239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Réfs : [ZQ] Zuily Queffélec. Analyse pour l'agrégation. [Han] Hauchecorne, Les contre-exemples en math. [BP] Briane Pagès, Théorie de l'intégration, cours et exercices. [EP Am] El Amrani, Suites et séries de fonctions. [OA] Objectif agrégation. [BL] Barbe Ledoux, Probabilité.

Dev : (1.4) $F^\circ\Gamma$ sur $\mathbb{C}$ (3.8) Chaleur cercle (4.7) Polynômes orthogonaux.

Cadre : On considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (E, d) un espace métrique. Pour $f : E \times X \to \mathbb{C}$, on étudie $F : E \to \mathbb{C}$ qui à t associe $\int_X f(t,x)\,d\mu(x)$.

I. Étude de la régularité.

1) Continuité.

[ZQ] 306 307

Théo 1 : On suppose que
(a) $\forall t \in E$, la fonction $f_t : x \mapsto f(t,x)$ est mesurable
(b) Pour presque tout $x \in X$, la fonction $f_x : t \mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in E$
(c) $\exists g \in L^1(X)$ positive telle que $\forall t \in E$, $|f_t| \leq g$ presque partout sur X.
Alors la fonction F est continue en t_0.

Cor 2 : Avec les notations précédentes, on peut remplacer (b) par
(b') pour presque tout $x \in X$, f_x est continue sur E et (c) par
(c') Pour tout compact K de E, il existe $g_K \in L^1(X)$ positive telle que $\forall t \in K$, $|f_t| \leq g$ presque partout sur X.

312 **Ex 3 :** On pose, pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}_+^*} t^{x-1} e^{-t}\,dt$. La fonction Γ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

[Han] 224 **Ex 4 :** Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^2$ par $f(x,t) = x e^{-xt}$. La fonction F est bien définie mais pas continue en 0 : $F(0) = 0$ là où $F(x) = 1$ pour $x > 0$.

2) Dérivabilité.

On suppose $E = I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

[ZQ] 307

Théo 5 : On suppose que
(a) $\forall t \in E$, la fonction f_t est intégrable. (sur X)
(b) Pour presque tout $x \in X$, la fonction f_x est dérivable sur I (on notera alors $\partial_t f(t,x)$ sa dérivée)
(c) Pour tout $K \subseteq E$ compact, il existe $g_K \in L^1(X)$ positive telle que $|\partial_t f(t,x)| \leq g(x)$ $\forall t \in E$, $\forall x \in X$ tel que f_x est dérivable sur I.
Alors pour $t \in I$, la fonction $x \mapsto \partial_t f(x,t)$ est dans $L^1(X)$ et on a

$$F'(t) = \int_X \partial_t f(t,x)\,d\mu_x \quad \text{et } F \text{ est dérivable sur } I.$$

Rq 6 On peut remplacer 'dérivable sur I' par 'de classe C^1 sur I' dans le théorème précédent.

Appl 7 En prenant pour $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ la mesure de comptage, on retrouve des théorèmes de dérivabilité des séries de fonctions. On obtient en particulier que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ est une fonction de classe C^1.

[Han] 226

Ex 8 : Considérons $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(t,x) = t^2 e^{-|t|x}$. On a $\partial_t f(t,x) = (2 - x|t|)\,t\,e^{-x|t|}$. Donc f_x est C^1 sur $\mathbb{R}$, pourtant $F : t \mapsto |t|$ ne l'est pas.

On a un analogue du théorème 5 pour les dérivées d'ordre supérieur.

[ZQ] 307

Théo 9 : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que
(a) $\forall t \in E$, $f_t : x \mapsto f(t,x) \in L^1(X)$
(b) $\exists N \in \mathcal{A}$ négligeable tel que pour $x \notin N$, $f_x \in C^k(I)$ (on notera alors $(\partial_t)^j f$ ses dérivées successives pour $j \in [\![0,k]\!]$).
(c) $\forall j \in [\![1,k]\!]$, $K \subseteq E$ compact, $\exists g_{j,K} \in L^1(X)$ positive telle que $\forall t \in E$, $x \notin N$, $|(\partial_t)^j f(t,x)| \leq g_{j,K}(x)$.
Alors $\forall t \in E$, $j \in [\![1,k]\!]$ la fonction $x \mapsto (\partial_t)^j f(t,x)$ est dans $L^1(X)$. Et $F \in C^k(E)$ avec $F^{(j)}(t) = \int_X (\partial_t)^j f(t,x)\,d\mu_x$ pour $j \in [\![0,k]\!]$.

Rq 10 : On peut remplacer I par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans le théorème précédent. Il faut alors remplacer j par un multi-indice d'ordre inférieur à k.

Ex 11 : La fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Appl 12 : Une série entière est infiniment dérivable sur son disque de convergence.

3) Holomorphie.

Ici, $E = \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

[ZQ] 308

Théo 13 : On suppose que
(a) $\forall z \in \Omega$, f_z est mesurable
(b) $\exists N \in \mathcal{A}$ négligeable tel que $x \notin N \Rightarrow f_x$ est holomorphe sur Ω.
(c) $\forall K \subseteq \Omega$ compact $\exists g_K \in L^1(X)$ telle que $|f(z,x)| \leq |g(x)|$ pour $z \in K$, $x \notin N$.
Alors F est holomorphe sur Ω, avec

$$F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,d\mu_x.$$

Appli 14 Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, on a $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z$. DVP
Γ se prolonge alors en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Ex 15 : Soit $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ définie si $\mathrm{Re}(s) > 1$. Il s'agit d'une f° holomorphe

[ZQ] 309
Rq 16 : Dans le cas des intégrales semi-convergentes, on pourra souvent se ramener aux cas précédents par des intégrations par parties

II. Produit de convolution

1) Définitions & premières propriétés

[ZQ] 318 321 [BP] 259 269

Def 17 : Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mesurables, on pose quand ceci a un sens
$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy.$$
le produit de convolution de f et g au point x.

Rq 18 : Si f et g sont positives, $f * g$ est toujours défini à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Prop 19 : La convolution entre fonctions mesurables positives est commutative et associative.

Ex 20 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ positive, $f * 0 = 0$, $f * 1 = \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda$.

Prop 21 : Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact. Alors $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^n$, et la convolution est alors bilinéaire.

Théo 22 : Soient $p, q \in [1, \infty]$ exposants conjugués, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$
(a) Le produit $f * g(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f * g$ est en outre uniformément continue et bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$. Et $(f, g) \mapsto f * g$ est bilinéaire.
(b) Si $p \in]1, \infty[$, alors $\lim_{\|x\| \to \infty} f * g(x) = 0$.

Ex 23 : La convolution $f * 1$ fournit un contre-exemple au cas (b) pour $p, q = (1, \infty)$.

Cor 23 : Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ avec $r < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g$ est bien définie (presque partout) et $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$.

Théo 24 : Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ avec
$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k.$$

Théo 25 : $(L^1(\mathbb{R}^n), *)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative sans unité.

Rq 26 Au sens des distributions δ_0 donnera une unité pour la convolution.

2) Approximation de l'identité

[BP] 269 276

Def 27 Une suite $(\rho_n) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est dite approximation de l'identité si elle vérifie (i) $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n d\lambda = 1$ (ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_n| d\lambda < \infty$ (iii) $\forall \varepsilon > 0 \int_{\{|x| > \varepsilon\}} \rho_n d\lambda \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Rq 28 : Si les ρ_n sont positifs, la condition ii est superflue.

Ex 29 : Si $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho d\lambda = 1$, alors $\rho_n := n^d \rho(n \cdot)$ $(n \geq 1)$ donne une approximation de l'identité.

Rq 30 : Une approximation de l'identité converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Théo 31 : Soit (ρ_n) une approximation de l'identité, $p \in [1, \infty[$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ alors $f * \rho_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(f * \rho_n)$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Prop 32 Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et (ρ_n) une approximation de l'identité.
(a) Si f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $f * \rho_n(x_0) \to f(x_0)$ quand $n \to \infty$.
(b) Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, $f * \rho_n \to f$ dans L^∞.

Def 33 : Une approximation de l'identité (ρ_n) est dite suite régularisante si elle est formée de fonctions C^∞ à support compacts.

Théo 34 : L'ensemble $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions C^∞ à support compacts est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1, \infty[$.

Rq 35 : Il existe un résultat similaire concernant les distributions.

[El Am]

Ex 36 : On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, On pose $K_N = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ le noyau de Fejér. Il s'agit d'une identité approchée sur $\mathbb{T}$. Si f est continue et 2π-périodique, $(f * K_n)$ converge uniformément vers f.

Appl 37 : La famille des $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Appl 38 : Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, l'équation différentielle $\partial_t u - (\partial_x)^2 u = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}$ admet une unique solution f de classe C^2 telle que $f_t \to u_0$ quand $t \to 0^+$ dans $L^2(\mathbb{T})$. De la forme $f(x,t) = (u_0 * K_t)(x)$ où $K_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} e^{inx}$. DVP

III Transformées de Fourier et de Laplace.

1) Transformée de Fourier

[ZQ] 327 328.

Def 39 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on appelle transformée de Fourier de f la fonction, notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$. Définie pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ par $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi\rangle} dx$. où $\langle \cdot , \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$.

Fixons $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Prop 40 : La fonction $\hat{f}$ est continue, tend vers 0 à l'infini, et on a $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

Def 41 : On appelle classe de Schwartz l'espace fonctionnel suivant

$$S(\mathbb{R}^d) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall p, q \in \mathbb{N}^n, x^p f^{(q)}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \}.$$

Prop 42 : $S(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation et multiplication par des fonctions polynomiales. De plus $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset S(\mathbb{R}^d)$ qui est donc dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p < \infty$.

Théo 43 : La transformée de Fourier stabilise $S(\mathbb{R}^d)$.

Appl 44 : Extension de $\mathcal{F}$ à $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Prop 45 : Si $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$, avec $f, \partial_i f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}(\partial_i f) = -i\xi_i \hat{f}$

Inversement, si $x_i f, f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\partial_i \hat{f} = \widehat{-ix_i f}$

Théo 46 : La transformée de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R}^d)$, avec, quand $\hat{f} \in L^1$, $\hat{\hat{f}} = \frac{1}{(2\pi)^d} f$.

[DA] 60

Appl 47 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n \rho(x) dx < \infty$. On pose μ la mesure de densité ρ sur I. Il existe une famille (P_n) de polynômes orthogonaux dans $L^2(\mu)$ de degrés échelonnés. S'il existe $\alpha > 0$ | $e^{\alpha |x|} \in L^1(\mu)$, alors (P_n) est une base Hilbertienne de $L^2(\mu)$. DVP

Def 48 : Soit X un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on définit la fonction caractéristique de X par $\varphi_X(t) := E(e^{i\langle t, X\rangle}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x\rangle} d\mathbb{P}_X(x)$.

Rq 49 : Si $\mathbb{P}_X$ est à densité f, alors $\varphi_X(t) = \hat{f}(t)$.

Théo 50 : Si X et Y sont deux vecteurs aléatoires de loi respectives $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$, alors $\varphi_X = \varphi_Y \Rightarrow \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

[BL] 62 63

Ex 51 : Si $X = a$ presque sûrement, $\varphi_X(t) = e^{i\langle t, a\rangle}$.

Si $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}^d$, alors $\varphi_{MX+y}(t) = e^{i\langle t, y\rangle} \varphi_X({}^tMt)$.

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.

Prop 52 : Soit X une v.a.r, de fonction caractéristique φ et de loi $\mathbb{P}_X$.

(i) Si X admet des moments jusqu'à l'ordre n, alors φ est n fois dérivable, avec $\varphi^{(k)}(t) = i^k E(X^k e^{itX})$. En particulier $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$

(ii) Réciproquement, si n est pair, φ n fois dérivable en 0, alors X admet tout moment d'ordre $\leq n$.

2) Transformée de Laplace

[BL] 66 62

Def 53 : On appelle transformée de Laplace d'un vecteur aléatoire X la fonction $L_X : t \mapsto E(e^{\langle t, X\rangle})$ pour les valeurs de t pour lesquelles $e^{\langle t, X\rangle}$ est intégrable.

Ex 54 : $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow L_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $L_X(t) = \lambda(\lambda - t)^{-1}$ $t \in]-\infty, \lambda[$.

Théo 55 : Lorsqu'elle est définie dans un voisinage de 0, la transformée de Laplace caractérise la loi.

Prop 56 : Soit X une variable aléatoire réelle telle que e^{tX} est intégrable sur un intervalle ouvert de 0.

Alors L_X est définie sur un intervalle ouvert contenant 0, analytique sur un vois de 0 et $L_X(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} E(X^n)$ dans ce vois.

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_X^{(n)}(0) = E(X^n)$.