236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Refs : [Gou2] Gourdon, Analyse. [BP] Briane Pagès Théorie de l'intégration. [Tau] CT Tauvel Analyse complexe pour la L3. [Dem] Demailly, Analyse numérique et équations différentielles.

DeVt : Prolongement Γ C (8, 20) [ZQ].
Intégrale de Gauss résidus (39).

I. Méthodes internes.

1) Évaluation d'une primitive

[Gou2] 130 160

Théo 1 : Toute fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ admet des primitives, et pour toute primitive F de f, on a $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$.

Ex 2 : $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{A\to\infty} \mathrm{Arctan}\,A - \mathrm{Arctan}(-A) = \pi$.

Ex 3 : L'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ est finie si et seulement si $\alpha>1$.

Si $F\in\mathbb{R}(X)$ est une fraction rationnelle, on peut décomposer F en éléments simples pour se ramener à des calculs de la forme
$$\int_a^b \frac{dx}{(x-\alpha)^n} \quad\text{et}\quad \int_a^b \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+\gamma x+\delta)^n}dx \quad \gamma^2-4\delta<0$$

Ex 4 :
$$\int_0^x \frac{1-t}{(t^2+t+1)^2}dt = -\frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}dt + \frac{3}{2}\int_0^x \frac{dt}{\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}$$
$$= \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - 1 - \frac{2}{3}\mathrm{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Si $f(t)=\sin^m t\cos^n t$ où $n,m\in\mathbb{N}$, il y a deux cas :
- Si m ou n est impair de la forme $2p+1$, on a $f(t)=\sin^m(x)(1-\sin^2(x))^p\cos x$ et on fait un changement de variables
- Si m et n sont pairs, on peut linéariser $\cos^n x$ et $\sin^m(x)$

Ex 5 : $\cos^4(x) = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}$.

2) Intégration par partie.

Théo 6 : Si $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^1, alors
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Ex 7. Intégrales de Wallis :
$$I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx = \quad \sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Ex 8 : Fonction Gamma $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ donne $\Gamma(n+1)=n!$ et se prolonge à $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$.

3) Changement de variables

[BP] 239 248

Théo 9 (Changement de variables) Soit $\varphi:U\to V$ un C^1 difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Pour toute fonction borélienne $f:V\to\mathbb{R}$, f est intégrable sur V si et seulement si $f\circ\varphi$ est intégrable sur U. Et dans ce cas
$$\int_V f\,d\lambda = \int_U f\circ\varphi\times|J_\varphi|\,d\lambda.$$

Ex 10. Coordonnées polaires : $\varphi: \mathbb{R}^{+*}\times]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}^2\setminus 0$, $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$ de Jacobien r, donne par exemple l'intégrale de Gauss $\int e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

Ex 11. Si B_d désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$ pour la norme euclidienne. On pose $V_d=\lambda(B_d)$. On a $V_{d+2}=V_d\frac{2\pi}{d+2}$.
Ainsi, $V_d=\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(d/2)!}$ si d pair $V_d=\frac{2^d\pi^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d-1}{2}\right)!}{d!}$ si d impair.

[Gou2] 135

Cor 12 : Si $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^1 et $f:I\subseteq\mathbb{R}\to E$ une application continue par morceaux telle que $\varphi([a,b])\subseteq I$. Alors
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Ex 13 : Si $R\in\mathbb{R}(X,Y)$, on veut calculer une primitive de $R(\cos x,\sin x)$ on fait le changement de variable $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on intègre alors $R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}$.

4) Théorèmes de Fubini

[BP] 221

On considère X,Y deux boréliens de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement, $X\times Y\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ est lui aussi muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

Théo 14. (Fubini Tonelli) Si $f:X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable alors
- Les fonctions $x\mapsto\int_Y f(x,y)dy$ et $y\mapsto\int_X f(x,y)dx$ sont définies presque partout et mesurables. Et on a dans $\overline{\mathbb{R}}_+$
$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,dx\otimes y = \int_X\int_Y f(x,y)dydx = \int_Y\int_X f(x,y)dxdy.$$

Théo 15 : (Fubini Lebesgue). Si f est à présent mesurable et intégrable sur $X \times Y$, alors les deux fonctions précédentes sont intégrables et on a la même conclusion cette fois ci dans $\mathbb{R}$.

Ex 16 : On fait appel au théorème de Fubini dans l'exemple 10.

Ex 17 : Pour $f(z) = \sum f_n z^n \in \mathcal{H}(D(0,1))$, on a $\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 \frac{\pi}{n+1}$.

II Méthodes externes de calcul

1) Par les suites / séries de fonctions.

[BP] 130

Théo 18 : Soit $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ une suite croissante de fonctions mesurables positive, alors $\lim \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Théo 19 : Soit $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables telle que $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu) \,/\, |f_n| \leq g$, alors si (f_n) converge simplement vers f, $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$.

Appli 20 : Pour $x > 0$, on a $\Gamma(x) = \lim I_n(x)$ où $I_N(x) = \int_0^N t^{x-1}(1+\frac{t}{n})^N dt$.

Ainsi, $\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} (1+\frac{x}{k}) e^{-\frac{x}{k}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. DVP

Ex 21 : L'exemple 17 fait aussi appel à la convergence dominée.

Ex 22 : $\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$.

2) Somme de Riemann.

[Gou2] 124 125.

Def 23 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée, $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$, $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, la somme de Riemann définit la quantité $S(f,\sigma,\xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$.

Théo 24 : Pour $f \in CM([a,b])$. Il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un pas δ tel qu'une subdivision de $[a,b]$ de pas $< \delta$ donne une somme de Riemann ε-proche de $\int_a^b f(t) dt$.

En particulier $\lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t) dt$

Ex 25 : $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.

Appli 26 : La série de Fourier $\sum \frac{\sin nt}{n}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3) Intégrales à paramètres.

[BP]

On considère $f : X \times E \to \mathbb{R}$ où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est mesuré et (E, d) est métrique.

Théo 27 : Soit $t_0 \in E$, si on a
- $\forall t \in E$, $f(\cdot, t)$ est mesurable - $\forall x \in X$ pp, $f(x, \cdot)$ est continue en t_0
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu) \,/\, \forall t \in E$, $|f(x,t)| \leq g(x)$ x-pp. Alors $t \mapsto \int_X f(x,t) dt$ est continue en t_0.

Théo 28 : Dans la même situation, si
- $\forall t \in E$, $f(\cdot, t)$ est intégrable, - $\forall x \in X$ pp, $f(x, \cdot)$ est différentiable, avec $\frac{\partial f}{\partial t}$ [illegible].
- $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu) \,/\, \forall t \in E$, $|f(x,t) - f(x,t_0)| \leq g(x)|t - t_0|$. Alors $t \mapsto \int_X f(x,t) dt$ est dérivable en t_0 avec $F'(t) = \int_X \partial_t f(x,t) dt$

[Gou2]

Appli 29 : Pour $f \in S(\mathbb{R})$, on a $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^d)$.

Ex 30 : Soit $g : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$, on a $\hat{g}(x) = \sqrt{2\pi} g(x)$. Ceci entraîne le théorème d'inversion de Fourier.

Ex 31 : Pour $x \geq 0$ $\int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt = \arctan x$.

4) Théorème des résidus.

[Tau] 98 103

Def 32 : On appelle chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ une application continue C^1 par morceaux. Si $\gamma(0) = \gamma(1)$, on parle de lacet.

Pour $a \notin \gamma([0,1]) =: \mathrm{Im}\,\gamma$, on définit l'indice de γ en a par $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$. L'indice est un entier relatif, et $a \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(a)$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma([0,1])$.

Def 33 : Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ une fonction méromorphe sur un ouvert connexe et a un pôle d'ordre m de f. Au voisinage de a, f se décompose en série de Laurent. $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-a)^k$. On pose alors $\mathrm{Res}(f,a) = a_{-1}$ le résidu de f en a.

Ex 34 : Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$

Prop 35 : Si a est un pôle d'ordre m, on a $\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} ((z-a)^m f(z))^{(m-1)}$

[Tau4] 103

Théo 36 : (Résidus) Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est convexe, $a_1 \dots a_n$ des points distincts de Ω et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ telle que les a_i soient des pôles de f. Si γ est un lacet dans Ω dont l'image ne contient aucun des a_i, alors

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\,\mathrm{Res}(f, a_k).$$

Ex 37 : $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$

Ex 38 : La transformée de Fourier de $\frac{1}{1+\xi^2}$ est $\pi e^{-|x|}$

Ex 39 : On a $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ DVP

[AM] **Ex 40 : (Formule des compléments)** $\forall z \in \mathbb{C}$, $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, on a $\Gamma(z)\Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

ce qui permet en particulier de prolonger Γ à $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.

III. Calcul approché d'intégrales.

1) Méthodes de quadrature.

[Dem] 59

On se place dans $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathcal{Z} = \{\alpha < x_1 < \dots < x_{n-1} < \beta\}$ une subdivision de $[\alpha, \beta]$. Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on choisit l_i points ξ_{ij} et des poids ω_{ij} tels que $\sum_{j=0}^{l_i} \omega_{ij} = 1$, on approche alors $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$ par $\sum_{j=0}^{l_i} \omega_{ij} f(\xi_{ij})$. Et donc

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \sim \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=0}^{l_i} \omega_{ij} f(\xi_{ij})$$

Def 41 : On dit qu'une méthode de quadrature (élémentaire ou composée) est d'ordre n si elle est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ et pas sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Rq 42 : L'hypothèse $\sum_{j=0}^{l_i} \omega_{ij} = 1$ garantit l'exactitude à l'ordre 0.

Cas simple : $l_i = 0\ \forall i$: la seule liberté est le choix de ξ_i

- Si $\xi_i = x_i$, méthode des rectangles à droite
- Si $\xi_i = x_{i+1}$ méthodes des rectangles à gauche

$\Big\}$ ordre 0.

- Si $\xi_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$ méthode du point milieu — ordre 1

[Dem] 59

Méthode de Newton Cotes. Au rang l, on prend $l_i = l\ \forall i \in [\![1, n]\!]$, et les points ξ_{ij} sont choisis équidistants.

- $l=1$ méthode des trapèzes : $\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$ — ordre 1
- $l=2$ méthode de Simpson : $\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6}$ $\omega_1 = \frac{2}{3}$ — ordre 3

Prop 43 : Si l est pair, on a une méthode d'ordre $l+1$, si l est impair, on a une méthode d'ordre l.

Ex 44 : $\int_{-1}^1 e^{-x^2}dx \sim \frac{2}{3}e^{-1} + \frac{4}{3}$.

En pratique, le choix des points équidistants n'est pas toujours judicieux, on peut s'interroger sur le "meilleur" placement des points !

73

Prop 45 : Si $\omega :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ est une fonction poids, il existe un unique placement des points x_j et des coefficients λ_j pour que la méthode suivante soit d'ordre $2l+1$.

$$\int_\alpha^\beta f(x)\omega(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(x_j).$$

Ils sont dans $]\alpha, \beta[$ et donnés par les racines des polynômes orthogonaux de $L^2(\omega)$.

2) Méthode de Monte Carlo.

Les résultats de contrôle d'erreur sur les méthodes de quadrature font des hypothèses de régularité sur f. On veut être plus général.

Si f est une densité sur $\mathbb{R}^n$, on veut évaluer $I = \int f(x)g(x)\,dx$ ou $g \in L^1(f)$.

Si Y est une v.a.r de densité f, alors $I = \mathbb{E}(g(Y))$. Si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un échantillon de Y, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(Y_i) \longrightarrow I$ par la loi des grands nombres.

Mais cette méthode est peu efficace : elle converge lentement (TCL)

Appl 46 : Approximation de $\pi = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \sim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-Y_i^2}$ où Y suit $\mathcal{U}([0,1])$. Il reste en pratique à simuler convenablement des variables aléatoires.