246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

Refs : [ElAm] El Amrani : Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions. [Gou2] Gourdon Analyse. [Mey] Meyer - Ondelettes et opérateurs. [Can] Candelpergher. Calcul intégral.

Dev 1 : Féjer [ElAm] 29, 30

Dev 2 : Eq de la chaleur. [Can] 41

Cadre : On sera amené à considérer des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-périodiques pour un $T>0$. Quitte à dilater, on peut supposer $T = 2\pi$. De telles fonctions s'identifient aux fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

I. Définitions et premières propriétés.

1) Notations et séries trigonométriques.

[ElAm] 287 295.

Def 1 : On pose $CM(\mathbb{T})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux, et $C(\mathbb{T})$ le sous espace vectoriel formé des fonctions continues.
On considère de même les espaces $L^p(\mathbb{T})$ comme identifiés avec $L^p(0,2\pi)$.

Def 2 : Pour $f, g \in CM(\mathbb{T})$, le nombre $(f,g) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$ définit une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur $CM(\mathbb{T})$.

Rq 3 : Attention, cette forme n'est pas définie : $(f,f) = 0$ ssi f est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points de $[0,2\pi]$.

Co 4 : $(C(\mathbb{T}), (\cdot,\cdot))$ est un espace pré-hilbertien.

Def 5 : On dit que $f \in CM(\mathbb{T})$ vérifie la condition de Dirichlet en $x \in \mathbb{R}$ si $f(x) = \frac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+))$. On pose $D(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions de $CM(\mathbb{T})$ qui vérifient la condition de Dirichlet en tout point.

Co 6 : L'espace $(D(\mathbb{T}), (\cdot,\cdot))$ est un espace pré-hilbertien.

Def 7 : Pour $n \in \mathbb{Z}$ on pose $e_n : x \mapsto e^{inx} \in C(\mathbb{T})$. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $D(\mathbb{T})$.

Def 8 : On appelle polynôme trigonométrique tout élément de $\mathrm{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de la forme $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ avec $u_n \in \mathrm{Vect}(e_{-n}, e_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
Une série trigonométrique s'écrit canoniquement sous la forme $S = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_{-n}e_{-n} + c_n e_n)$. Une telle série converge si et seulement si les séries $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e_{-n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ convergent. On utilisera dans un tel cas la notation $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$.

Rq 9 : En écrivant $e_{\pm n} = \cos(nt) \pm i\sin(nt)$. On remarque qu'une série trigonométrique s'écrit sous la forme $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt + b_n \sin nt$

Rq 10 : On peut à priori considérer différentes notions de convergence des séries trigonométriques :
- 1 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ converge si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e_{-n} + c_n e_n$ converge.
- 2 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum c_n e_n$ et $\sum c_{-n}e_{-n}$ convergent.

On a $2 \Rightarrow 1$ mais la réciproque est fausse. On utilisera par défaut la première convention.

[Gou2] 256 257

Prop 11 : Si $\sum |c_n|$ et $\sum |c_{-n}|$ convergent, la série trigonométrique associée converge normalement sur $[0,2\pi]$.
Si les suites (c_n) et (c_{-n}) sont réelles décroissantes et tendent vers 0, la série trigonométrique associée converge simplement sur $\mathbb{T}$ et uniformément sur $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ sur $\alpha \in]0,\pi[$.

2) Coefficients de Fourier, série de Fourier.

[ElAm] 298. 301

Def 12 : Soit $f \in CM(\mathbb{T})$, on appelle coefficients de Fourier de f les produits scalaires $c_n(f) = (f, e_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$. $(n \in \mathbb{Z})$.
Les applications $f \mapsto c_n(f)$ sont des formes linéaires sur $CM(\mathbb{T})$.

Rq 13 Dans le cas d'une fonction réelle, on peut aussi être intéressé par les coefficients de Fourier trigonométriques de f, définis par
$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n(f) = 2(f, \cos(nt)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$
$b_n(f) = 2(f, \sin(nt)) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$.

Prop 14 : Pour $f \in CM(\mathbb{T})$, on a
$$\begin{cases} c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - i b_n(f)) \\ c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + i b_n(f)) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{cases}$$
Ces formules permettent parfois de faciliter les calculs des coefficients de Fourier, par exemple dans le cas où f est réelle, paire ou impaire.

Théo 15 : Soit $f \in D(\mathbb{T})$. Si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls, alors f est nulle.

Prop 16 : Pour $f \in CM(\mathbb{T})$, $a \in \mathbb{R}$, $(k,n) \in \mathbb{Z}^2$, Alors
- $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$ - $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ - $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$
- $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f) e_n$

[ElAm] 301 307

Def 17 : Pour $f \in CM(\mathbb{T})$, on appelle série de Fourier de f la série trigonométrique $S(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$. Pour $N \in \mathbb{N}$, on appelle N-ième somme de Fourier de f la somme partielle $S_N(f) = \sum_{n=0}^{N} c_n(f) e_n + \sum_{n=1}^{N} c_{-n}(f) e_{-n}$.

Prop 18 : Si f est continue et de classe C^1 par morceaux sur $[0,2\pi]$. Alors f' est continue par morceaux et 2π périodique, et on a $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in\, c_n(f)$. De même, si f est de classe C^{k-1} sur $[0,2\pi]$ et C^k par morceaux, on obtient par itération $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.

Théo 19 : (Riemann Lebesgue) Pour $f \in CM(\mathbb{T})$, les coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n\geq 0}$ et $(c_{-n}(f))_{n\geq 0}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Cor 20 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in CM(\mathbb{T})$ est de classe C^{k-1} sur $[0,2\pi]$ et C^k par morceaux, Alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ quand n tend vers $+\infty$ et quand n tend vers $-\infty$

3) ~~Formule de Parseval~~, convolution sur $[0,2\pi]$.

[ElAm] 307 311

Prop 21 : Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π périodique est uniformément continue.

Def 22 : Soient $f, g \in CM(\mathbb{T})$, on appelle produit de convolution de f et g la fonction $f * g : t \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-x) g(x)\,dx$ pour $t \in [0,2\pi]$.

Rq 23 : On remarque que, comme la convolution classique sur $\mathbb{R}^d$, la convolution sur $\mathbb{T}$ est commutative, associative et distributive sur l'addition ($(CM(\mathbb{T}), *)$ est une algèbre commutative)

Prop 24 : Pour $f, g \in CM(\mathbb{T})$ alors pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f*g) = c_n(f) c_n(g)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $f*g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) c_n(g) e^{int}$.

Théo 25 : (Formule de Parseval) Pour $f \in CM(\mathbb{T})$. On a $\sum |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$.

Def 26 : Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n$, le noyau de Dirichlet d'ordre N.

Prop 27 : Pour $N \in \mathbb{N}$, D_N est une fonction paire, 2π-périodique, qui vérifie $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = 1$. De plus, D_N est le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction, $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ associant $\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$ à t. Enfin, pour $f \in CM(\mathbb{T})$ on a $S_N(f) = f * D_N$.

On voudrait à présent utiliser des résultats de convolution (approximation de l'identité) pour conclure à la convergence des séries de Fourier. Mais on rencontrera certaines difficultés.

II. Convergence des séries de Fourier.

1) Convergence au sens de Césaro.

[ElAm] 409 410

On verra que D_N n'a pas les bonnes propriétés d'une approximation de l'identité, c'est en revanche le cas de la moyenne de Césaro des D_N.

Def 28 : On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k$ le noyau de Féjèr.

Prop 29 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(t/2)}\right)^2$ pour $t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi, $U_n(t)$ est une approximation de l'identité dans le sens suivant :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U_n(t)\,dt = 1$, $-\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{-\pi}^{\pi} |U_n(t)|\,dt < \infty$
- Pour $\alpha \in]0,\pi[$, $\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^{2\pi-\alpha} U_n(t)\,dt = 0$.

DVP

Théo 30 (Féjèr). Pour $f \in C(\mathbb{T})$, la moyenne de Césaro des sommes partielles de la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{T}$.

Cor 31 : Tout élément de $C(\mathbb{T})$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

2) Base hilbertienne de Fourier et convergence L^2.

Le produit scalaire que nous avons défini sur $CM(\mathbb{T})$ s'étend naturellement à $L^2(\mathbb{T})$. On peut ainsi définir les coefficients de Fourier d'une fonction $L^2(\mathbb{T})$ (qui est d'ailleurs un espace de Hilbert pour notre prod(scal)).

[ElAm] 305 311

Prop 32 : Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, la somme $S_N(f)$ est la projection orthogonale de f sur P_N l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$.

Théo 33 : Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$. (Inégalité de Bessel)

On a ainsi : $\|c_n(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$.

Théo 34 : Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a $S_N(f) \in L^2(\mathbb{T})$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{T})$. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est ainsi une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

3) Convergence ponctuelle de la série de Fourier.

[ElAm] 314

Pour $f \in CM(\mathbb{T})$ les limites $f(x^-)$ et $f(x^+)$ existent pour tout $x \in \mathbb{T}$. On peut définir $\tilde{f} \in D(\mathbb{T})$ la régularisée de f comme

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$$

(égale à f sur tous les points de continuité).

[ElAm] 314

Théo 35 (Dirichlet) Soit $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f}$ la régularisée de f.

Théo 36: Si $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ est continue et de classe C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

[Can] 340

Rq 37: L'hypothèse de régularité est essentielle. Il existe en effet des fonctions continues différentes de leur série de Fourier (On aurait une contradiction avec le théorème de Banach Steinhaus).

[Gou Z] 266

Ex 38 On considère φ la régularisée de la fonction $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}=\mathbb{1}_{]0,\pi[}$ (signal carré). La série de Fourier de φ converge vers φ simplement mais pas uniformément (Phénomène de Gibbs Fig 1).

III. Applications.

1) Calcul de sommes particulières.

[ElAm] 316 319

En faisant le lien entre certaines séries particulières et des séries de Fourier (dont on connait la somme). On peut calculer certaines sommes.

Ex 37: Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodique impaire et telle que $f(t)=\begin{cases} t \text{ sur } [0,\frac{\pi}{2}[\\ \pi-t \text{ sur } [\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$ (Fig 2).

On a $c_n(f)=0$ si n est pair $c_n(f)=-\mathrm{sgn}(n)\, i\, \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2}$.

La série de Fourier de f converge normalement vers f. On a donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2}\sin((2p+1)t)$ On obtient donc

$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}=\sum_{p=0}^{\infty}4(\pi(2p+1)^2)^{-1}$ et $\frac{\pi^2}{8}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$. Ainsi $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Par la formule de Parseval.

$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2p+1)^4}=\frac{\pi^2}{2!}$ donc $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$. et $\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

2) Formule de Poisson et lien avec la transformation de Fourier.

[Mey] 4

On considère la fonction impaire, 2π périodique valant $\frac{\pi-x}{2}$ sur $]0,2\pi[$ (Fig 3).

Les coefficients de Fourier de cette fonction donnent

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(nx) \quad \text{pour } x\notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

Cette convergence ayant lieu dans $L^2]0,2\pi[$ on peut la voir au sens des distributions, on peut alors la dériver terme à terme pour obtenir [Mey] 4

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{2k\pi}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{ikx}.$$

au sens des distributions, ces distributions étant des distributions tempérées, on obtient. [Gou Z] 273

Théo 38 (Formule de Poisson) Pour $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, On a

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+2k\pi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\,e^{inx}.$$

Cor 39: Pour $s>0$, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2 s}=\frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-\frac{\pi k^2}{s}}$.

Cor 40: Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$, et $g:x\mapsto\sum_{k\in\mathbb{Z}}f(x+2\pi k)$. Alors $g\in L^1[0,2\pi]$ et les coefficients de Fourier de g sont donnés par $\frac{1}{2\pi}\hat{f}(k)$. [Mey] 8

3) Résolution de l'équation de la chaleur sur un cercle.

[Can] 401

C'est la motivation originale de J. Fourier, On considère $u_0\in L^2(\mathbb{T})$ on cherche à résoudre l'équation de la chaleur $\partial_t u(t,x)-(\partial_x)^2 u(t,x)=0$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{T}$. Avec la condition initiale $u_0(x)=u(0,x)$.

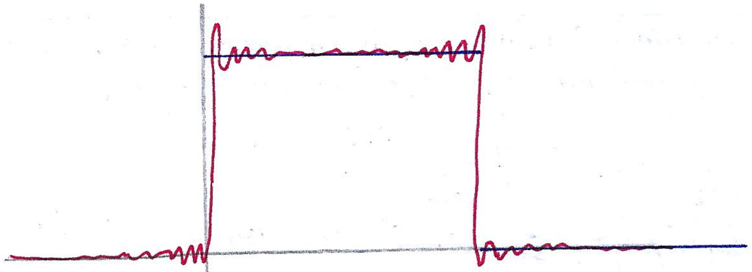
Théo 41: Pour $u_0\in L^2(\mathbb{T})$, il existe une unique fonction $u\in C^2(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{T})$ telle que $\partial_t u-\partial_{xx}u=0$, et qui converge vers u_0 dans L^2 quand t tend vers 0. Cette solution est donnée par

DVP

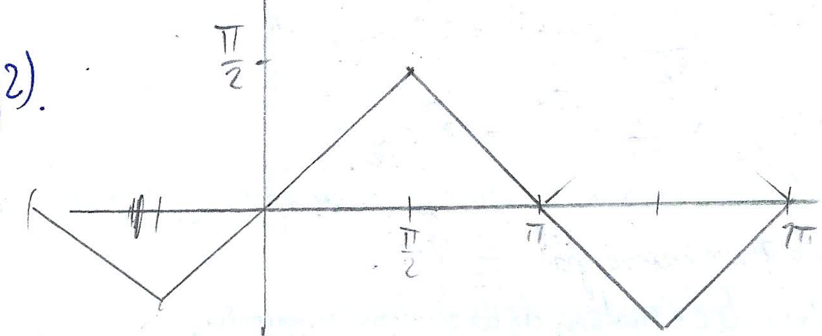
$$u(t,x)=(u_0 * K(\cdot,t))(x)$$

où $K(x,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{inx}e^{-n^2t}$ est le noyau de la chaleur. La fonction u est de plus lisse (effet régularisant).

(Fig 1)



(Fig2).



(Fig3)