250 Transformation de Fourier. Applications.

Ref : [ZQ] Zuily Queffélec Analyse pour l'agrégation [Rud1] Rudin. Analyse Réelle. [BP] Briane Pagès. Théorie de l'intégration [Bon] Bony. Distributions, Fourier. [Zui] Zuily. Elts de Distrib et EDP. [Mey] Meyer. Ondelettes et opérateurs [BL] Barbe Ledoux. Probabilités.

Dév : Polar Fourier (24) [OA] Obj Agrégation
Fourier Plancherel (33)
Lévy + TCL (59+60) [ZQ].

I. Transformée de Fourier des fonctions intégrables.

1) Définitions et premières propriétés.

[ZQ] 327

Def 1 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction, notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, définie pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ par
$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i(\xi,x)) f(x)\, dx.$$
Où $(\xi.x)$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

Rq 2 : Cette définition a un sens car $|e^{-i(\xi,x)} f(x)| = |f(x)|$ sur $\mathbb{R}^d$.

Ex 3 : Pour $f = \mathbb{1}_{[-b,b]}$, $\hat{f} : \xi \mapsto \sin(b\xi)/\xi$ (prolongée par b en 0).

Prop 4 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Prop 5 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ est une fonction continue qui tend vers 0 quand $\|\xi\|$ tend vers $+\infty$.

[Rud1] 220

Prop 6 : Pour $f \in L^1$, $\lambda, a \in \mathbb{R}^d$. On a

(a) Si $g(x) = f(x)e^{iax}$, $\hat{g}(\xi) = \tau_a \hat{f}$ (b) Si $g = \tau_a f$, $\hat{g} = \hat{f}(\xi)e^{-i(a,\xi)}$

(c) Si $g = \bar{f}$, alors $\hat{g} = \bar{\hat{f}}$ (d) Si $g = f(\frac{x}{\lambda})$, $\lambda > 0$, $\hat{g}(\xi) = \lambda \hat{f}(\lambda\xi)$

Prop 7 : Soit $j \in [\![1,d]\!]$.

(a) Si $f, x_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\partial_{x_j}\hat{f}$ existe avec $\partial_{x_j}\hat{f} = \widehat{-ix_j f}$.

(b) Si $f, \partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{\partial_{x_j} f} = -i x_j \hat{f}$

Ex 8 : On a $\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+\xi^2}$, donc $\mathcal{F}(e^{-\frac{|x-a|}{\lambda}}) = \frac{2\lambda e^{-iax}}{\sqrt{2\pi}\,(1+(\lambda x)^2)}$.

2) Produit de convolution.

[BP] 261 262.

Def 9 : Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurables positives, on peut définir
$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$
le produit de convolution de f et g au point x.

Prop 10 : Quand ces quantités sont finies, la convolution est associative, commutative et bilinéaire.

Théo 11 : Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$, pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $L^q(\mathbb{R}^d)$, la fonction $f * g$ est bien définie dans $L^r(\mathbb{R}^d)$ et on a $\|f*g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Ainsi, le produit de convolution est bien défini sur $L^1(\mathbb{R}^d) \times L^1(\mathbb{R}^d)$ et munit ainsi $L^1(\mathbb{R}^d)$ d'une structure de $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

Ex 12 : On a $\mathbb{1}_{[-1,1]} * f(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(y)\, dy$.

Théo 13 : Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in L^p$, $g \in L^q$ on a $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et de limite nulle en ∞.

[BP] 262

Prop 14 : Soit f, g telle que $f * g$ soit définie (presque partout) alors $\operatorname{Supp} f*g \subseteq \operatorname{Supp} f + \operatorname{Supp} g$. En particulier la convolée de fonctions à support compact est à support compact.

[Rud1] [Zui]

Prop 15 : Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

App 16 : L'algèbre $(L^1(\mathbb{R}^d), +, *)$ est sans unité

App 17 : Si $f * f = f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $f = 0$.

3) Inversion de Fourier.

[Bon] 164 166.

Ex 18 : Si $f(x) = e^{-a\|x\|^2}$, alors $\hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4a}}$ avec $a > 0$.

Théo 19 : Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ également, Alors
$$(2\pi)^{-d}\,\hat{\hat{f}} = \check{f} \text{ dans } L^1(\mathbb{R}) \quad \left(\text{i.e } f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d\right)$$

Cor 20 : La transformée de Fourier est injective.

Cor 21 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ n'est pas continue, alors $\hat{f}$ n'est pas intégrable.

[OA] 110 140

Def 22 : Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\, dx < \infty$. On pose μ la mesure sur I à densité ρ.

Prop 23 : Il existe une unique famille (P_n) de polynômes unitaires orthogonaux de degrés échelonnés dans $L^2(\mu)$.

Théo 24 : Si $\exists a > 0 \mid e^{a|x|} \in L^1(\mu)$, alors les polynômes (P_n) forment une base Hilbertienne de $L^2(\mu)$. DVP

II Extensions de la Transformée de Fourier.

1) Classe de Schwartz.

[Zui] 107 108

Def 25 : Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on pose $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}$. Et pour f de classe $C^{|\alpha|}$ on pose $\partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$.

Pour $f \in C^m$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq m$, on pose $N_{\alpha\beta}(f) = \|x^\beta \partial^\alpha f\|_\infty \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Def 26 : On appelle classe de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$ l'ensemble $S(\mathbb{R}^d) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, N_{\alpha\beta}(f) < \infty \}$.

Ex 27 : $C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R}^d)$, mais $S(\mathbb{R}^d)$ ne se limite pas à ça : il contient aussi $\exp(-\|x\|^2)$. On obtient aussi que $S(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1, \infty[$.

Prop 28 : Pour $p \in [1, \infty]$, on a $S(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$.

[Zui] 108 112

<u>Prop 29</u> : Pour $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d$, $f\in S(\mathbb{R}^d)$ on a $x^\alpha f\in S(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\beta f\in S(\mathbb{R}^d)$ de plus les applications $f\mapsto x^\alpha f$ et $f\mapsto\partial^\beta f$ sont continues de $S(\mathbb{R}^d)$ dans $S(\mathbb{R}^d)$

<u>Prop 30</u> : $S(\mathbb{R}^d)$ est stable par produit.

<u>Théo 31</u> : La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ stabilise $S(\mathbb{R}^d)$, il s'agit de plus d'un homéomorphisme linéaire, avec $\mathcal{F}^{-1}(f)(x)=(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi}f(\xi)dx$

<u>Théo 32</u> : Pour $f,g\in S(\mathbb{R}^d)$, on a.

(a) $\int_{\mathbb{R}^d}\hat{u}\,v\,d\lambda=\int_{\mathbb{R}^d}u\,\hat{v}\,d\lambda$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, (b) $\langle f,g\rangle=(2\pi)^{-n}\langle\hat f,\hat g\rangle$ (dans $L^2(\mathbb{R}^d)$).

(c) On a $\mathcal{F}(f\ast g)=\hat f\cdot\hat g$ et $\widehat{fg}=(2\pi)^{-n}\hat f\ast\hat g$

[Rud 1] 275.

<u>Théo 33</u> : L'application $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}:S(\mathbb{R}^d)\to S(\mathbb{R}^d)$ s'étend de façon unique en un automorphisme d'Espace de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}^d)$, de plus une isométrie. On peut définir ainsi $\mathcal{F}:L^2\to L^2$, qui respecte la Formule de Plancherel.

$\int_{\mathbb{R}^d}f\hat g\,d\lambda=\int_{\mathbb{R}^d}\hat f g\,d\lambda$

DVP

<u>Ex 34</u> : $x\mapsto\frac{\sin\pi x}{x}\in L^2(\mathbb{R})$ et sa tf de Fourier est $\frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}$ (Ex 3 de I-4) de Fourier)

2) Distributions (Tempérées).

[Zui] 114 115

<u>Def 35</u> : On définit $S'(\mathbb{R})$ comme le dual topologique de $S(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire les formes linéaires sur $S(\mathbb{R}^d)$ continues pour les seminormes $N_{\alpha\beta}$: Une forme linéaire T sur $S(\mathbb{R}^d)$ est une distribution tempérée si :

$$\exists k,l\in\mathbb{N},\ C>0\quad |\langle T,\varphi\rangle|\leq C\sum_{\substack{|\alpha|\leq k\\|\beta|\leq l}}N_{\alpha\beta}(\varphi)\quad\forall\varphi\in S(\mathbb{R}^d).$$

<u>Prop 36</u> Comme on a une injection continue $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow S(\mathbb{R}^d)$, on a une injection continue $S'(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

<u>Prop 37</u> : L'espace $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions à support compact est inclus dans $S'(\mathbb{R}^d)$.

<u>Def 38</u> : Pour $T\in S'(\mathbb{R}^d)$, on définit $\hat T:S(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}$ par $\langle\hat T,\varphi\rangle:=\langle T,\hat\varphi\rangle$ pour $\varphi\in S(\mathbb{R}^d)$. L'application $\hat T$ est une distribution tempérée, appelée transformée de Fourier de T.

[Zui] 114 120

<u>Rq 39</u> : Si T est issue d'une fonction, $\hat T$ coïncide avec la tf de Fourier de la fonction (quand ceci a du sens).

<u>Théo 40</u> : La transformée de Fourier des distributions tempérées donne un homéomorphisme linéaire de $S'(\mathbb{R}^d)$ dans lui même

<u>Prop 41</u> : Soit $T\in S'(\mathbb{R}^d)$, on a

(a) $\hat{\hat{T}}=2\pi^n\check{T}$ où $\langle\check{T},\varphi\rangle:=\langle T,\check{\varphi}\rangle$. (b) $\mathcal{F}(\partial_j T)=i\xi_j\hat T$ (c) $\mathcal{F}(x_j\cdot T)=-i\hat{T}'$.

<u>Ex 42</u> : On a $\hat{\delta_0}=1$; $\widehat{\sin}=\delta_1-\delta_{-1}$. , $\frac{\sin(bx)}{x}\xrightarrow{b\to\infty}\delta_0$ ds $S'(\mathbb{R})$

<u>Théo 43</u> : Si $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $\hat T$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ donnée par $\hat T(\xi)=\langle T_x,e^{-ix\xi}\rangle$ De plus, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $|\partial_\xi^\alpha\hat T(\xi)|\leq C_\alpha(1+\|\xi\|)^k$ (croissance lente). pour $\alpha\in\mathbb{N}^d$ et $\xi\in\mathbb{R}^d$

<u>Def 44</u> : Soient $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on définit la convolution de T et S par. $\langle T\ast S,\varphi\rangle=\langle T_y,\langle S_\xi,\tau_{-y}\varphi\rangle\rangle$ (on note $S\ast T$ de la même man).

68 69

<u>Prop 45</u> : Pour $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on a

$T\ast\delta_0=\delta_0\ast T=T$. (b) $\partial^\alpha(T\ast S)=(\partial^\alpha T)\ast S=T\ast(\partial^\alpha S)$.

<u>Prop 46</u> : La convolution est continue en ses deux variables.

- Pour $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ on a $\operatorname{Supp}T\ast S\subseteq\operatorname{Supp}T+\operatorname{Supp}S$.
- Pour $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S,U\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ on a $T\ast(S\ast U)=(T\ast S)\ast U$.

<u>Théo 47</u> Si $T\in S'(\mathbb{R}^d)$ et $S\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on a $T\ast S\in S'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}(T\ast S)=\hat T\hat S$.

<u>Rq 48</u> : Comme $S\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $\hat S\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc $\hat T\hat S$ a du sens.

III. Applications

1) Traitement du signal et Formule de Poisson.

[Mey] 10

Théo 49 : (Inégalité de Heisenberg). Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$, on a. $\|(x-x_0)f\|_2 \|(\xi-\xi_0)\hat{f}\|_2 \geq 2\pi \|f\|_2^2$.

Rq 50 : Ceci s'interprete comme une indétermination globale de la localisation en espace et en temps d'un signal, ce qui se remarque par exemple sur $\mathbb{1}_{[b,b]} \rightsquigarrow \frac{\sin(bx)}{x}$.

Théo 50 (Règle de Shannon) Soit $f \in S'(\mathbb{R}^d)$ telle que $S = \hat{f} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ à support dans $[-T,T]$. Soit $\delta > 0$. La distribution f est représentée par une fonction C^∞ et on a.

- Si $\delta > \frac{\pi}{T}$, on peut choisir f non nulle telle que $(f(k\delta))_{k\in\mathbb{Z}} \equiv 0$
- Si $\delta < \frac{\pi}{T}$, pour $\phi \in S(\mathbb{R})$ à support dans $[-\frac{\pi}{\delta}, \frac{\pi}{\delta}]$ et $=1$ sur $[-T,T]$, on a

$$f(x) = \delta \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k\delta)\phi(x-k\delta).$$

4

Théo 51 (Formule de Poisson) Soit $f \in S(\mathbb{R})$ alors pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2k\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k).e^{ikx}$$

Rq 52 On obtient en fait $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}$ en étudiant une série de Fourier.

2) Equations aux dérivées partielles.

[Lou] 264 267

On considère l'équation de la chaleur sur une tige homogène de longueur infinie. Avec à l'instant $t=0$ la répartition $u_0(x) = u(0,x)$. Le problème est donné par

$$\begin{cases} \partial_t u = (\partial_x)^2 u & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La solution est donnée par

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = G_t * u_0(x)$$

où $G(t,x) = \frac{e^{\frac{-x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$.

[Koi] 275

Equation des ondes. On considère l'équation.

$$\begin{cases} (\partial_t)^2 u = a^2 (\partial_x)^2 u & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On suppose $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $g' \in L^1(\mathbb{R})$ (ou $f, g \in S(\mathbb{R})$). Alors $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x-at) + f(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)ds$$ est solution.

3) Application en probabilité.

[BL] 61-63

Def 53 Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ un vecteur aléatoire. On appelle fonction caractéristique de X, notée φ_X, la fonction définie par

$$\varphi_X(t) = E(e^{it.X}) = \int_{\Omega} e^{itx} d\mathbb{P}_X$$

Théo 54 : Deux vecteurs aléatoires de même fonction caractéristique ont même loi.

Ex 55 : $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ $\varphi_X(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(1)$, $\varphi_X(t) = \frac{1}{1-it}$.

Rq 56 : Si $\mathbb{P}_X$ est à densité f, alors $\varphi_X(t) = \check{\hat{f}}(t)$.

Prop 57 : Si X, Y sont deux v.a.r indépendantes, $X+Y$ a pour densité la convolution $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$.

Prop 58 : Si X admet un moment d'ordre k, alors φ_X est de classe C^k et on a $\varphi_X^{(k)}(t) = E((iX)^k e^{itX})$.

Réciproquement, si $\varphi_X(t)$ est de classe C^k, X a un moment d'ordre $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.

[ZQ] 536 540

Théo 59 (Lévy) Si (X_n) est une suite de v.a.r. X une v.a.r. On a equivalence entre $(X_n) \to X$ en loi, $\varphi_{X_n} \to \varphi_X$ simplement

2) Si φ_{X_n} cv simp vers φ continue, alors φ est une f^o caract.

Théo 60 (TCL). Soit $X \in L^2$, $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = V(X) > 0$. (X_n) une suite de v.a de même loi de X. S_n la somme partielle associée, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dx.$$

DVP