 10: La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, sans qu'on puisse explicitement en exhiber une primitive.

2) Fonctions trigonométriques et hyperboliques.

Def 11: On définit les fonctions cosinus et sinus respectivement comme les parties réelles et imaginaires de $z \mapsto e^{iz}$

Prop 12: Les fonctions cosinus et sinus sont entières et données par les développements en séries entières

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Prop 13: Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ et ainsi $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

On a également

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \cos y \sin x.$$

Prop 14: Par dérivation on a $\cos'(x) = -\sin$ et $\sin' = \cos$ ainsi, cos et sin sont les solutions respectives des problèmes de Cauchy [Rud!] 3

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 1 \; y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \; y'(0) = 1 \end{cases}$$

Prop-déf 15: La fonction cosinus admet une plus petite racine strictement positive, le double de cette racine est noté π.

Cor 16: Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, donc cos et sin sont 2π-périodiques, et exp n'est pas surjective.

Appli 17: Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,dx$ la $n$ième intégrale de Wallis. On a $I_{2p} = \left(\prod_{k=}^{p-1} \frac{2k+1}{2k}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $I_{2p+1} = \prod_{k=0}^{p} \frac{2k}{2k+1}$. [Gou] 126

On peut déduire la valeur de l'intégrale de Gauss à partir de ces intégrales

Appli 18: En étudiant la fonction $z \mapsto \frac{e^{-z^2}}{1+e^{2az}}$ où $a = e^{i\frac{\pi}{4}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$, on peut calculer l'intégrale de Gauss par le théorème des Résidus. DVP

Def 19: On peut également définir ch et sh comme les parties réelles et imaginaires de exp, on obtient alors

$$\operatorname{ch}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{sh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

et $\operatorname{ch}'(z) = \operatorname{sh}(z)$, $\operatorname{sh}'(z) = \operatorname{ch}(z)$.

3) Fonctions réciproques, dérivées.

Rappel 20: Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1, injective et telle que df_a est inversible pour tout $a \in U$, alors f est un C^1 difféomorphisme sur son image, et $\forall a \in U$, $d(f^{-1})_{f(a)} = (df_a)^{-1}$.

Rappel 21: Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe, Ω connexe et f injective, alors f est un difféomorphisme holomorphe sur son image.

Ces théorèmes nous permettent d'exhiber des fonctions réciproques aux fonctions introduites précédemment.

- L'exponentielle réelle donne $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, de dérivée $\frac{1}{x}$.
- Le cosinus sur $]0, \pi[$ donne arccos, avec $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Le sinus sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donne arcsin avec $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- La fonction $\frac{\sin}{\cos}$ donne arctan, de dérivée $\frac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{C}$, on a $\exp(z)=\exp(z') \Rightarrow z \equiv z' [2i\pi]$. Ainsi, on peut définir une réciproque à exp sur tout ouvert de $\mathbb{C}$ de la forme $\{z \in \mathrm{Im}(z) \in I\}$ où I est un intervalle ouvert de longueur 2π.

Ainsi, on a une fonction $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ holomorphe et de dérivée égale à $\frac{1}{z}$.

Déf 22 : Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on peut définir z^α comme $\exp(\alpha \mathrm{Log}(z))$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

Application 23 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$ est bien définie.
On aura $\hat{f} = \sqrt{2\pi} f$ si $f = e^{-\frac{x^2}{2}}$. On peut ainsi prouver le théorème d'inversion de Fourier.

[Gou2] Application 24 : On considère les sommes partielles de la série harmonique $S_n = \sum_1^n \frac{1}{k}$, on a $S_n \sim \ln n + \gamma$. On y trouve constante, dite constante d'Euler.

[Can] Application 25 : L'équation aux dérivées partielles $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$, admet une unique solution tendant vers $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ fixé pour $t \to 0$ (la convergence se fait dans $L^2(\mathbb{T})$). Cette solution est de classe C^∞ et donnée par

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(y) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in(x-y)} e^{-n^2 t} dy.$$

II. Fonctions particulières, intégrales Euleriennes.

1) Fonctions pathologiques. [Hau]

On parle informellement de fonctions (ou plus largement d'objets) pathologiques pour désigner des fonctions particulières qui ont eu une importance historique dans leur introduction, et/ou qui fournirent des contres exemples à des propriétés que l'on pourrait naïvement considérer comme exactes.

- Fonction de Dirichlet : L'indicatrice de l'ensemble $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$ car $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. Il s'agit également d'une fonction intégrable au sens de Lebesgue et pas au sens de Riemann.
De plus, la fonction $t \mapsto t \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(t)$ est continue en un unique point : 0.
- Fonction de Takagi : On pose $\Delta : [0,1] \to [0,1]$ la fonction affine par morceaux valant 0 en 0, 1 en $\frac{1}{2}$ et 0 en 1. La fonction $f : x \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Delta(2^p x)}{2^p}$ est une fonction continue de $[0,1] \to \mathbb{R}$, qui n'est dérivable en aucun point de $[0,1]$.
- La fonction $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ où $u_n : x \mapsto \frac{h(nx)}{2^n}$ où $h : x \mapsto x - E(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mais discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.
- La fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x}) x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais pas de classe C^1.
- La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ prolongée par 1 en 0 est intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens de Riemann mais pas au sens de Lebesgue.
- La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \cdot e^{-1/x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0.

2) Fonctions Γ et ζ, applications. [AM]

On considère les formules suivantes

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

définissant les fonctions Γ d'Euler et ζ de Riemann. Ces fonctions ont un grand nombre de propriétés et donnent lieux à de nombreux résultats et applications :

Prop 26 : La fonction ζ est bien définie et holomorphe sur le demi plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

Prop 27 : La fonction Γ est bien définie et holomorphe sur le demi plan $\Omega_0 = \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$. On a $\Gamma(1) = 1$, et la fonction Γ vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Ainsi, la fonction Γ généralise les factorielles au sens où $\Gamma(n)=(n-1)!$ pour $n\geq 1$.

Cor 28 : La fonction Γ se prolonge à $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$ en une fonction méromorphe, avec des pôles simples en $\{-n, n\in\mathbb{N}\}$, de résidus respectifs $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Prop 29 : La fonction $\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)>0\}$.

Application 30 Soit B_n la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$, S^{n-1} la sphère unité (le bord de B_n). On a $\lambda(B_n)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$

où λ désigne la mesure de Lebesgue.

Application 31 (Formule de Stirling) Quand $x\to\infty$, on a l'équivalence suivante $\Gamma(x)\sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$.

Théo 32 : Soit (p_n) la suite des nombres premiers, rangés par ordre croissant. Si $\mathrm{Re}(s)>1$, alors $\zeta(s)\neq 0$ et $\frac{1}{\zeta(s)}=\prod_{n\geq 0}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)$

Cor 33 : La série $\sum\frac{1}{p_n}$ est divergente.

Théo 34 : La fonction $z\mapsto\frac{1}{\Gamma(z)}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec la formule $\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}$.

Théo 35 : Formule des compléments : Pour $z\in\mathbb{C}$ tel que $0<\mathrm{Re}\, z<1$, on a

$$\Gamma(z)\Gamma(z-1)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Rq 36 en notant Γ le prolongement de Γ à $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$, la formule précédente reste valable pour $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

Hypothèse 37 Les zéros de la fonction ζ (sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$) qui ne sont pas des entiers négatifs sont de partie réelle $\frac{1}{2}$.

Cette hypothèse à ce jour non démontrée est dite hypothèse de Riemann et forme un lien avec la répartition des nombres premiers.