Refs : [El Am] El Amrani, Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions.

Devt : 6061 Abel Tauber [Gou2]

63 Nombres de Bell [FGN1]

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Cadre : On se place dans le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Convergence des séries numériques.

1) Généralités

[El Am] 79 82

Def 1 : Pour $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$, on définit la suite des sommes partielles de (u_n) comme la suite $S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k$. On se propose d'étudier la limite de cette dernière suite. On notera $\sum u_n$ cette suite, on parlera de série de terme général u_n.

Def 2 : On dit que la série $\sum u_n$ converge si la limite de (S_n) existe. Si tel est le cas la limite S de la suite (S_n) est dite somme de la série $\sum u_n$ et notée $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Ex 3 : Si $u_n = q^n$ est une suite géométrique, on a $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $q \neq 1$. Donc la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, auquel cas sa somme est donnée par $\frac{1}{1-q}$.

Def 4 : Si $\sum u_n$ est une série convergente de somme S, on note R_n et on appelle reste de la série $\sum u_n$ le nombre $S - S_n$ (d'indice n).

Rq 5 : Les restes ne sont définis que pour une série convergente auquel cas ils convergent vers 0.

Def 6 : Pour $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries sur K, et $\alpha \in K$, on pose $\sum u_n + \sum v_n := \sum u_n + v_n$ et $\alpha \sum u_n = \sum (\alpha u_n)$

On munit ainsi l'ensemble des séries numériques d'une structure de K-espace vectoriel, dont l'ensemble des séries convergentes est un sous espace vectoriel.

Rq 7 : La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. On ne peut en revanche rien dire de la convergence d'une somme de séries divergentes.

Ex 8 : $\sum (-1)^n + \sum (-1)^{n+1} = \sum 0 = 0$.

Prop 9 : Le terme général d'une série convergente converge vers 0, mais la réciproque est fausse

Ex 10 : Pour $u_n = \ln(n+1) - \ln n$, on a $\sum_{k=0}^{n} u_k = \ln(n+1) \to \infty$ mais $\lim u_n = 0$.

Rq 11 : Si $u_n \not\to 0$, on parlera de série grossièrement divergente.

Def 12 : On dit que la série $\sum u_n$ est télescopique si $u_n = a_n - a_{n-1}$ pour une suite $a_n - a_{n-1}$, on a alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = a_n - a_0$.

2) Critère de Cauchy et convergence absolue

[El Am] 83 85.

Prop def 13 : (Critère de Cauchy) Une série $\sum u_n$ converge si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N, p > 0, \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon.$$

Autrement dit si la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy.

Ex 14 : La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ ne converge pas.

On peut relier la notion de série à celle d'intégrale sur $\mathbb{N}$ pour la mesure de comptage, mais notre notion de convergence n'est pas celle donnée par la théorie de Lebesgue :

Def 15 : Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la suite $u : (\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \#) \to (K, B(K), \lambda)$ est Lebesgue intégrable, autrement dit si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théo 16 : Toute série absolument convergente est convergente, mais la réciproque est fausse

Ex 17 : $u_{2p} = -1/p$ et $u_{2p-1} = 1/p$ est convergente et pas absolument convergente.

Rq 18 : Si une série convergente n'est pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

II. Séries à terme général positif.

[El Am] 85 86

Comme pour la théorie de Lebesgue, les séries à terme général positif fournissent des résultats immédiats.

1) Comparaison.

Prop 19 : Une série à terme positif converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. Si la série diverge, c'est vers $+\infty$.

Théo 20 : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries à terme général positif, et si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

- Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$
- Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge également.

Ex 21 : Comme $\frac{1}{n(n-1)}$ est le tg d'une série convergente (télescopique) la suite $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente.

Ex 22 : $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ donne que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

[ElAm] 87

Théo 23 : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries de terme général positif telles que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to \infty$, alors les séries sont de même nature, de plus.
En cas de convergence, les restes sont équivalents, et en cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

[Ham] 114

Ex 24 : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas à terme positif, ceci est perdu : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = v_n$ sont équivalentes, mais de nature différente (on y reviendra).

[ElAm] 90 92.

Théo 25 (Règle de domination) Si $u_n = O(v_n)$ quand $n \to \infty$, la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$, dans ce cas, les restes respectifs R_n et r_n de u_n et v_n vérifient $R_n = O(r_n)$ quand $n \to \infty$.

Théo 26 : On a les mêmes résultats en remplaçant O par o.

Rq 27 : Les théorèmes précédents restent valides pour les séries quelconques en étudiant les modules. (mais c'est $|v_n|$ qui doit être tg d'une série cvg)

Ex 28 : $u_n = \frac{1}{n}$ si n pair ; $\frac{-1}{n^2}$ si n impair. $v_n = (-1)^n/\sqrt{n}$. On a $o(|v_n|) = |u_n|$ et $\sum v_n$ converge, alors que $\sum u_n$ diverge.

Théo 29 (Comparaison série intégrale) Soient $a \in \mathbb{R}$ donné, $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ positive et décroissante. Alors la série $\sum f(n)$ $(n \geq a)$ et l'intégrale $\int_a^\infty f(t)dt$ ont même nature. De plus en cas de convergence, on a l'encadrement :
$$\int_{n+1}^\infty f(t)dt \leq R_n \leq \int_n^\infty f(t)dt$$
où R_n est le n-ième reste.

Ex 30 : La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car $\int^\infty \frac{dt}{t^2}$ converge.

2) Séries de Riemann et de Bertrand.

[ElAm] 89

Théorème 31 : (Séries de Riemann) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum n^{-\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Co 32 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à terme général positif.
1) Si $(n^\alpha u_n)$ converge vers 0 pour un $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge.
2) Si $(n^\alpha v_n)$ tend vers $+\infty$ si $\alpha \leq 1$, alors $\sum v_n$ diverge.

94

Prop 33 : La série de Bertrand de terme général $n^{-\alpha} \ln n^{-\beta}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Ex 34 : $\sum 1/\ln n$ diverge car $n/\ln n \to 0$, $\sum 1/e^n$ converge.

III. Séries à terme général quelconque.

1) Règle de Cauchy et de d'Alembert

[ElAm] 93-96

Théo 35 (Règle de Cauchy) Soit $\sum u_n$ une série numérique, et soit $L = \overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|}$
Alors 1) $L < 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge absolument
2) $L > 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.

Ex 36 : $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge.

Théo 37 (Règle de d'Alembert) Soit $\sum u_n$ une série numérique de terme général non nul à partir d'un certain rang. On note $L = \overline{\lim} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ $l = \underline{\lim} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$
Alors $L < 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge absolument, $l > 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge.

Ex 38 : La série de terme général $u_n = \frac{a^n}{n}$ converge si $a < 1$ et diverge si $a > 1$.
$|u_{n+1}/u_n| = a\, n/(n+1)$.

Rq 39 : Soit (u_n) une suite de K. Si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ admet une limite finie ou infinie, alors $(\sqrt[n]{|u_n|})$ converge vers la même limite. Les conditions sont donc les mêmes pour les deux règles.

2) Méthode d'étude.

[ElAm] 97 100

Pour juger de la convergence d'une série. On peut se ramener à une série positive (en passant au module). Or si ça ne marche pas (série (semi-convergente), considérer un des critères suivants.

Def 40 : On dit qu'une série $\sum u_n$ est alternée si $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

Ex 41 : La série de terme général $(-1)^n/n$ est alternée.

Théo 42 (Critère de Leibniz) Soit (a_n) une suite décroissante vers 0. Alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ converge. De plus sa somme vérifie $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout n et son reste d'ordre n R_n vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Ex 43 : Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum (-1)^{n-1} n^{-\alpha}$ est alternée et $1/n^\alpha \to 0$ en décroissant ainsi cette série est convergente.

Ex 44 : La condition $a_n \to 0$ ne suffit pas à affirmer la convergence dans le théorème 42. Si $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, la série de terme général $(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - a_n\right)$ diverge car de terme général équivalent à $\frac{1}{n}$. Donc $\sum (-1)^n a_n$ DV.

Théo 45 (Critère d'Abel) Soit $\sum u_n$ une série numérique telle que $u_n = a_n b_n$ où :
1) Les a_n sont une suite réelle positive décroissant vers 0
2) Il existe $M > 0$ tel que $m \geq n \geq 0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{m} b_k\right| \leq M$.

Alors la série $\sum u_n$ converge et pour $n\in\mathbb{N}$, on a $|R_n| \le a_{n+1}$.

Ex 46 : Si $(a_n)\geq 0$ décroît vers 0, alors pour $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors les séries $\sum a_n\cos(n\theta)$ et $\sum a_n\sin(n\theta)$ converge.

3) Produit de Cauchy.

[ElAm] 101 103 Def 47 : Pour deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on définit le produit $\sum u_n \sum v_n$ comme la série de terme général $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$.

Théo 48 : Si $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries numériques convergentes, de sommes respectives S et T. Si l'une au moins de ces séries converge absolument, alors la série produit converge vers le produit ST. Si les deux séries convergent absolument, c'est aussi le cas de leur produit.

Ex 49 : $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ est tg d'une série convergente dont le carré ne converge pas.

Appl 50 : L'exponentielle $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes.

4) Groupement, permutations de termes

[ElAm] 103 106 Soit (n_k) une suite d'entiers naturels strictement croissante avec $n_0=0$. À toute série $\sum u_n$ on associe la série de terme général $v_k = \sum_{n_k}^{n_{k+1}-1} u_p$. Si (S_n) resp (T_k) sont les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_k$, alors on a $T_k = S_{n_{k+1}-1}$.

Def 51 : On dit que la série ci-dessus se déduit de $\sum u_n$ par regroupement de termes consécutifs.

Théo 52 : 1) Si une série converge, alors tout regroupement de termes consécutifs donne une série convergente, de même somme que la première.
2) Dans le cas d'une série à terme général positif, on conserve la nature en regroupant.
3) Si une série a son terme général tendant vers 0, et si $p\geq 2$. Alors toute série obtenue par regroupement d'au plus p termes consécutifs est de même nature que la série d'origine.

Théo 53 : Si (u_n) est une suite décroissante de réels positifs, les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ ont même nature.

Ex 54 : Si $u_n = 1/n$ si $n = 2^q$ pour $q\in\mathbb{N}$ et 0 sinon, ce critère tombe en défaut.

Def 55 : Pour $\sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N})$, on peut, à une série $\sum u_n$ associer une seconde série $\sum u_{\sigma(n)}$. Ces deux séries n'ont ni même nature, ni même somme quand elles convergent toutes deux.
On dit que $\sum u_n$ est commutativement convergente si $\sum u_{\sigma(n)}$ est toujours convergente.

Théo 56 : Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est commutativement convergente et la somme est conservée. Si $\sum u_n$ est semi-convergente réelle, alors pour $\alpha\in\mathbb{R}$, $\exists \varphi\in\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ telle que $\sum u_{\varphi(n)}$ converge vers α.

IV Utilisation des fonctions.

1) Séries entières

Def 57 : On appelle série entière une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : z \mapsto a_n z^n$, $a_n\in\mathbb{C}$. [ElAm] 229 231

Prop 58 : $\exists ! R\geq 0$ tel que 1) $\forall |z|<R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument
2) $\forall |z|>R$, $\sum a_n z^n$ diverge.

Ce R est dit rayon de convergence de la série entière. On note que le comportement de la série sur le cercle $\mathcal{C}(0,R)$ est douteux.

Ex 59 : $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, 1 pour a_n donne des comportements différents.

Théo 60 (Abel angulaire) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. Si f est la somme de la série à l'intérieur du disque de convergence. On fixe $\theta_0\in[0,\frac{\pi}{2}[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z\in\mathbb{C},\ |z|<1$ et $\exists\rho>0, \exists\theta\in[-\theta_0,\theta_0]\ z = 1-\rho e^{i\theta}\}$ (Fig 1). [Gou2] 252 253

Alors $\lim_{z\to 1, z\in\Delta_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ DVP

Théo 61 (Théorème Taubérien faible) : Si $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence 1 et f sa somme sur $D(0,1)$. On suppose que $\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = S\in\mathbb{C}$, si $a_n = o(1/n)$, alors $\sum a_n$ converge vers S.

Appli 62 : $\sum \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$.

Appli 63 : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$ avec $B_0=1$ par convention. [FGN1] 14 16
On a $f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ est une série entière de rayon de convergence ∞, égale à e^{e^z-1}.
On a donc $B_n = e^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^n}{m!}$ DVP

2) Séries de Fourier.

Def 64 : Pour $f\in L^2(\mathbb{T})$, on pose $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$, et $\sum c_n(f) e_n$ la série de Fourier de f. [ElAm] 318

Théo 65 : L'application $f \mapsto \ell^2(\mathbb{Z})$ est un isomorphisme isométrique.

Théo 66 : Pour $f\in C^1$ par morceaux, la série de Fourier de f converge simplement vers sa régularisée.

Appl 67 : $\sum_1^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ $\quad \sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ $\quad \sum \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(Fig 1)