245. Fonction d'une variable complexe. Exemples et applications

Refs : [AM] Amar Matheron, Analyse complexe. [TauC] Tauvel, Analyse complexe pour la L3. [CMB] Charles Mbekhta Queffélec, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs

Devts :
44 (Espace de Bergman)
65 (Intégrale de Gauss par les résidus).

Cadre : On fixe $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $u = \mathrm{Re} f$ et $v = \mathrm{Im} f$. On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ pour les notions de différentiabilité.

I. Holomorphie, définitions et exemples fondamentaux.

1) $\mathbb{C}$-dérivabilité.

[AM] 65 66

Def1 : La fonction f est dite $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$ si la limite $\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ existe dans $\mathbb{C}$, on la note alors $f'(a)$.

Rq2 : Si f est $\mathbb{C}$ dérivable en $a \in \Omega \cap \mathbb{R}$, alors elle est dérivable au sens classique.

Def3 : Soit f $\mathbb{C}$ dérivable en tout point de Ω, on dit que f est holomorphe sur Ω si la fonction $a \mapsto f'(a)$ est continue. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Ex4 : La fonction $z \mapsto z$ est holomorphe, de dérivée $z \mapsto 1$. La fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est jamais $\mathbb{C}$ dérivable : la limite $\frac{\bar{h}}{h}$ n'existe pas. De même, $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ et $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ ne sont pas holomorphe.

Prop5 : Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ sont $\mathbb{C}$ dérivables en $a \in \Omega$ il en va de même de $f+g$, fg, et f/g si $g(a) \neq 0$. L'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$ algèbre.

Co4 : Les polynômes sont holomorphes, de même que les fractions rationnelles quand elles sont définies.

Prop6 : Soit f dérivable en $a \in \Omega$, et $g : \Omega' \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert contenant $f(a)$. Si g est $\mathbb{C}$ dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable en a, avec $(g\circ f)'(a) = g'\circ f(a) \times f'(a)$.

2) Liens avec la différentiabilité.

[AM] 67.

Prop7 : Si f est $\mathbb{C}$ dérivable en a, alors f est différentiable en a, mais la réciproque est fausse (cf Ex4).

On a le résultat de caractérisation suivant.

Prop8 : Soit $a \in \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) f est $\mathbb{C}$ dérivable en a
(ii) f est différentiable en a, et $d_f a$ est une similitude directe (sa matrice est de la forme $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$ dans la base canonique)
(iii) f est différentiable en a, et $d_f a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ linéaire.
Si ces propriétés sont vérifiées, alors $d_f a$ est la multiplication par $f'(a)$

Cor9 : Une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ dérivable sur Ω si et seulement si elle est différentiable et vérifie les équations de Cauchy Riemann.
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Rq10 : On retrouve les résultats de l'exemple 4.

Cor11 : Si f est $\mathbb{C}$ dérivable en $a \in \Omega$, alors le Jacobien de f en a est donné par $|f'(a)|$.

[AM] 68

Prop11 : En posant $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. On a équivalence entre :
(i) f est différentiable en a et vérifie les équations de Cauchy Riemann.
(ii) f est différentiable en a et vérifie $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

3) Séries entières, fonctions analytiques.

[TauC] 40, 41, 50-53

Def12 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $a \in \Omega$, on dit que f est développable en série entière en a s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul, et un voisinage V de z_0 dans Ω tel que $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ pour $z \in V$.
On dit que f est analytique sur Ω si elle se développe en série entière en tout point de Ω.

Ex13 : $z \mapsto 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$: pour $a \in \mathbb{C}^*$, $|z-a| < |a|$, alors $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}}(a-z)^n$.

Théo14 : Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa somme est analytique sur le disque ouvert $D(0, R)$.

Prop15 : Toute fonction analytique sur Ω est de classe C^∞ et holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Théo16 : Si Ω est connexe, $a \in \Omega$ et f analytique sur Ω. On a équivalence entre :
(i) f est nulle sur Ω.
(ii) f est nulle sur un voisinage de a
(iii) $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

Cor17 : (Prolongement analytique) Deux fonctions analytiques qui coïncident au voisinage d'un point de Ω sont égales sur Ω.

Def18 : Soit $A \subseteq \Omega$. On dit que A est une partie localement finie de Ω si : A est discrète et fermée.

Ex19 : Une suite de Ω qui converge dans Ω (et sa limite) ne forme pas une partie localement finie. Un ensemble fini est toujours localement fini.

Théo20 (Zéros isolés) Si Ω est connexe et f analytique sur Ω, non identiquement nulle, alors l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de Ω.

Cor21 : Avec les notations précédentes, pour $a \in Z(f)$. Il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}$ vérifiant les conditions équivalentes suivantes :
(i) $f^{(k)}(a) \neq 0$ et $f^{(p)}(a) = 0$ pour $p \in [\![0, k-1]\!]$
(ii) Le premier terme non nul dans le développement de f en série entière au voisinage de a est de la forme $a_k(z-a)^k$, avec $a_k \neq 0$
(iii) $\exists$ un voisinage V de a dans Ω et h analytique sur V telle que au voisinage de a, on ait $f(z) = (z-a)^k h(z)$ et $h(a) \neq 0$
On dit que k est l'ordre, ou la multiplicité du zéro a de f.

Ex22 : $\exp(z) := \sum \frac{z^n}{n!}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, de même que $\cos$, $\sin$.

II. Formule de Cauchy et conséquences.

1) La formule de Cauchy

[TauC] 67. 78

Def 23: On appelle chemin dans $\mathbb{C}$ toute application continue et C^1 par morceaux d'un segment $[a,b]$ vers $\mathbb{C}$, on notera $\operatorname{Im}\gamma := \gamma([a,b])$. On dira que γ est un lacet si : $\gamma(a)=\gamma(b)$.

Def 24: Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin et f continue sur $\operatorname{Im}\gamma$. On définit l'intégrale de f le long de γ par $\oint_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$.

Rq 25: Cette définition ne dépend pas de la paramétrisation de γ.

Prop 26: Si $\tilde\gamma$ est le chemin opposé à γ. Alors $\oint_{\tilde\gamma} f(z)\,dz = -\oint_\gamma f(z)\,dz$. Plus généralement, si γ, δ sont deux chemins concaténables, alors $\oint_{\gamma\wedge\delta} f(z)\,dz = \oint_\gamma f(z)\,dz + \oint_\delta f(z)\,dz$.

Théo 27: Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet et $U = \mathbb{C}\setminus \operatorname{Im}\gamma$. Pour $z \in U$, on pose

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt.$$

L'application $z \mapsto \operatorname{ind}_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur ses composantes connexes, et nulle sur la composante connexe non bornée de U.

Prop 28: Si $\gamma = C(a,r)$ est un cercle paramétré dans le sens direct, alors $\operatorname{ind}_\gamma(z) = 0$ ou 1 selon si $|z-a|>r$ ou $|z-a|<r$.

Théo 29 (lemme de Goursat) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $a \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue et holomorphe sur $\Omega\setminus\{a\}$. Pour tout triangle $\Delta \subseteq U$, on a $\oint_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Théo 30 (Cauchy). Avec les notations précédentes, si Ω est convexe. Alors pour tout lacet γ dans Ω, on a $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Théo 31 (Formule de Cauchy) Soit γ un lacet de Ω convexe, $a \in \Omega\setminus\operatorname{Im}\gamma$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on a

$$\operatorname{ind}_\gamma(a)\, f(a) = \frac{1}{2i\pi}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

Théo 32: Soit $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on a
- f est analytique sur Ω, le rayon de convergence de la série de Taylor de f au point a est au moins égal à $d(a, \mathbb{C}\setminus\Omega)$.
- Si Ω est convexe et si γ est un lacet dans U tel que $a \notin \operatorname{Im}\gamma$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(a)\,\operatorname{ind}_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

Rq 33: Tous les résultats de la partie I.3 s'appliquent aux fonctions holomorphes.

Cor 34: Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable.

[AM] 85

Cor 35: (Formule de la moyenne) Si f est holomorphe au voisinage d'un disque $\bar{D}(z_0,r)$, alors pour $n \geq 0$, on a

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{r^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta.$$

En part., $f(z_0)$ est égal à la valeur moyenne de f sur le bord du disque $D(z_0,r)$.

2) Inégalité de Cauchy et conséquences.

[AM] 88 91

Théo 36: (Inégalités de Cauchy) Soit $R>0$ et $f \in \mathcal{H}(D(z_0,R))$, pour tout $r<R$ et $n \geq 0$, on a

$$\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{\sup\{|f(t)| \mid |t-z_0|=r\}}{r^n}$$

De plus, si l'inégalité a lieu pour un $n_0 \in \mathbb{N}$, et $r<R$, alors f est de la forme $z \mapsto \lambda(z-z_0)^{n_0}$ où λ est une constante.

Théo 37 (Weierstrass) Si (f_n) est une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ convergeant uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction f. Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et (f_n') converge uniformément vers f' sur les compacts de Ω.

Ex 38: La fonction $\zeta : z \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^z}$ est holomorphe sur le demi plan $\{z \mid \operatorname{Re}(z)>1\}$.

[TauC] 85.

Cor 39: (Liouville) Toute fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ bornée est constante

Cor 40 (D'Alembert Gauss) Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

[AM] 92 95

Théo 41 (Montel). Soit (f_n) une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$, uniformément bornée sur tout compact de Ω. Alors on peut extraire de (f_n) une sous suite qui converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$.

Théo 42 (Holomorphie sous intégrale) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $F : \Omega\times X \to \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes

(i) $\forall z \in \Omega$, $F(z,\cdot) : X \to \mathbb{C}$ est mesurable

(ii) $\forall x \in X$, $F(\cdot,x) : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur Ω.

(iii) $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists u_K \in L^1(X,\mu)$ telle que $|F(z,x)| \leq u_K(x)$ sur $\Omega\times X$.

Alors la formule $z \mapsto \int_X F(z,x)\,dx$ définit une fonction holomorphe sur Ω. dont les dérivées s'obtiennent par dérivation sous intégrale.

[CMB]

Appli 43: La formule $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$ définit une fonction holomorphe sur $\{\operatorname{Re} z>0\}$.

Appli 44: L'espace de Bergman $L^2(\mathbb{D})\cap\mathcal{H}(\mathbb{D})$ est un sous espace de Hilbert de $L^2(\mathbb{D})$, dont une base hilbertienne est donnée par $\left(\sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\, z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. DVP

3) Principe du maximum

Def 45: Soit f continue sur Ω. On dit que f vérifie la propriété de la moyenne dans Ω si, pour tout disque $D(a,r)$ inclus dans Ω, on a $f(a) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt$.

Rq 46: le cor 35 donne que les fonctions holomorphes vérifient la propriété de la moyenne

Théo 47: Si $f \in C(\Omega)$ vérifie la propriété de la moyenne dans Ω et $a \in \Omega$ est un maximum relatif de $|f|$, alors f est localement constante. En particulier si Ω est connexe, f est constante.

[TauC] **Théo 48** (Lemme de Schwarz) Si $f\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ vérifie $f(0)=0$ et $|f(z)|<1$ $\forall z\in\mathbb{D}$. On a (i) $|f(z)|\le|z|$ sur $\mathbb{D}$. (ii) $|f'(0)|\le 1$. De plus, si on a égalité dans l'un ou l'autre de ces cas, alors il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $f(z)=\lambda z$ sur $\mathbb{D}$.

Déf 49: On dit que Ω et Ω' sont isomorphes s'il existe $f\in\mathcal{H}(\Omega)$, $g\in\mathcal{H}(\Omega')$ respectivement à valeurs dans Ω' et Ω telles que $f\circ g=Id_{\Omega'}$, $g\circ f=Id_{\Omega}$.

Prop 50: Les ouverts $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$ sont homéomorphes mais non isomorphes.

Prop 51: Les automorphismes du disque unité sont les applications de la forme $z\mapsto\lambda\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ avec $|\lambda|=1$ et $a\in\mathbb{D}$.

III. Fonctions méromorphes.

1) Singularités, méromorphie, séries de Laurent.

[TauC] **Déf 52**: Soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorphe sur $\Omega\setminus\{a\}$ pour un $a\in\mathbb{C}$, on dit que f admet une singularité isolée en a.

98.101 **Prop 53**: Si f admet une singularité isolée en $a\in\Omega$, et s'il existe $r>0$ tel que f soit bornée sur $(\Omega\cap D(a,r))\setminus\{a\}$. Alors f admet un prolongement holomorphe sur Ω. On dit que a est une singularité enlevable.

Théo 54: Soit $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$, f vérifie une et une seule des propriétés suivantes.

(i) f admet une singularité enlevable en a.

(ii) Il existe une unique suite finie $(a_1\dots a_m)$ avec $a_{-m}\neq0$, $m\geq1$ telle que la fonction

$$z\mapsto f(z)-\sum_{k=1}^{m}(z-a)^{-k}a_{-k}$$

est une singularité enlevable en a. On dit que a est un pôle d'ordre m de f.

(iii) Pour tout $r>0$ tel que $D(a,r)\subseteq\Omega$, $f(D(a,r)\setminus\{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$, on dit alors que a est une singularité essentielle de f en a.

Ex 55: $\frac{e^z-1}{z}$, $\frac{1}{z^m}$, $e^{-\frac{1}{z}}$ admettent respectivement en 0 une singularité enlevable, un pôle d'ordre m, et une singularité essentielle.

Déf 56: Une fonction $f:\Omega\to\mathbb{C}$ est dite méromorphe s'il existe $A\subseteq\Omega$ localement finie telle que $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus A)$ et f admet des pôles en tout point de A. On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes dans Ω.

Prop 57: Le quotient de deux fonctions holomorphes (non nulles) de Ω est une fonction méromorphe.

Théo 58: Toute fonction $f\in\mathcal{M}(\Omega)$ s'écrit comme un quotient de fonctions holomorphes. $\mathcal{M}(\Omega)$ est le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathcal{H}(\Omega)$.

Déf 59: Soit $a\in\mathbb{C}$, $r,R\in\mathbb{R}_+$, on note $C(a,r,R)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-a|\in]r,R[\}$ la couronne centrée en a de rayons r,R.

Prop 60: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite telle que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum a_{-n}z^n$ aient respectivement pour rayon de convergence R et $\frac{1}{r}$. Alors la série de Laurent

$$z\mapsto\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-a)^n$$

définit une fonction holomorphe sur $C(a,r,R)$.

Théo 61: Si $f\in\mathcal{H}(C(a,r,R))$ alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$\forall z\in C(a,r,R),\quad f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-a)^n.$$

On appelle cette série le développement de f en série de Laurent sur $C(a,r,R)$. Si $r<\rho<R$, et γ paramétrise le cercle $C(a,\rho)$ dans le sens direct, alors

$$a_n=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi}f(a+\rho e^{it})e^{-int}dt.$$

On appelle a_{-1} le résidu de f en a, noté $\mathrm{Res}(f,a)$.

Théo 62: Soit $f\in\mathcal{M}(\Omega)$ possédant un pôle d'ordre au plus m en a et $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ qui prolonge $(z-a)^m f$. Alors $\mathrm{Res}(f,a)=((m-1)!)^{-1}g^{(m-1)}(a)$.

2) Théorème des Résidus.

Théo 63 (Résidus) Soit $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ un ouvert convexe, $\{a_1\dots a_m\}$ des points de Ω, $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\{a_i\})$, γ un lacet de Ω avec $\mathrm{im}\,\gamma\cap\{a_i\}=\emptyset$. Alors

$$\oint_\gamma f(z)dz=2i\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{ind}_\gamma(a_k)\,\mathrm{Res}(f,a_k).$$

Appli 64: Calcul de $\int_{0^+}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

- Calcul de la transformée de Fourier de $\xi\mapsto(1+\xi^2)^{-1}$: $x\mapsto\pi e^{-|x|}$.
- Calcul de $\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{3}$

Appli 65: Intégrale de Gauss : $\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

DVP