262 Convergence d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limites. Exemples et applications.

Ref : [B-L] Barbe Ledoux. Probabilités. [Ouv] Ouvrard - Probabilités, vol 2. [Foa] Foata Fuchs Calcul des Probabilités. [ZQ] Zuily Queffélec Analyse pour l'agrégation.

Devlts : Levy + TCL (35, 36, 37) [ZQ] [Foa] ; Stirling (40).

Cadre : On fixe $(\Omega, A, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Et on considère $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ $(d \geq 1)$. On note $|.|$ la norme de $\|.\|$.

I. Convergence presque sûre et convergence en probabilité.

1) Autour de la convergence presque sûre.

[BL] 109-112

Def 1 : On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X presque sûrement si $\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$. Autrement dit si l'ensemble où X_n ne cv pas vers X est négligeable, on note $X_n \xrightarrow{ps} X$.

Rq 2 : La condition de convergence presque sûre est équivalente à $\forall \varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(\overline{\lim} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0$

Ex 3 : Si (X_n) sont de loi $\mathcal{B}(p)$, on pose $U_k = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} X_i$. La suite (U_k) converge presque sûrement vers U une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$.

[B-L] 93

Théo 4 (Borel Cantelli). Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de A.

(a) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$

(b) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et les A_n sont mutuellement indépendants alors $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$.

[B-L] 111

Ex 5. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée, On obtiendra presque sûrement une infinité de fois 57 piles consécutifs.

Cor 6 : (i) Si $\forall \varepsilon > 0$, $(\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)) \in \ell^1(\mathbb{R})$, alors $X_n \xrightarrow{ps} X$

(ii) Si les (X_n) sont mutuellement indépendants, alors $X_n \xrightarrow{ps} 0$ si et seulement si $(\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon)) \in \ell^1(\mathbb{R})$ $\forall \varepsilon > 0$.

Ex 7 : Si $X_n \sim \mathcal{E}(1)$ sont indépendants, et $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ alors $M_n/\ln n$ converge vers 1 presque sûrement

Rq 8 : Le corollaire 6 (i) fournit une condition suffisante mais non nécessaire de convergence ps. En effet sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ les v.a.r $\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]} =: X_n$ convergent presque sûrement vers 0, pourtant $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \frac{1}{n}$ n'est pas sommable.

2) Convergence en probabilité.

[BL] 113

Def 9 : On dit que (X_n) converge vers X en probabilité vers X si : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ On note $X_n \xrightarrow{P} X$.

Prop 10 : La convergence en probabilité est moins forte que la convergence presque sûre.

[Ouv] 91

Ex 11 : Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{n})$. Alors $X_n \to 0$ en proba mais pas ps.

Prop 12 : Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ est continue, et $X_n \to X$ en proba (resp ps) alors $f(X_n) \to f(X)$ en proba (resp ps)

Ex 13 : Le produit scalaire de deux suites convergentes converge vers le produit scalaire des limites.

[BL] 114

Théo 14 : On a équivalence entre

- $X_n \xrightarrow{P} X$
- De toute suite (n') d'entiers croissant, on peut extraire (n_k) telle que $X_{n'_k} \xrightarrow{ps} X$.

Rq 15 : La convergence en proba est métrisable, par $d(X, Y) = E(|X - Y| \wedge 1)$.

2) Lois des grands nombres et applications

[BL] 132

Dans cette section on considère X une v.a.r et (X_n) un échantillon de X (suite de v.a.r i.i.d de même loi que X). On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Théo 16 (Loi faible des grands nombres) Si $X \in L^1(\mathbb{P})$, alors S_n/n converge en probabilité vers $E(X)$.

Théo 17 : (Loi forte des grands nombres) On a équiv entre

* $X \in L^1(\mathbb{P})$
* $\frac{S_n}{n}$ converge vers $E(X)$ presque sûrement.

Ex 18 : Si $X_n \sim \Gamma(k, \theta)$, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i) \sim \frac{1}{n}\Gamma(nk, \theta)$

[Ouv] 123

Appl 19 (Méthode de Monte Carlo) Soit $f : D \to \mathbb{R}$ $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, une f° Lebesgue intégrable. Soit (X_n) i.i.d de loi uniforme sur D. Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{ps} \frac{1}{\lambda(D)} \int_D f(t)dt$

II Convergence en norme L^p, $p \geq 1$.

[BL] 117 118

Def 20: Si les (X_n) et X sont dans $L^p(\mathbb{P})$, pour $p \in [1, \infty[$. On dit que (X_n) converge vers X dans L^p si: $\lim \|X_n - X\|_p = 0$ ou de manière équivalente $E(|X_n - X|^p) \to 0$

Prop 21: La convergence L^p entraîne la convergence en probabilité, mais pas l'inverse: si $X_n \sim (1-n^{-p})\delta_0 + n^{-p}\delta_n$, on a $X_n \xrightarrow{P} 0$ mais $E(|X_n|^p) = 1$.

Prop 22: Pour $q \geq p \geq 1$, on a
i) $L^q(\mathbb{P}) \subseteq L^p(\mathbb{P}) \subseteq L^1(\mathbb{P})$ (ii) $X_n \xrightarrow{L^q} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Rq 23: Si $X_n \xrightarrow{L^p} X$, alors on peut extraire de X_n une suite qui converge presque sûrement vers X.

Ex 24: Sur $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$ $f_n = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}[}$ pour $n = 2^m + k$, $0 \leq k < 2^m$.
Alors $f_n \xrightarrow{L^p} 0$ mais pas ps.

Def 25: Une famille $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires réelles intégrables est dite équiintégrable, ou uniformément intégrable si

$$\lim_{c \to \infty} \sup_{i \in I} \int_{\{|X_i| > c\}} |X_i| \, dP = 0.$$

Rq 26: Par convergence dominée, une famille finie de $L^1(\mathbb{P})$ est équiintégrable. De même si $|X_i| \leq Y$ ps et $Y \in L^1(\mathbb{P})$, $(X_i)_{i \in I}$ est équiintégrable.

Théo 27: Si (X_n) est une suite de v.a.r intégrables. Il y a équivalence entre
(a) $(X_n) \xrightarrow{P} X$ et (X_n) est uniformément intégrable.
(b) X est intégrable et $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Théorème (Vitali) 28
Soit (X_n) une suite de var qui converge en probabilité vers une va X. La famille (X_n) est uniformément intégrable si et seulement si $X \in L^1(\mathbb{P})$ et $X_n \xrightarrow{1} X$.

2) Cas des martingales.

III Convergence en loi

1) Définitions et premiers théorèmes

[BL] 127 123

Def 29: On dit que (X_n) converge vers X en loi si, pour toute fonction $f \in C_b(\mathbb{R})$, on a $E[f(X_n)] \to E[f(X)]$.

Rq 30 Cette convergence permet à priori de manipuler des variables aléatoires venant de différents espaces probabilisés.

Prop 31: La convergence en probabilité entraîne la convergence en loi, mais la réciproque n'a même pas de sens.

Ex 32: Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $(-1)^n X =: X_n$ est encore de loi $\mathcal{N}(0,1)$, donc $(X_n) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0,1)$ mais pas ps. et pas proba.

Prop 33: Si X_n converge en loi vers une variable aléatoire constante égale à c, alors cette convergence est en proba.

Théo 34: On a équivalence entre
$(X_n) \to X$ en loi $\quad * \; F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ pour tout point t de continuité de F_X.

[RQ] 360

Prop35. La condition de la définition 29 est équivalente à $\forall f \in C_0(\mathbb{R}),\ E(f(X_n)) \to E(f(X))$.

Théo36 (Lévy) On a équivalence entre
- $X_n \to X$ en loi
- φ_{X_n} converge simplement vers φ_X

Théo36bis (Lévy). Si $\varphi_{X_n}(t)$ converge simplement vers une fonction Ψ continue, alors $\Psi = \varphi_Y$ est une fonction caractéristique, et $X_n \to Y$ en loi

DVP

Théo37 (Théorème Central Limite) Soit (X_n) une suite de v.a.r indépendantes de même loi que $X^2 \in L^2(P)$, et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors si $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = \operatorname{Var} X$, alors $\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{Loi}} \mathcal{N}(0,1)$.

Théo38 Si X_n suit $B(n,p_n)$, où $p_n \to 0$ avec $np_n \to \lambda > 0$, alors S_n converge en Loi vers une loi de Poisson $P(\lambda)$.

Rq39 Ceci permet en particulier d'approcher une loi Binomiale par une loi de Poisson.

Ouv1 Ouv2 311

Théo40 : (Évènements rares de Poisson) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, soit une famille finie $\{A_{nj} \mid j \in [\![1, M_n]\!]\}$, d'évènements indépendants définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $p_{nj} := \mathbb{P}(A_{nj})$ et $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{nj}}$

On suppose M_n croît vers $+\infty$.
- $\max_{1 \leq j \leq M_n} p_{nj} \to 0$ et $\sum_{j=1}^{M_n} p_{nj} \to \lambda > 0$

Alors $S_n \xrightarrow{\text{Loi}} P(\lambda)$.

Appli41 (Formule de Stirling) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ DVP [Foa] 241

2) Applications en statistiques.

Appli42 : Si $X_n \sim B(n,p)$ alors

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

Appli43 : Construction d'intervalles de confiance via le TCL.