234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue intégrables.

Ref : [BP] Briane Pagès. Théorie de l'intégration [Ouv] Probabilités [Rud2] [CMB] [OA].

Dev : S3 Grothendieck
S4 Bergman
S7 Polynômes orthogonaux

Cadre : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré. $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $f : X \to K$ une fonction mesurable et $B \in \mathcal{B}(K)$, on notera $\{f \in B\}$ pour $f^{-1}(B)$, de même pour $\{f = \alpha\}$, $\{f \neq \alpha\}$...

I. Intégrale des fonctions mesurables. [BP] p 111-127

1) Intégrale d'une fonction étagée positive

Def 1 : Toute fonction étagée positive $f : X \to K$ s'écrit comme $\sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mathbb{1}_{\{f = \alpha\}}$. On définit alors l'intégrale de f par rapport à la mesure μ est définie par $\int_X f \, d\mu := \sum_{\alpha \in f(X)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) \in \overline{\mathbb{R}}_+$

Prop 2 : Pour toute décomposition de f sous la forme $\sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où A_i sont des mesurables, alors $\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$

Rq 3 : On a $\int_X f \, d\mu < \infty \iff \mu\{f \neq 0\} < \infty$.

Prop 4 : L'intégrale des fonctions étagées positives est additive, croissante et homogène positive.

Prop 5 : Si $A, B \in \mathcal{A}$, f étagée positive, alors $\mathbb{1}_A f$ est étagée positive et on pose $\int_A f \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f \, d\mu$. Si $A \cap B = \emptyset$, on a alors $\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$.

Prop 6 : Pour (E_n) une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et telle que $X = \bigcup E_n$. Alors pour toute fonction f étagée positive, on a $\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

2) Intégrale d'une fonction mesurable positive.

On définit $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ comme les fonctions $f : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ mesurables.

Def 7 : Pour $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, on pose $\int_X f \, d\mu = \sup\{\int_X \varphi \, d\mu \mid \varphi \leq f$ et étagée positive$\}$. On dit que f est intégrable si $\int_X f \, d\mu < \infty$.

Rq 8 : Le sup qui définit f est positif car supérieur à $\int_X 0 \, d\mu = 0$. Lorsque f est étagée positive, les définitions 7 et 1 coïncident. De plus la définition 7 donne aussi une intégrale croissante.

Théo 9 (Convergence monotone) Si (f_n) est une suite croissante de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et on a $\lim_{\uparrow} f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu$.

Prop 10 : L'intégrale des fonctions mesurables positives est croissante, additive et homogène positive.

Prop 11 : Pour $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, on a $\int_X f \, d\mu = 0 \iff \mu(\{f \neq 0\}) = 0$ on notera alors que $f = 0$ μ-pp (pour μ presque partout).

Def 12 : On dit que deux fonctions mesurables coïncident presque partout si elles diffèrent sur un ensemble négligeable

Prop 13 : Si $f = g$ pp et $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, alors $g \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$.

Prop 14 (Markov) Si $f \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, alors $\mu(f \geq a) \leq \frac{1}{a} \int_X f \, d\mu$ pour $a > 0$.

3) Fonctions intégrables, intégrale de fonctions intégrables.

Def 15 : Une fonction mesurable $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (K, \mathcal{B}(K))$ est dite intégrable si $|f| \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ est intégrable. On note $\mathcal{L}^1_K(X, \mathcal{A}, \mu)$ ou $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables $(X, \mathcal{A}, \mu) \to (K, \mathcal{B}(K))$.

Def 16 : Pour $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, on pose $f^+ = \max(0, f)$ et $f^- = -\min(0, f)$, et
$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$
De même si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ alors $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et on pose
$$\int_X f \, d\mu = \int_X \mathrm{Re}(f) \, d\mu + i \int_X \mathrm{Im}(f) \, d\mu.$$

Ex 17 : Dans le cas où $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ est muni de la mesure de comptage. On a $\mathcal{L}^1(\#) = \ell^1(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |u_n| < \infty\}$ l'ensemble des séries absolument convergentes.

Ex 18 Dans le cas où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est probabilisé ($\mu(X) = 1$), alors on notera $\int f \, d\mu = \mathbb{E}(f)$ l'espérance de f, par le théorème de transfert celle-ci égale $\int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\mathbb{P}_f(x)$.

Théo 19 : L'espace $\mathcal{L}^1_K(\mu)$ est un K espace vectoriel, sur lequel l'intégrale est une forme linéaire positive, donc croissante.

Prop 20 : Pour $f \in \mathcal{L}^1_K(\mu)$, on a $|\int_X f \, d\mu| \leq \int_X |f| \, d\mu$ avec égalité si et seulement si : $\exists \alpha \in K$, $|\alpha| = 1$ tel que $f = \alpha |f|$ μpp.

4) Lien avec l'intégrale de Riemann.

La notion d'intégrale de Lebesgue, exigeante techniquement, est une généralisation de l'intégrale de Riemann dans le sens suivant :

Théo 21 Soit $[a,b]$ un segment réel et $f:[a,b]\to K$ intégrable au sens de Riemann. Il existe $g \in \mathcal{L}^1_K([a,b], \mathcal{B}[a,b], \lambda)$ égale presque partout à f et telle que $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} g\, d\lambda$. En particulier si $g:[a,b]\to K$ est continue, alors g est Lebesgue intégrable et $\int_{[a,b]} g\, d\lambda = G(b)-G(a)$ où G est une primitive de g.

Ex 22: Le dernier théorème se généralise mal aux intégrales impropres : les sinus cardinaux sont Riemann intégrables sur $\mathbb{R}$, mais pas au sens de Lebesgue.

Ex 23: On pose $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}dx$, on a $\lim_{n\to\infty} I_n(\alpha) = \int_0^\infty e^{(\alpha-1)x}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha<1 \\ \infty & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$

II. Théorèmes de convergence et applications. [BP] 131, 146

La théorie de Lebesgue, malgré ses exigences, offre une grande flexibilité (on peut travailler sur un ensemble très général) et une également liberté sur la mesure employée, ce qui est très unificateur. Enfin, on a de puissants théorèmes permettant de manipuler certaines intégrales.

1) Lemme de Fatou et théorème de convergence dominée.

Théo 24 (Lemme de Fatou) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives, alors
$$0 \leq \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\lambda.$$

Appli 25: Si (f_n) est une suite de fonctions intégrables avec $\sup \int |f_n| d\lambda < \infty$, alors si f est limite simple de (f_n), on a $f \in \mathcal{L}^1_K(\mu)$.

Ex 26: Le lemme de Fatou nécessite la positivité : $\left(-\frac{|x|}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ le contredit.

Théo 27 (Convergence dominée) Soit (f_n) une suite de $\mathcal{L}^1_K(\mu)$ telle que μ pp, $f_n(x)$ converge, et qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1_K(\mu)$ telle que $|f_n| \leq g$ presque sûrement, $\forall n$. Alors $\exists f \in \mathcal{L}^1_K(\mu)$ limite simple presque partout de (f_n) et on a $\int_X f_n\, d\lambda \to \int_X f\, d\lambda$ (en fait $\int_X |f_n - f| d\lambda \to 0$).

Appli 28: La fonction Γ définie par $\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ s'étend méromorphiquement à $\mathbb{C}$, avec $\frac{1}{\Gamma} = z e^{\gamma z} \prod \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$

Rq 29: L'hypothèse de domination est cruciale : si $f = \mathbb{1}_{[-1,0]}(x+1) + \mathbb{1}_{]0,1]}(1-x)$ et $f_n = \tau_n(f)$, on a pas convergence : f_n CS vers 0, mais $\int f_n\, d\lambda$ est constant égal à 1. Parce qu'on ne peut pas dominer globalement les (f_n) par une fonction intégrable.

2) Applications aux séries, séries de fonctions.

En voyant les séries de fonctions comme des exemples particuliers de suites de fonctions, les théorèmes précédents donnent les résultats suivants

Théo 30: Soit (φ_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) Si les (φ_n) sont positives, alors $\int_X \sum_{n\geq 0} \varphi_n\, d\mu = \sum_{n\geq 0} \int_X \varphi_n\, d\mu$.

(b) Si $\sum \int |\varphi_n| d\mu < \infty$, alors φ_n, $\sum |\varphi_n|$ et la fonction $\sum \varphi_n$ définie μ pp sont μ-intégrables, et on peut intervertir intégrale et somme.

Ex 31: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, pour $\rho<1$ on a $\int_0^{2\pi} \left|\sum a_n (\rho e^{i\theta})^n\right|^2 d\theta = 2\pi \sum |a_n|^2 \rho^{2n}$.

Appli 32: (Lemme de Borel Cantelli) Soit (A_n) une famille de parties de A, alors $\sum \mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup A_n) = 0$

III. Espaces L^p. [BP] 153 183

On a déjà mentionné l'espace $\mathcal{L}^1_K(\mu)$, on peut généraliser cette structure pour obtenir une quantité d'espaces fonctionnels aux propriétés remarquables.

1) Définitions et premières propriétés.

Def 33: Pour $p>0$ un réel, on pose $\mathcal{L}^p_K(\mu)$ l'ensemble des fonctions $f: X\to K$ mesurables et telles que $|f|^p$ soit intégrable. Il s'agit d'un K-espace vectoriel (a priori de dimension infinie).

Ex 34: Dans le cas de la mesure de comptage, cette définition donne les espaces $\ell^p_K(\mathbb{N})$ des suites de puissance p sommable. Pour une mesure de probabilité, le vocabulaire utilisé est celui des moments : $\mathcal{L}^2_K(\mathbb{P}) \cap \mathcal{L}^1_K(\mathbb{P})$ permet de définir la variance d'une variable aléatoire comme $\mathrm{Var}(f) = \mathbb{E}(f^2) - \mathbb{E}(f)^2$.

Prop 35: Soient $0<p\leq q$ des réels, alors

- Si X est probabilisé, alors $\mathcal{L}^p_K(\mu) \supset \mathcal{L}^q_K(\mu)$
- Si $X=\mathbb{N}$ par la mesure de comptage, alors $\ell^q_K(\mathbb{N}) \supset \ell^p_K(\mathbb{N})$.

Rq 36: On voit donc qu'il n'y a pas en général d'inclusions entre les espaces $\mathcal{L}^p_K$.

Def 37: Pour $f \in \mathcal{L}^p_K(\mu)$, on pose $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ la norme $\mathcal{L}^p$ de f avec la convention $\infty^{1/p}=\infty$)

Rq 38 Cette convention est un abus de langage : les $\|\cdot\|_p$ ne sont que des semi normes sur $\mathcal{L}^p(\mu)$. (voir $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$ par exemple).

Def 39 : Deux réels $p,q>1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ sont dit exposants conjugués.

Prop 40 : (Hölder) Soient $f,g : X \to K$ mesurables et p,q exposants conjugués. Si f et g sont réelles et positives, alors $0 \leq \int_X fg\, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \leq \infty$. En outre, lorsque $\|f\|_p + \|g\|_q < \infty$ on a égalité si et seulement si f^p et g^q sont colinéaires.
Si $f \in \mathcal{L}^p_K(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q_K(\mu)$, alors $fg \in \mathcal{L}^1_K(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Théo 41 (Minkowski)
(a) Si $p \geq 1$, alors $\|.\|_p$ est une semi norme sur $\mathcal{L}^p_K(\mu)$, en particulier $\forall f,g \in \mathcal{L}^p_K(\mu)$ $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
(b) Cas d'égalité, si $p>1$, il y a égalité si et seulement si $f=0$ μ pp ou $f=\alpha g$ μ pp pour un $\alpha \geq 0$. Si $p=1$, il y a égalité si et seulement si $\frac{f}{g} \geq 0$ μ-pp

Pour obtenir des espaces vectoriels normés, on cherche à annuler les fonctions presque partout nulles.

Def 42 : Pour $p \geq 1$, on définit $L^p_K(\mu)$ comme l'espace vectoriel normé quotient de $\mathcal{L}^p_K(\mu)$ par les fonctions presque nulles. On omettra par abus de langage un élément de $\mathcal{L}^p_K(\mu)$ et sa classe dans $L^p_K(\mu)$.

Ex 43 : Attention toutefois avec cet abus. Par exemple il nous fait identifier $1_{\mathbb{Q}}$ et 0 dans $\mathbb{R}$.

Def 44 : On suppose ici que μ est non nulle. Pour $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. On définit le supremum essentiel de f par $\mathrm{supess} f = \inf\{M>0 \mid \mu\{f>M\}=0\} \geq 0$. On pose $\|f\|_\infty = \mathrm{supess}(|f|)$ et $\mathcal{L}^\infty_K(\mu)$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées.

Prop def 45. En considérant 1 et ∞ comme exposants conjugués, on retrouve l'inégalité de Hölder. Ensuite $\mathcal{L}^\infty_K(\mu)$ est semi normé par $\|.\|_\infty$, on définit donc $L^\infty(\mu)$ comme le quotient de $\mathcal{L}^\infty_K(\mu)$ par les fonctions nulles presque partout.

2) Convergence dans les espaces $L^p(\mu)$, densité.

Théo 46 : (Riesz Fischer) Pour tout $p \in [1,\infty]$, l'espace $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ est un espace de Banach.
Si $(f_n) \in L^p_K(\mu)$ $p<\infty$, (f_n) converge vers f dans L^p. Alors il existe une suite extraite $(f_{\sigma(n)})$ et $g \in \mathcal{L}^p_K(\mu)$ telles que $|f_{\sigma(n)}| \leq g$ μ pp et $f_{\sigma(n)} \to f$ μ pp
(une réciproque à la convergence dominée).

Ex 47 : L'extraction est nécessaire : f = affine par morceaux, vaut 1 en $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}[1]$ de largeur $\frac{1}{n}$
on a $f_n \to 0$ dans $L^1(\mu)$ mais pas ps.

Théo 48 : Pour $p \leq \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, les fonctions continues (même C^∞) à support compact dans Ω forment une partie dense de $L^p_K(\mu)$.

Rq 49 : Ceci est faux pour $L^\infty_K(\mu)$, l'adhérence obtenue est alors $C_0(\Omega)$ les fonctions continues de limite nulle au bord de Ω.

3) Cas d'un espace probabilisé.

[Ouv2]

Si $\mu(X)=1$, ~~la~~ convergence dans $L^p(\mu)$ est la convergence des moments d'ordre p donc, on a donc

Prop 50 : La convergence L^p implique la convergence en probabilité mais la réciproque est fausse.

Def 88 : Une famille de va $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément équi intégrable si
$$\lim_{a\to\infty} \left(\sup_{i\in I} \int_{|X_i|>a} X_i \, dP\right) = 0$$

Théo 89 : Pour $p \geq 1$, (X_n) une suite de v.a Ω dans $L^p(\mathbb{P})$, on a équivalence entre.
i) (X_n) cv dans L^p ii) $(|X_n|^p)$ est unif intégrable et $\exists X \in L^p(\mathbb{P}) \mid X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

[Rud2]

Théo 53 : (Grothendieck) Pour $1 \leq p < \infty$, si F est un sous espace fermé de $L^p(\mu)$ inclus dans $L^\infty(\mathbb{P})$, alors F est de dimension finie. DVP

4) Cas particulier de L^2.

Par l'inégalité de Hölder permet d'obtenir un produit scalaire sur $L^2(\mu)$, et Riesz Fischer d'en faire un espace de Hilbert, il respecte ainsi les théorèmes de projection sur un convexe fermé et le théorème de Riesz.

[CMB]

Ex 54 : L'espace $L^2(\mathbb{D}) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ dit de Bergman est un espace de Hilbert, sous espace de $L^2(\mathbb{D})$, dont une base hilbertienne est $\left(\sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\, e_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. DVP

[OA] 110 140

Def 55 : Si $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle. On appelle fonction poids ρ sur I toute fonction mesurable strictement positive telle que les fonctions polynomiales soient intégrables pour la mesure à densité ρ.

Rq 56 : En particulier, la mesure de densité ρ est finie donc les polynômes sont ainsi de carré intégrable. On peut appliquer le procédé de Gram Schmidt à la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir une famille dite des polynômes orthogonaux.

Théo 57 : S'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $x \mapsto e^{\alpha|x|} \in \mathcal{L}^1_K(\rho)$, alors la famille des polynômes orthogonaux est une base hilbertienne de $L^2_K(\rho)$. DVP