235
Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Refs: [ElAm] El Amrani : Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions
[Gou2] Gourdon, Analyse [BP] Briane Pagès Théorie de l'intégration

Devs :
Abel-Tauber Gourdon 2 p252
Bergman Charles Mbekhta Queffélec p124
Chaleur disque Candelpergher p401

I Limites et séries, premiers problèmes d'interversion.

1) Interversion de limites et convergence uniforme.

[ElAm] 139 150

Déf 1 : On dit qu'une suite $(f_n) : X \to (E, \|.\|)$ converge uniformément vers $f : X \to (E \|.\|)$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \mid n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Rq 2 : C'est équivalent à avoir (f_n) uniformément de Cauchy si E complet.

Ex 3 : $(x \mapsto x^n)$ sur $[0,1]$ converge simplement mais pas uniformément.

Théo 4 : Soit $(E, \|.\|)$ un evn, F un evn de dim finie, $\emptyset \neq X \subseteq F$ et (f_n) une suite uniformément convergente d'applications $X \to E$. Si les f_n sont toutes continues en un point $a \in F$, alors la limite l'est également.

Rq 5 : L'exemple 3 anihile tout espoir d'avoir un résultat aussi fort pour la convergence simple.

Théo 5 (Double limite) Dans la situation du théorème 4, si $a \in \bar{X}$ est tel que $\forall n$, $b_n = \lim_{x \to a} f_n(x)$ existe, alors si E est complet, la suite b_n a une limite b et on a

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x) =: f(a) := \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Ex 6 : On pose $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $f_n \xrightarrow{CU} |.|$, or $f_n(x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$. donc la convergence uniforme ne préserve pas la dérivabilité.

Théo 7 : Soit $(E \|.\|)$ un evn, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et (f_n) une suite d'applications $I \to E$ qui converge simplement vers $f : I \to \mathbb{R}$ et dont la suite dérivée (f_n') CU sur I vers $g : I \to \mathbb{R}$. Alors f est dérivable et $f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x) = g(x)$.

Théo 8 : Si $f_n [a,b] \to E$ est une suite d'application de classe C^1, dont les dérivées f'_n convergent uniformément vers une fonction g et telle que $\exists x_0 \in [a,b] \mid (f_n(x_0))$ converge.
Alors (f_n) converge uniformément vers une fonction f de classe C^1 avec $f' = g$.

Rq 9 : Tous ces résultats se transposent au cas des séries de fonction qui convergent uniformément, en particulier normalement.

Ex 10 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ est telle que $\sum f^{(n)}$ converge uniformément vers 0, alors $f = 0$.

2) Séries entières.

[ElAm] 229 240

Prop déf 11 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, il existe un unique $R \in \overline{\mathbb{R}_+}$ tel que - $\sum a_n z^n$ sur $D(0,R)$ converge absolument - $\sum a_n z^n$ diverge hors de $\overline{D(0,R)}$

On l'appelle rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$, il est égal à $\sup \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ est bornée} \}$.

Ex 12 Les séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ $\sum z^n$ $\sum n! z^n$ ont respectivement $+\infty$, 1, et 0 comme rayon de convergence.

Prop 13 : La série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact inclus dans son disque de convergence.

Théo 14 : La somme d'une série entière est holomorphe dans son disque de convergence, sa dérivée est donnée par la série entière $\sum (n) a_n z^n$ de même rayon de convergence.

Rq 15 : Ceci n'indique rien du comportement au bord du disque : $\sum z^n$, $\sum \frac{1}{n} z^n$ $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ ont des comportements différents sur leurs cercles de convergence.

[Gou2] 253

Théo 16 (Abel angulaire) Si $\sum a_n z^n$ est de rayon de conv ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. Si f est sa somme sur D. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \exists \theta \in [0, \theta_0], \rho > 0 \mid z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$ cf fig 1

Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum a_n$.

DVP

Appli 17 : On a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}}' \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$$

[Gou2] 253

Théo 18 (Taubérien faible) Si $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence 1 et f sa somme sur D. Si $\exists S \in \mathbb{C} \mid \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = S$ et $a_n = o(\frac{1}{n})$ DVP

Alors $\sum a_n$ converge vers S.

II. Limites et intégrations.

1) Intégrales de suites et de séries de fonctions.

[El Am] 151

Théo 19 : Si (f_n) est une suite uniformément convergente de fonctions intégrables sur le segment $[a,b]$, à valeurs dans un Banach E. Alors la fonction limite f est intégrable, avec $\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

On a un analogue pour les séries.

Ex 20 : Comme $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n \geq 0} (-x^2)^n$, on a $\arctan(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

Ex 21 : $\lim (1-\frac{x}{n})^n = e^x$

Passons en à l'intégrale de Lebesgue, on fixe (X, A, μ) un espace mesuré.

[BP]

Théo 22 (Convergence monotone) Si (f_n) est une suite de fonctions $X \to \mathbb{R}$ mesurables positives, Alors $\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable, avec $\int_X \lim f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

Cor 23 : Le résultat s'applique aussi au cas d'une suite décroissante à la condition supplémentaire que le premier terme soit intégrable.

127 Ex 24 : On a $\int_0^\infty e^{(\alpha-1)x} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha<1 \\ +\infty & \alpha \geq 1 \end{cases}$

Lemme 25 (Fatou) Si (f_n) est une suite de fonctions $X \to \mathbb{R}$ mesurables positives, alors $0 \leq \int_X \underline{\lim}\, f_n(x)dx \leq \underline{\lim} \int f_n(x)dx \leq \infty$.

Appli 26 : Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ croissante, continue en 1 et 0, et dérivable presque partout (c'est une conséquence de la monotonie) alors $\int_0^1 f'(x)dx \leq f(1) - f(0)$.

Ex 27 : Cette inégalité peut être stricte, par exemple pour $f = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$, on trouve $0 < 1$.

[BP] 138 142

Théo 28 (Convergence dominée) Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1(\mu)$ vérifiant

(i) μ-presque partout, $f_n(x)$ converge quand $n \to \infty$

(ii) Il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ pp

Alors, il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que

(a) $f_n \to f$ μ pp et (b) $\lim_{n\to\infty} \int f_n \mu = \int f d\mu$, en fait $(f_n) \to f$ dans L^1. [Han] Contrex

Théo 29 : Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables à val dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si l'une des hypothèses suivantes est réalisée ;

(a) (f_n) est positive pour $n>0$ (b) $\sum \int |f_n| d\mu < \infty$

Alors $\sum \int_X f_n d\mu = \int_X \sum f_n d\mu$.

Appli 30 (Borel-Cantelli) Si A_n est une famille d'éléments de A, alors $\sum \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\overline{\lim}\, A_n) = 0$

2) Intégrales à paramètres.

On fixe Λ un espace métrique, $f : X \times \Lambda \to K$ une fonction mesurable et $F : t \mapsto \int_X f(x,t)dx$

Théo 31 Sous les hypothèses

(i) $\forall t \in \Lambda$, $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable

(ii) $\forall x \in X$ pp, $t \mapsto f(x,t)$ est continue en t_0

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1_K(\mu)$ telle que $|f(x,t)| \leq g(x)$ $\forall t \in \Lambda$, μ pp x.

Alors F est continue en t_0 et def sur Λ.

[Han] 224

Ex 32 : Si $f(x,t) = x e^{-xt}$ F n'est pas continue en 0 ($F = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$).

[BP] 142

Théo 33 Si $\Lambda = I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert non vide, Si

(i) $\forall t \in \Lambda$, $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable

(ii) μ pp, $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable en t_0, on note $\partial_t f(x,t)$ la dérivée.

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ tq $\forall t \in I$, μ pp $|f(t,x) - f(t_0,x)| \leq g(x) |t - t_0|$.

Alors F est dérivable en t_0, avec $F'(t_0) = \int_X \partial_t f(x,t)\,dx$.

3) Intégrale sur un espace produit.

[BP] 221

Théo 34 (Fubini Tonelli) Si X, Y sont des parties mesurables de $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}_+$, alors $y \mapsto \int_X f(x,y)\,dx$ et $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,dy$ sont mesurables et $\int_{X\times Y} f(x,y)\,dxy = \int_X \int_Y f(x,y)\,dy\,dx = \int_Y \int_X f(x,y)\,dx\,dy$.

Théo 35 (Fubini Lebesgue) Si f n'est pas positive, et les deux applis sont intégrables et bien déf, alors même conclusion.

Rq 36 On retrouve certains théorèmes sur les séries en les voyant comme des intégrales.

III. Applications.

1) Holomorphie

Avec les notations de la dernière section, on a $\Lambda = \Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert

Théo 37 : Supposons (i) $\forall t \in \Lambda$, $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable

(ii) $\exists N \in A$ de comp néglig tq $\forall x \in N$, $t \mapsto f(x,t)$ est holomorphe

(iii) $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists g \in L^1(X)$ | $|f(z,x)| \leq g(x)$ $x \in N, z \in K$

Alors F est holomorphe sur Ω.

Appl 38 : La fonction Γ se prolonge à $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}^*$ en une appli holomorphe.

[CMB]

Appl 34 Espace de Bergman. On pose $E = H^2(D) \cap L^2(D)$. Alors E est un sous espace de Hilbert de $L^2(D)$. De plus $z \mapsto \sqrt{\frac{m+1}{\pi}}\, z^m$ est une base hilbertienne de cet espace **DVP**

Appl 36 : L'application $f \mapsto f(z_0)$ sur E se réalise comme un produit scalaire contre $K(z_0, \cdot)$. On a $K(\cdot,\cdot)$ est antisymétrique

2) Analyse de Fourier.

Def 37 On considère $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périod et continues par morceaux. Pour $f \in C_{2\pi}$, on appelle coefficients de Fourier de f les nombres $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$ $n \in \mathbb{Z}$.

[El Am] 287 315

Théo 38 : (Riemann Lebesgue) Pour $f \in C_{2\pi}$, on a $c_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Def 39 : Pour $f, g \in C_{2\pi}$, on pose $f * g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(y) f(x-y)\,dy$ le produit de convolution de f et g

Prop 40 : Pour $f, g \in C_{2\pi}$, $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$

Théo 41 (Formule de Parseval) $\forall f \in C_{2\pi}$, on a $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2\,d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Appli 42 $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

409

Théo 43 (Féjer) Si $f \in C_{2\pi}$ est continue, la moyenne de Césaro de la série de Fourier de f converge vers f uniformément

Théo 44 (Dirichlet) Si f est 2π-pér, C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisée $\tilde{f}$ de f.

[Gou] 401

Appl 45 Equation de la chaleur sur le cercle. On pose $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$. Il existe une unique $u \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T})$ solution de $\partial_t u = (\partial_x)^2 u$ avec $u(t,\cdot) \to u_0$ dans $L^2(\mathbb{T})$ quand $t \to 0$ **DVP**

Théo 44 b : La famille e_n est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Les notions de séries de Fourier s'étendent au monde des distributions 2π-périodiques, on peut en déduire

[Gou]

Théo 46 (Poisson) Dans $S'(\mathbb{R})$, on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}$.

Pour $f \in S(\mathbb{R})$, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$.

Fig1: