243 Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications

Refs : [Gou2] Gourdon Analyse [TauC] Tauvel. Analyse complexe L3.
[CMB] Chambert Mbekhta Queffelec. [FGN] Oraux X-ens
[Hau] Hauchecorne, les contrexemples.

Devlp :
37 Bergman
39,4,1 (Abel Tauber)
45 Nb de Bell.

I. Définitions et premières propriétés.

1) Séries entières, rayon de convergence.

Def 1 : On appelle série entière (de la variable complexe) toute série de fonctions $\sum f_n$, avec $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On dit que a_n est le n-ème coefficient de la série, et que a_0 est son terme constant, on notera $\sum a_n z^n$ les séries entières en général.

Rq 2 : On pourra de même considérer des séries entières de la variable réelle, notées par convention $\sum a_n x^n$.

Prop 3 (Lemme d'Abel)
Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$, si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors
- La série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente sur le disque ouvert $D(0,|z_0|)$.
- La série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur tout disque fermé $\overline{D}(0,r)$ où $r < |z_0|$.

Def 4 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tel que
(a) La série $\sum a_n z^n$ converge absolument sur $D(0,R)$.
(b) La série $\sum a_n z^n$ diverge en tout point de $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,R)}$.

On dit alors que R est le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$, $D(0,R)$ son disque de convergence, et que $C(0,R)$ est le cercle de convergence.

Rq 5 : On ne connait pas a priori le comportement de la série sur son cercle de convergence.

2) Calcul pratique du rayon de convergence.

Dans la suite, on applique les conventions classiques $\infty^{-1} = 0$ et $0^{-1} = \infty$.

Prop 6 : (Règle de d'Alembert) Si la suite $(a_{n+1}/a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et converge vers $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Alors la série $\sum a_n z^n$ admet $R = 1/\lambda$ comme rayon de convergence.

Prop 7 (Règle de Cauchy) Si la suite $(|a_n|^{1/n})$ converge vers $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = 1/\lambda$.

Ex 8 : La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum n^\alpha z^n$ a 1 pour rayon de convergence.

Ces deux critères sont souvent inaccessibles en pratique ; par exemple inutilisables sur $\sum z^{2n}$.

Théo 9 : (Formule de Hadamard) Le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est donné par
$$R = \left(\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}\right)^{-1}.$$

Ex 10 Sur l'exemple précédent, on obtient immédiatement un rayon de convergence égal à 1.

Prop 11 : Si (a_n) et (b_n) sont deux suites équivalentes, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.

3) Opérations sur les séries entières.

On considère ici deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs ρ_1 et ρ_2.

Def-prop 12 La série entière $\sum c_n z^n$ donnée par $c_n = a_n + b_n$ est appelée série somme de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, son rayon de convergence est supérieur à $\inf(\rho_1, \rho_2)$, et sur $D(0, \inf(\rho_1,\rho_2))$, on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

Def-prop 13 : La série entière $\sum d_n z^n$ donnée par $d_n = \sum_{i=0}^{n} b_{n-i} a_i$ est appelée série produit de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, son rayon de convergence est supérieur à $\inf(\rho_1,\rho_2)$ et sur $D(0,\inf(\rho_1,\rho_2))$, on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$$

Rq 14 L'ensemble des séries entières de rayon de convergence non nul forme une $\mathbb{C}$-algèbre.

[Gou2] 236, 237 [TauC] 35, 37

II Propriétés de la somme dans le disque de convergence

[TanC] 38

Déf 15 On appelle somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (définie là où la série converge).

1) Régularité, intégrabilité.

Théo 16 : La somme d'une série entière est une fonction continue sur son disque de convergence.

Cor 17 : Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, f sa somme, et $p \in \mathbb{N}$. On a $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p + o(z^p)$ autour de 0.

Prop 18 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, alors sa somme est localement intégrable sur $D(0,R)$ son disque de convergence.

[TanC] 39

Prop 19 : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle, de rayon de convergence $R>0$. Les primitives de sa somme f sur $]-R,R[$ sont données par $t \mapsto k + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}$ $(k \in \mathbb{R})$. et ceci est bien défini sur $]-R,R[$

Ex 20 : Cette proposition permet d'écrire les fonctions $t \mapsto \arctan t$, $t \mapsto \ln(1 \pm t)$ comme des séries entières sur $]-1,1[$.

Déf 21 : On appelle série dérivée de la série $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$

Prop 22 : Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.

Théo 23 : Une série entière est holomorphe sur son disque de convergence, et sa dérivée est la somme de sa série dérivée.

Cor 24 : Dans son disque de convergence, une série entière est indéfiniment dérivable. On a de plus $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ si f est la somme de la série $\sum a_n z^n$.

Ex 24 : La série exp satisfait l'équation différentielle $f'(z) = f(z)$ sur $\mathbb{C}$.

2) Fonctions analytiques.

[TanC] 40

Déf 25 : Soit f à val dans $\mathbb{C}$ et définie sur un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$, on dit que f est développable en série entière (DSE) au point z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul et un voisinage V de z_0 dans $\mathbb{C}$ sur lequel $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

On dit que f est analytique sur un ouvert Ω si elle est DSE en tout point de Ω

Rq 26 Si f est DSE au point $z_0 \in \mathbb{C}$, elle est holomorphe (et C^∞) au voisinage de z_0, mais la réciproque est fausse (cf exemple)

[TanC] 40

Déf 27 : Soit f définie et holomorphe sur un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle série de Taylor MacLaurin en z_0 de f la série entière $\sum f^{(n)}(z_0)/n! \, z^n$.

Théo 28 : Si f est DSE en $z_0 \in \mathbb{C}$ ssi son DSE au voisinage de z_0 est donné par sa série de Taylor MacLaurin.

Cor 29 : Si le DSE en un point existe, il est unique. Les fonctions DSE en un point z_0 fixé forment une $\mathbb{C}$ algèbre stable par dérivation.

Ex 30 : $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ n'est pas DSE en 0 (pas holom) : toutes ses dérivées en 0 sont nulles.

Prop 31 : La somme d'une série entière est analytique sur son disque de convergence. (le rayon de cv en $z_0 \in D(0,R)$ est $d(z_0, D(0,R)^c)$)

[Gou2] 239 240

Théo 32 : Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, alors f est analytique en tout point de Ω.

Théo 33 (Zéros isolés) Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rdc >0, f sa somme. Si f s'annule sur une suite de points tendants vers 0, alors $f \equiv 0$ et $a_n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Cor 34 : Deux fonctions analytiques qui coïncident sur une suite convergente sont égales.

Théo 35 : (Formule de Cauchy) Si $\sum a_n z^n$ est une série entière, de rayon de convergence $R>0$ et f sa somme. Alors $\forall r \in]0,R[, n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$.

Théo 36 (Égalité de Parseval) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R>0$, et f sa somme. Pour tout $r \in]0,R[$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$.

[CMB]

Appli 37 : (Espace de Bergman) L'espace $B(D) = \mathcal{H}(D) \cap L^2(D)$ est un sous-espace de Hilbert de $L^2(D)$. Dont une base hilbertienne est donnée par $z^n \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$. DVP

Appli 38 (Liouville) Toute fonction analytique sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante.

III Comportement au bord du disque de convergence

[Han] 261

On a vu que le comportement sur le cercle de convergence est imprévisible :

- $\sum z^n$ - $\sum \frac{z^n}{n^2}$ - $\sum \frac{z^n}{n}$

Ces trois séries entières ont 1 pour rayon de convergence pourtant on a respectivement

- divergence sur tout le cercle
- Convergence sur tout le cercle
- Convergence sur certains points du disque.

[FGN1] 14

Théo 39 (Abel angulaire)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$, et telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur le disque $\mathbb{D}(0,1)$. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 1, \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$$

Alors $\displaystyle\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (Cf Fig 1). DVP

Ex 40 : Ce dernier théorème ne s'applique pas à $\sum (-1)^n z^n$.

Théo 41 : (Taubérien Faible)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f sa somme sur le disque $\mathbb{D}(0,1)$. On suppose que la limite $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = S$ existe. Si $a_n = o(1/n)$, alors $\sum a_n$ converge vers S.

Ex 42 : Pour tout $\alpha \in [-\pi, 0[$, la fonction $\ln$ (sur $\mathbb{R}$) se prolonge analytiquement à $\mathbb{C} \setminus \{ re^{i\alpha}, r \geq 0 \}$ par $\ln_\alpha(z) = \ln|z| + i\theta$. Mais pas à $\mathbb{C}$ tout entier.

IV Applications des séries entières.

1) Calculs de sommes de séries numériques, problèmes de dénombrements

On peut voir une série numérique comme une série entière évaluée en un certain point.

Ex 43 : $b = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, pose $B = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{n} = \frac{1}{z} \sum \frac{z^n}{n}$ primitive de $\sum z^n$ dont la somme est $\frac{1}{1-z}$ sur $\mathbb{D}$. D'où $b = B(-1) = \ln(2)$.

Ex 44 : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

On peut aussi utiliser les séries entières pour des problèmes de dénombrements

Ex 45 : Le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ est

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \quad \text{(nombre de Bell)}$$

DVP

2) Résolution d'équations différentielles.

Dans une équation différentielle à coefficients polynomiaux, il peut être utile de voir si certaines solutions sont DSE au voisinage de 0.

Ex 46 : Chercher les solutions particulières de

$$y'' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0. \qquad (E)$$

Soit $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$, la somme de cette série est solution de (E) sur $]-R, R[\setminus \{0\}$ ssi

$$x^2 y'' + (x^2 - 2) y = -2a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n-2)(n+1) a_n + a_{n-2} \right) x^n = 0$$

Par unicité du DSE, cette eq équivaut à

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 0 \\ (n-2)(n+1) a_n + a_{n-2} = 0 \quad n > 1 \end{cases}$$

On obtient diverses solutions, dont, pour $a_2 = \frac{-1}{3}$, $y_0(x) = \cos x - \frac{\sin x}{x}$.

Fig 1