241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Refs : [Amr] El Amrani Suites et séries numériques / de fonction.
[B-P] Briane Pagès, Théorie de l'intégration, cours et exercices.
[Gou] Gourdon, Analyse

Devts
67 68 (Abel Tauber)
62 (Fejér)
72 (Cholem)

Cadre : Par défaut, on considère $X \neq \emptyset$ un ensemble et $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie

I. Convergences.

1) Suites de fonctions

On fixe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X vers E

[Amr] 139 – 142

Def 1 : On dit que la suite (f_n) converge simplement sur X (vers $f : X \to E$) si pour tout $x \in X$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. Autrement dit $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$.
On notera $(f_n) \xrightarrow{CS} (f)$.

Rq 2 : L'unicité de la limite simple découle de l'unicité de la limite des suites numériques.

Ex 3 : La suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $f = \mathbb{1}_{\{1\}}$. En particulier la convergence simple ne préserve pas la régularité.

Def 4 : On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers $f : X \to E$ si la suite $\|f - f_n\|_\infty = \sup_{x\in X}\|f_n(x) - f(x)\|$ tend vers 0. Autrement dit
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Rightarrow (\forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon)$.
On notera $(f_n) \xrightarrow{CU} f$.

Rq 5 : Là aussi la limite est unique, en effet la convergence uniforme entraîne la convergence simple : En pratique, on pourra étudier l'existence d'une limite simple puis chercher à déterminer ensuite la nature de la convergence (uniforme ou simple).

Ex 6 : La convergence simple n'entraîne pas la convergence uniforme : la suite (f_n) de l'exemple 3 ne converge pas uniformément.

Ex 7 : Considérons $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$. Pour x fixé, la suite $f_n(x)$ converge vers 0, donc $f_n \xrightarrow{CS} 0$. Or, pour $n \geq 1$, on a $f\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{1+\pi^2/4} \not\to 0$. Donc on n'a pas convergence uniforme.
Cette méthode n'est utile que si l'on sait trouver une limite simple à notre suite de fonctions, dans le cas contraire, on utilise le critère suivant :

[Amr] 142

Théo 8 (Critère de Cauchy uniforme) La suite (f_n) converge uniformément si et seulement si elle est uniformément de Cauchy, autrement dit si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \text{ et } p > 0 \Rightarrow \forall x \in X \|f_n(x) - f_{n+p}(x)\| < \varepsilon.$$
$$\Leftrightarrow \|f_n - f_{n+p}\|_\infty < \varepsilon.$$

Rq 9 : Le caractère suffisant de la condition dépend de la complétude de l'espace d'arrivée.

[Amr] 185

Appli 10 : Sur $\mathbb{R}$, la limite uniforme d'une suite de polynômes est aussi un polynôme.

Théo 11 (Weierstrass) Les fonctions continues $[a,b] \to \mathbb{R}$ sont limites uniformes de fonctions polynomiales sur $[a,b]$.

2) Séries de fonctions

[Amr] 189 – 191

Def 12 : On appelle série des fonctions f_n, notée $\sum f_n$, la suite (S_n) (dite des sommes partielles) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement (vers $f : X \to E$) si la suite (S_n) converge simplement, on note alors $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

Ex 13 : Si $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est définie par $f_n(x) = xe^{-nx}$. Alors la série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1-e^{-x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Rq 14 : Si $\sum f_n$ converge simplement, alors la suite (f_n) converge simplement vers 0.

Def 15 : La série $\sum f_n$ converge uniformément si la suite (S_n) converge uniformément sur X.

Prop 16 : Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur X.

Ex 17 : La réciproque de ce résultat est fausse : la suite $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ pour $x > 1$ converge uniformément vers 0 mais la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément.

Prop 18 : Soit $\sum f_n$ série simplement convergente vers f, elle converge uniformément si et seulement si $(f - S_n)$ converge uniformément vers 0.

Appli 19 : La série associée aux fonctions $f_n(x) = xe^{-nx}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

[Amr] 192 194

Dans le cas des séries de fonctions, le critère de Cauchy uniforme se reformule en :

Théo 20 : La série $\sum f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N, p > 0 \Rightarrow (\|f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in X)$

Def 21 : On dit que la série $\sum f_n$ converge absolument si, pour tout $x \in X$, la série réelle $\sum \|f_n(x)\|$ converge.

Prop 22 : La convergence absolue entraîne la convergence simple.

Ex 23 : Si $f_n(x) := (-1)^n / n^x$, la série $\sum f_n$ converge absolument sur $]1, +\infty[$.

Def 24 : On dit que $\sum f_n$ converge normalement si : f_n est bornée sur X pour tout n et si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Ex 25 : La série $\sum x e^{-nx}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$.

Théo 26 : La convergence normale entraîne la convergence absolue et uniforme.

Ex 27 : La réciproque est fausse : $f_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[}$ converge absolument et uniformément, sans converger normalement sur $[0,1]$.

3) Liens avec la continuité.

[Amr] 145 148.

Théo 28 : Si X est une partie d'un espace vectoriel normé F de dimension finie, et si les fonctions f_n sont toutes continues en $a \in X$ et si : $(f_n) \xrightarrow{CU} f$. Alors f est continue en a.

Cor 29 : La limite uniforme préserve la continuité.

Rq 30 : On a vu dans l'exemple 3 que la continuité n'est pas préservée par limite simple.

Théo 31 (Double limite). Avec les notations du théorème 28. Si $a \in \overline{X}$ est telque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \lim_{x \to a} f_n(x)$ existe. Alors la suite (b_n) a une limite b avec

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f(x) = b.$$

Rq 32 : Tous ces résultats s'adaptent immédiatement au cas des séries de fonctions convergeant uniformément.

Ex 33 : $x \mapsto \exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Théo 34 (Dini) Soit (f_n) une suite de fonctions $[a,b] \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si l'une des conditions suivantes est réalisée [Amr] 178

- (f_n) est une suite croissante
- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction croissante

Alors la convergence est uniforme.

II. Dérivation et intégration.

1) Dérivabilité.

Ici, $X = I \subset \mathbb{R}$ désigne un intervalle. [Am] 148 150

Théo 35 Si (f_n) converge simplement vers $f : I \to E$ et si f_n est dérivable sur I. Il suffit pour que f soit dérivable sur I d'avoir convergence uniforme de la suite (f_n').

Ex 36 : Considérons $f_n(x) = (x^2 + \frac{1}{n^2})^{1/2}$ définie sur $\mathbb{R}$. On a $(f_n) \xrightarrow{CS} f$ la valeur absolue : on perd la dérivabilité en 0.

Théo 37. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I. Si $\sum f_n$ converge simplement et $\sum f_n'$ converge uniformément. Alors $f = \sum f_n$ est dérivable avec $f' = \sum f_n'$. [Amr] 198.

Rq 38 : On peut itérer le résultat précédent pour une plus grande régularité.

Ex 39 : La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Convergence dans un espace mesuré

On fixe $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. [BP] 163

Def 40 : Soit $(f_n) : X \to E$ une suite de fonction, on dit que (f_n) converge μ-presque partout (μ-pp) vers $f : X \to E$ si il existe $N \in \mathcal{A}$ telque $\mu(N) = 0$ et f_n converge simplement vers f sur $X \setminus N$.

Def 41 : On dit que (f_n) converge vers f dans L^p si la suite $(\|f_n - f\|_p)$ est de limite nulle.

Ex 42 : Si $(X, \mathcal{A}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, On pose, pour $n \geq 0$, $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$, $f_{2^n + k} = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}$. Ceci définit bien une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\|f_n\|_p = 2^{-\frac{n}{p}} \to 0$ et (f_n) ne convergeant pas μ-presque sûrement. (On verra une réciproque partiellement vraie par le théorème de convergence dominée).

Prop 43 : Soit $(f_n) \in (L^p(\mu))^{\mathbb{N}}$ et $f \in L^p(\mu)$. Si $(f_n) \xrightarrow{L^p} f$, alors on peut extraire de (f_n) une sous suite convergeant presque partout.

Ex 44 : Pour la suite (f_n) de l'exemple 42, la suite (f_{2^n}) convient.

3) Interversions limites et intégrales

Théo 45 (Convergence monotone, Beppo-Levi) Si (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$ (en posant f est mesurable) [BP] 131

[BP] 132-134

Appli 46 $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

Théo 47 (Lemme de Fatou). Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables positives. Alors $0 \le \int_X \underline{\lim}\, f_n \,d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n \,d\mu \le \infty$.

Appli 48 Si (f_n) est une suite de fonctions intégrables convergeant simplement vers f avec $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^1} < \infty$, alors $f \in L^1(\mu)$.

Théo 49 : (Convergence dominée). Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\mu)$ telle que. - f_n converge μ-pp vers une fonction f. - $\exists g \in L^1(\mu) \mid |f_n(x)| \le g(x)\ \forall x\ \mu pp,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Alors $f \in L^1(\mu)$ et $(f_n) \to f$ dans L^1.

Ex 50 : $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx = 0$.

4) Interversion somme intégrale.

Théo 51 : Si $f_n : [a,b] \to E$ intégrable, et $\sum f_n$ CU sur $[a,b]$, alors la somme S est intégrable avec $\int_a^b S = \sum \int_a^b f_n$.

Ex 52 : $\int_0^1 x^x\,dx = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$.

Théo 52 : Si $f_n : X \to E$ est intégrable, et $\sum f_n$ CAbs, alors même conclusion que pour Théo 51.

III. Séries entières.

[Amr] 229 231

Déf 53 : On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$. La suite (a_n) est celle des coefficients de la série.

Lemme 54 (Abel). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée. Alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente sur $D(0,|z_0|)$.

Prop 55 : $\exists !\, R \in \overline{\mathbb{R}_+}$ telle que
- Si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ CVabs
- Si $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ dvg.

On dit que R est le rayon de convergence de la série.

Rq 56 : Ceci ne nous dit rien du comportement sur le bord du disque $D(0,R)$.
$\sum z^n$ diverge partout $\sum \frac{z^n}{n^2}$ cvg partout $\sum \frac{z^n}{n}$ CV partout sauf 1.

On peut néanmoins dire des choses avec les résultats suivants.

[Gou Z]

Théo 57 (Abel angulaire) Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1, $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Si $\sum a_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, alors en posant
$$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \exists \rho \le 1, \theta \in]-\theta_0, \theta_0[\text{ avec } z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$$
on obtient $\lim_{z\to 1,\, z\in\Delta_{\theta_0}} \sum a_n z^n = \ell$. (voir fig 1).

DVP

[Gou Z]

Théo 58 : (Taubérien faible) Avec les notations précédentes, si $\exists S \in \mathbb{C} \mid \lim_{x\to 1,\, x<1} \sum a_n x^n = S$ et $a_n = o(\frac{1}{n})$, alors $\sum a_n$ converge vers S.

DVP

IV Séries de Fourier.

[Amr] 299 310

Déf 59 : On appelle série trigonométrique une série de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ avec $e_n : t \mapsto e^{int}$. On pose $CM_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on définit les coefficients de Fourier de f comme $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,\overline{e_n}\,dt$.

Déf 60 : On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique $\sum c_n(f) e_n$. et $S_N = \sum_{-N}^{N} c_n(f) e_n$ la N-ème somme partielle.

Prop 61 : (Riemann Lebesgue). Si $|n| \to \infty$, alors $|c_n(f)| \to 0$.

Théo 62 (Féjer) Si f est continue et 2π-périodique. Alors la suite S_N converge vers f en moyenne de Césaro.

DVP

Théo 63 (Dirichlet) Si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et C^1 par morceaux sur $[0,2\pi]$. Alors S_N converge simplement vers la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))$.

Théo 64 (Parseval). Si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $\sum |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt$.

Appli 65 $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

[Gou Z] 273

Appli 70 (Formule de Poisson) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 avec $f = O(\frac{1}{x^2}) = f'$ quand $|x| \to \infty$. Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$ où $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi \xi t}\,dt$

Cor 71 : $\forall s > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$

Appli 72 (Eq de la chaleur). Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. L'équation différentielle $\partial_t u - (\partial_x)^2 u = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ admet une unique solution f de classe C^2 telle que $f(t,\cdot) \to u_0$ dans $L^2(\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z})$.

DVP