229. Fonctions Monotones, fonctions convexes. Exemples et applications

Refs : [RDO3] Ramis Deschamps Odoux, Topologie et éléments d'Analyse. [Rom] Rombaldi, éléments d'analyse réelle. [Hau] Hauchecorne, les contre-exemples. [Pom] Pommellet, Cours d'analyse. [Gou2] Gourdon Analyse. [H:Ur] Hiriart-Urruty Optimisation convexe. [All] Allaire, Analyse numérique et optimisation. [Cia] Ciarlet, introduction à l'analyse numérique matricielle et optimisation.

Devts :
- J. Lorson (52) - Grad optimal (94). Newton ?

I. Fonctions monotones.

Cadre $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle

1) Définition et premières propriétés

[RDO3] 118 119

Def 1 : Soit $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est croissante (resp strictement croissante) si :

$$\forall (x,y) \in D^2, \ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (\text{resp } f(x) < f(y)).$$

f est dite décroissante (resp strictement) si $-f$ est croissante (resp strictement). Enfin, f est dite monotone (resp strictement) si f est croissante sur D ou décroissante sur D (resp strictement).

Ex 2. $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$. La fonction de répartition d'une variable aléatoire est croissante. Une limite simple de fonctions monotones est monotone

Prop 3 : Une application monotone est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Prop 4 : Le produit d'une fonction monotone par un scalaire positif est monotone, de même variation.
- La somme de deux fonctions croissantes est croissante
- Le produit de deux fonctions croissantes positives est croissante
- La composée d'applications croissantes (resp décroissantes) est croissante, la composée d'une application croissante et d'une application décroissante est décroissante.

Rq 5 : L'ensemble des applications monotones (resp croissantes) n'est pas un sous espace vectoriel des fonctions $D \to \mathbb{R}$. L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones est l'espace des fonctions à variation bornée.

[Rom] 259

Appli 6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone avec $f(I) \subset I$ et soit (u_n) définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$.

1) Si $f \nearrow$ alors (u_n) est monotone, dicté par le signe de $u_1 - u_0$

2) Si $f \searrow$ alors $f \circ f \nearrow$ et les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

3) De plus, f admet au + un pt fixe dans I si I est borné et f continue, alors (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent vers des pts fixes de $f \circ f$. (figure 1).

2) Existence de limites et continuité.

[RDO3] 119 120

Théo 7 Soit $f : D \to \mathbb{R}$ monotone et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à $D \cap]a, +\infty[$. Alors f admet une limite (éventuellement infinie) en a.

Cor 8 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone et $a \in \overline{I}$. Si a n'est pas la borne supérieure de I, alors la limite $f(a^+)$ existe. Si a n'est pas la borne inférieure de I, alors la limite $f(a^-)$ existe.

Théo 9 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone, l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

[Hau] 190

Ex 10 : Il existe des fonctions strictement croissantes dont l'ensemble des points de discontinuité est dense : Posons $u_n(x) = \frac{1}{2^n} 1_{q_n \leq x}$ où $(q_n) = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Alors $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est croissante et discontinue en tout point de $\mathbb{Q} \cap]0,1[$.

[RDO3] 120-122

Théo 11 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone, alors f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.

Cor 12 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors $J = f(I)$ est un intervalle et f est un homéomorphisme. Réciproquement un homéomorphisme entre deux intervalles est une fonction strictement monotone.

Ex 13 : La f° sinus induit un homéo $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ croissant, dont la réciproque est l'arcsinus.

3) Monotonie et dérivabilité

[RDO3] 122

Théo 14 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable à droite sur $\mathring{I}$.

i) f est constante ssi $f'_d = 0$ sur $\mathring{I}$

ii) f est croissante ssi $f'_d \geq 0$ sur $\mathring{I}$

iii) f est décroissante ssi $f'_d \leq 0$ sur $\mathring{I}$.

Théo 15 : Avec les notations précédentes, f est strictement croissante si et seulement si $f'_d \geq 0$ et l'ensemble $\{t \in \mathring{I} \mid f'_d(t) = 0\}$ est d'intérieur vide

Ex 16 : L'application $t \mapsto t^3$ donne que f peut être strictement croissante sans avoir $f'_d > 0$ sur I.

[Rom] p 85

Théo 17 : Une fonction monotone est dérivable presque partout

Rq 18 : Escalier de Cantor, une fonction monotone peut être dérivable pp avec une dérivée nulle pp sans être constante

[Gou2] 202-203

4) Comparaison série-intégrale.

Théo 19 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$. En particulier, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ ont même nature.

Appli 20 : Si $H_n := \sum \frac{1}{k}$, alors $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

II. Fonctions convexes.

1) Définitions et premières propriétés

[Pom] ~133

Def 21 : Une application $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe si C est convexe et
$\forall x, y \in C, \theta \in [0,1]$, $f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$.
f est dite concave si $-f$ est convexe. f est dite strictement convexe si l'inégalité est stricte pour $x \neq y$ et $\theta \in]0,1[$. Si il existe $\alpha \geq 0$ tel que
$\forall x, y \in C, \theta \in [0,1]$ $f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y) - \frac{\alpha}{2} \|x-y\|^2 \theta(1-\theta)$.

Ex 23 : $x \mapsto |x|$ est convexe, pas strictement. $x \mapsto e^x$ est strictement convexe.

Rq 24 : α-cvx $\Rightarrow$ strict cvx $\Rightarrow$ cvx.

Prop 25 : Les fonctions convexes sont stables par limites simples, ce qui est faux pour les fonctions convexes $(x \mapsto \frac{1}{n} e^x)$.

Ex 26 : Les fonctions convexes et concaves sont exactement les fonctions affines $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$.

Prop 27 : Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.

Ex 28 : Le produit de f° convexes n'est pas forcément cvx (x^3), de même que la composée ($f \circ -x$ est concave).

2) Caractérisation des fonctions convexes

En dimension 1

[Bour] 137

Def 29 : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite semi convexe si $\forall x, y \in I$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

Théo 30 : Equivalents sont, pour $f : I \to \mathbb{R}$ semi conv
- f est convexe
- f est bornée (et continue).

Ex 31 : Soit V un suppl de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (Δ Choix), et p la projection sur $\mathbb{Q}$ // à V. Alors $p(x)^2$ est semi convexe non convexe. [Hau] 198

[Rom] 238-248

Théo 32 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. LASSE
i) f est convexe sur I.
ii) $\forall x < y < z$, $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
iii) $\forall a \in I$, l'appli $\tau_a : x \mapsto (f(x)-f(a))/(x-a)$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Théo 33 Une appli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^0 est majorée convexe ssi elle est constante.

Cex 34 : $x \mapsto (x+1)^{-1}$ est convexe non majorée sur $\mathbb{R}_+^*$ sans être constante.

Théo 35 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, on a équivalence entre
f convexe $\Leftrightarrow$ f' croissante
Si f est deux fois dérivable, on a équiv avec $f'' \geq 0$.

En dimension n.

[Hi Ur] 3-4.

Théo 36 Soit $J : C \to \mathbb{R}$ définie et différentiable sur C un convexe, on a équiv entre
- J est convexe
- $J(x) \geq J(y) + (\nabla J(y), x-y)$ $\forall x, y \in C \times C$
- $(\nabla J(x) - \nabla J(y), x-y) \geq 0$ $\forall x, y \in C \times C$.

Si J est C^2, alors on a l'autre condition $(\nabla^2 J(x) y, y) \geq 0$ $\forall x, y \in C$.

Théo 37 : Soit $J : C \to \mathbb{R}$ def et différentiable sur un convexe C, on a équiv entre
- J est α-convexe
- $J(x) \geq J(y) + (\nabla J(y), x-y) + \frac{1}{2}\alpha \|x-y\|^2$
- $(\nabla J(x) - \nabla J(y), x-y) \geq \alpha \|x-y\|^2$
- Si J est C^2, alors on a la caractérisation $(\nabla^2 J(x) y, y) \geq \alpha \|y\|^2$.

Ex 39 : Si A est symétrique déf pos, la fonctionnelle quad $J : X \mapsto (AX, X) - (B, X)$ est α convexe, avec $\alpha = \lambda_{min}$ la + petite val de A. Si A est simplement sym pos, alors J est convexe.

3) Régularité en dimension 1.

[Rom] 137-138

Prop 40 : Une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ admet en tout point intérieur de I des dérivées à droite et à gauche.

Cor 41 : Une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intérieur de I

Ex 42 : Une fonction convexe n'est pas forcément continue : $1_{\{0,1\}}$ sur $[0,1]$.

Théo 43 : Si $I \neq \emptyset$ est un intervalle ouvert, alors f est convexe sur I ssi elle est C^0 dérivable à droite sur I de dérivée à droite $\nearrow$.

III. Applications de la convexité, optimisation.

1) Inégalité de convexité.

[Gou2] 95.

Théo 44 (Inégalité Arithmético-géométrique) Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs, on a

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Théo 45 (Inégalité de Hölder). Soient p, q deux exp conjugués, (X, A, μ) un esp mesuré. Pour $f, g : X \to \mathbb{R}$ mesurables, on a

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Cor 46 : L'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une norme sur l'espace $L^p(X, \mu)$.

Prop 47 : Si X est une variable aléatoire sur (Ω, A, P) et g une fonction convexe alors $g(E(X)) \leq E(g(X))$.

2) Optimisation.

On considère E un $\mathbb{R}$-evn, $C \subseteq \Theta$ convexe, et $J : \Theta \to \mathbb{R}$ (Θ ouvert)

[Cia] 153 158

Théo 48 : Si J est différentiable en un point u de C et si elle admet un minimum relatif par rapport à C, alors

$$(dJ(u), v-u) \geq 0 \quad \text{sur } C.$$

Théo 49 Soit $C \subseteq E$ convexe, $J : C \to \mathbb{R}$.

- Si J est convexe et admet un minimum local sur C, alors il s'agit d'un minimum global
- Si J est strictement convexe, alors elle admet au plus un minimum et c'est un minimum strict.
- Si J est déf sur Θ un ouvert contenant C, et diff sur $u \in C$, alors la condition du théorème précédent devient une équivalence.
- Si C est un ouvert, la condition précédente équivaut à l'équation d'Euler : $dJ(u) = 0$.

Théo 50 : (Minimum en dim finie). Soit $K \in \mathbb{R}^n$ fermé non vide, $J : K \to \mathbb{R}$ C^0 coercive, alors J possède un minimum sur K

[All] 290

Rq 51 : Une fonctionnelle α-cvx est coercive si diff en un point.

Ex 52 : Faux en dim ∞ : $\ell^2(\mathbb{R})$ et $J(x_n) = (\|x\|^2 - 1)^2 + x_0 + \sum_{1}^{\infty} \frac{x_i^2}{i}$

Appli : John Loewner

DVP

3) Méthodes de gradient.

Étant donné $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on cherche une suite définie par

$$\begin{cases} X^0 \in \mathbb{R}^n \\ X^{k+1} = X^k - \rho^k d^k \end{cases}$$

convergeant vers un éventuel min de J.

où ρ^k est le pas, et d^k la direction de descente

Déf 53 : On dit que $d \in \mathbb{R}^n$ est une direction de descente à partir d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ s'il existe $\eta > 0$ tel que $J(x + \rho d) \leq J(x) \quad \forall \rho \in]0, \eta[$

Si J est convexe et suffisamment régulière, on a $\forall X$, $-\nabla J(X)$ et $-\nabla^2 J(X)$ sont direction de descente, le 2e cas donne méth de Newton, le 1er les méthodes de gradients.

- Gradient à pas fixe : ρ est fixé
- Gradient à pas optimal : ρ^k est choisi pour minimiser $\rho \mapsto J(X^k - \rho \nabla J(X^k))$

Théo 54 : Si J est α-convexe, différentiable, et ∇J Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$. Alors l'algorithme du gradient à pas optimal converge vers le unique minimum de J sur $\mathbb{R}^n$.

DVP

Appli 55 : Minimisation de la fonctionnelle quadratique.

Fig 1