228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle, + dérivée faible. Exemples d'applications.

Refs : [Gou2] Gourdon. Analyse. [Pom] Pommellet, Cours d'analyse. [Bony] [Bony], Cours d'analyse, théorie des distributions et analyse de Fourier.

Devts : Théo 50 (Weierstrass)
Appl 44 (fonction Γ)
Théo 23 (Darboux)

Par défaut, on considère $I =]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

I. Notion de continuité et de dérivabilité

1) Fonctions continues.

[Gou2] 7-19

Def 1 : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue en $x_0 \in I$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall y \in I, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$
Autrement dit si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. On dit que f est continue sur I si elle l'est en tout point de I.

Lem 2 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue en $x \in I$, g définie en $f(x)$ et continue, alors $g \circ f$ est définie et continue en x.

Ex 3 : $1_{\mathbb{Q}}$ est continue nulle part, $x 1_{\mathbb{Q}}$ est continue en un unique point.

Lem 4 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on a équivalence entre f continue en $x_0 \in I$ et pour toute suite convergent vers x_0, on a $(f(x_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Ex 5 : La fonction $x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'est pas continue en 0.

Théo 6 : Si $\alpha \in \bar{I} \setminus I$, et si $f : I \to \mathbb{R}$ a une limite l en α, il existe un prolongement continu de f sur $I \cup \{\alpha\}$.

Théo 7 L'ensemble $C(I, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Ex 8 : La fonction $x \mapsto x \sin\frac{1}{x}$ se prolonge par 0 en 0.

Def 9 : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite uniformément continue si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall x, y \in E, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

Rq 10 : La continuité uniforme est strictement plus forte que la continuité. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue (C^∞) sur $]0, +\infty[$ sans être UC.

Théo 11 : (Heine) Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

[Gou2] p224

Théo 12 (Weierstrass). Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est limite uniforme d'une suite de polynômes. DVP

2) Fonctions dérivables.

On fixe I un intervalle, a, b ses bornes et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

Def 12 : Soit $x_0 \in I$, on dit que f est dérivable à droite (resp à gauche) si la limite suivante
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \left(\text{resp } \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$
existe, on la note $f'_d(x_0)$ (resp $f'_g(x_0)$). Si $x_0 \in \mathring{I}$, on dit que f est dérivable en x_0 si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et coïncident, on note $f'(x_0)$ la dérivée.

[Gou2] 67-69

Exemple 13 : Quand la dérivée existe, elle n'est pas forcément continue. $x \mapsto x^2 \sin 1/x$ prolongée par 0 en 0.

Prop 14 : Pour $a \in \mathring{I}$, l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}$ dérivables en a est une $\mathbb{R}$-algèbre, sous algèbre des fonctions continues en a. On pose $D(I)$ l'algèbre des fonctions dérivables sur tous les points de I.

Théo 15 Soit f, g deux fonctions, $a \in \mathbb{R}$ tel que f soit dérivable en a et g soit dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a avec
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a).$$

Def 16 : Pour $n \geq 1$, on pose $D^n(I, \mathbb{R})$ les fonctions n fois dérivables sur I et $C^n(I, \mathbb{R})$ les fonctions n fois dérivables avec $f^{(n)}$ continue.

Rq 17 : On a $C^n(I, \mathbb{R}) \supseteq D^{n+1}(I, \mathbb{R})$ pour $n \geq 0$, la dérivabilité implique la continuité.

Théo 18 : (Formule de Leibniz) Soient $f, g \in D^n(I, \mathbb{R})$, le produit fg est aussi dans $D^n(I, \mathbb{R})$ avec
$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x)\, g^{(n-i)}(x).$$

Prop 19 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement monotone dérivable en $\alpha \in I$. Alors f^{-1} est dérivable en $f(\alpha)$ ssi $f'(\alpha) \neq 0$ avec dans ce cas
$$(f^{-1})'(f(\alpha)) = \frac{1}{f'(\alpha)}.$$

[Pom] 85.

Exemple 20 : On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-périodique avec $g_{|[-1,1]}(x) = |x|$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n g(4^n x)$ il s'agit d'une fonction continue nulle part dérivable.

II. Résultats fondamentaux.

1) Théorème des valeurs intermédiaires

Théo 21 : Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, alors $f(I)$ est un intervalle.

Coro 22 : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signe différent, alors l'équation $f(x) = 0$ admet des solutions sur $[a,b]$.

[Pom] 108?

Théo 23 : (Darboux) Si $f \in D^1(I)$, alors la fonction f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. DVP

[Pom] 444?

Théo 24 : (Newton) Soit $(x_0, c) \in \mathbb{R} \times]0,+\infty[$ et f de classe C^1 sur $I = [x_0 - c, x_0 + c]$. On suppose qu'il existe un réel $m > 0$ tel que
i) $|f(x_0)| \leq cm$
ii) $\forall (y,z) \in I^2$, $|f'(y)| \geq 2m$ et $|f'(y) - f'(z)| \leq m$
alors f possède une unique racine α dans I et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de x_0 et de la relation $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ converge vers α.

2) Théorème de Rolle et conséquences.

Sauf indication contraire, on considère $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle de longueur non nulle non infinie.

[Gou2] 71-72

Prop 25 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ continue admet un extremum local en $c \in \mathring{I}$, si $f'(c)$ existe alors $f'(c) = 0$.

Théo 26 : (Rolle) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur $\mathring{I}$, et telle que $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. Appli P scindé $\Rightarrow P'$ aussi

Théo 27 (Accroissements finis) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $\mathring{I}$, alors
$$\exists c \in]a,b[\ | \ f'(c)(b-a) = f(b) - f(a).$$

Co 28 : Avec les notations précédentes, on a équivalence entre f croissante sur I et f' positive sur I. Et aussi équivalence entre f constante et $f' \equiv 0$.

Ex 29 : La condition I intervalle importe : $f = \frac{1}{x}$ n'est pas $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$ même si sa dérivée est positive.

3) Formules de Taylor.

[Gou2] 73-75

Théo 30 : (Taylor Lagrange) Soit $f \in C^n([a,b], \mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in D^1(]a,b[, \mathbb{R})$, alors
$$\exists c \in]a,b[\ | \ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Théo 31 (Taylor Young) Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(I, \mathbb{R})$, et $a \in I$ où $f^{(n)}$ est dérivable. Alors pour $h \to 0$ on a
$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(h^{n+1}).$$

Théo 32 (Taylor Reste intégral) Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}([a,b], \mathbb{R})$. Alors
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Appl 33 : Calcul de développements limités.

III. Etude de certaines classes de fonctions.

1) Fonctions monotones

[Pom] 103

Théo 34 L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.

Théo 35 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ monotone alors + inj $\Leftrightarrow$ strict monot.
(a) f est continue si et seulement si l'image de f est intervalle.
(b) Si f est une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J, f^{-1} est continue.

2) Fonctions convexes

[Gou2] 94-95

Def 36 : Une appli $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si
$$\forall (a,b) \in I^2, \theta \in [0,1], \quad f(\theta a + (1-\theta) b) \leq \theta f(a) + (1-\theta) f(b). \quad (*)$$
Elle est dite concave quand $-f$ est convexe.

Rq 37 : Dans le cas où $(*)$ est une inégalité stricte, on parle de fonction strictement convexe.

Prop 38 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors f'_g et f'_d existent en tout point de $\mathring{I}$. En particulier f est continue sur $\mathring{I}$. On a de plus que f'_g et f'_d sont croissantes sur $\mathring{I}$ avec $f'_g(x) \leq f'_d(x)$ sur $\mathring{I}$.

Théo 39 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, on a équivalence entre
- f est convexe
- f' est croissante
- La courbe représentative de f est au dessus de ses tangentes.

Co 40 : Une application $f \in D^2(I, \mathbb{R})$ est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ sur I.

Appli 41 : Inégalité géométrico-arithmétique : Pour $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}_+$, on a
$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Appli 42 Inégalité de Hölder : Pour $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrables, on a
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \text{si } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

3) Fonctions Lipschitziennes.

[Pom] 66-67?

Def 43 : On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est Lipschitzienne (de rapport k) s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall (x,y) \in I^2, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Prop 44 : Toute application Lipschitzienne est uniformément continue.

Rq 45 : La réciproque est fausse : $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

Prop 46 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable avec f' bornée, alors f est lipschitzienne (inégalité des accroissements finis).

4) Suites de fonctions.

[Gou2] 220 228.

Théo 47: Soit (f_n) une suite de fonction $I \to \mathbb{R}$ convergeant uniformément vers $f : I \to \mathbb{R}$. Si toutes les fonctions f_n sont continues en $x_0 \in I$, alors c'est aussi le cas de f.

Théo 48: Soit (f_n) une suite de fonctions de $C^1([a,b], \mathbb{R})$. On suppose de plus que
i) il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge
ii) La suite (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g.
Alors (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f' = g$.

Théo 49 (Dini). Soit (f_n) une suite de fonctions $[a,b] \to \mathbb{R}$, convergeant simplement vers f sur $[a,b]$. Alors
- Si la suite (f_n) est croissante, alors la convergence est uniforme
- Si les fonctions (f_n) sont croissantes, alors la convergence est uniforme.

DVP || **Théo 50** (Weierstrass). Les polynômes sont denses dans $C([a,b], \mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

5) Intégrales à paramètre.

Théo 51 (Continuité sous intégrale) Soit Λ un intervalle réel, une application
$$f : \Lambda \times I \to \mathbb{R}$$
$$(\lambda, t) \mapsto f_\lambda(t).$$
mesurable telle que :
(i) $\forall t \in I$, $\lambda \mapsto f_\lambda(t)$ est continue sur Λ
(ii) $\forall \lambda \in \Lambda$, $t \mapsto f_\lambda(t)$ est intégrable sur I.
(iii) Il existe $h : I \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall \lambda \in \Lambda$, $|f_\lambda(t)| \leq h(t)$ presque partout.
Alors l'application $\lambda \mapsto \int_I f_\lambda(t)\,dt$ est continue.

Théo 52 (Dérivation sous intégrale) Avec les notations précédentes, et les hypothèses
(i) $\forall t \in I$, $\lambda \mapsto f_\lambda(t)$ est dérivable sur Λ
(ii) $\forall \lambda \in \Lambda$, $t \mapsto f_\lambda(t)$ est intégrable sur I
(iii) Il existe $h : I \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall \lambda \in \Lambda$, $|f_\lambda'(t)| \leq h(t)$ presque partout
Alors l'application $\lambda \mapsto \int_I f_\lambda(t)\,dt$ est dérivable en λ, sa dérivée est $\lambda \mapsto \int_I f_\lambda'(t)\,dt$.

DVP || **App 54** Etude de la fonction Γ

IV. Cas des distributions, dérivée faible.

1) Définitions et dérivation faible.

Def 55. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on appelle support de φ l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}$. On pose, pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ouvert, $D(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur Ω à support dans $K \subseteq \Omega$. On appelle fonction test les éléments de cet ensemble.

[Bony] 85-105

Def 56: On dit que $u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une distribution si il s'agit d'une forme linéaire vérifiant la propriété suivante : pour tout compact K de Ω, il existe un entier p_K et une constante C_K telles que $\forall \varphi \in D(K)$, $|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{\substack{x \in K \\ m \leq p_K}} |\varphi^{(m)}(x)|$
On note $D'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur $D(\Omega)$.

Exple 57: Toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ induit un élément de $D'(\Omega)$, mais la réciproque est fausse : voir δ_0.

Def 58: On dit qu'une suite (u_k) de distributions sur Ω converge (dans $D'(\Omega)$) vers $u \in D'(\Omega)$ si $\forall \varphi \in D(\Omega)$, $\lim_{k \to \infty} \langle u_k, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle$

Prop 59: La convergence L^1 sur tout compact est plus forte que la convergence des distributions

Def 60: Pour $u \in D'(\Omega)$, on note u' la distribution définie par $\langle u', \varphi \rangle := -\langle u, \varphi' \rangle$. On l'appelle la dérivée de u.

Prop 61: L'application de dérivation $D'(\Omega)$ est bien définie et continue : si (u_n) tends vers u, alors $(u_n^{(k)})$ tends vers $(u^{(k)})$.

2) Exemples et lien avec la dérivée usuelle.

Prop 62: Si $f \in C^1(I, \mathbb{R})$, alors f induit une distribution $D_f \in D'(I)$, et on a $D_{f'} = (D_f)'$

Exple 63: Soit $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ la fonction de Heaviside, on a $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $D_H' = \delta_0$.

Théo 64 (Formule des sauts). Soit f de classe C^1 par morceaux sur $]a,b[$. On a alors
$$D_{f'} = f'(x)\mathbb{1}_D(x) + \sum_{i=1}^{N-1} (f_d(a_i) - f_g(a_i))\,\delta_{a_i}$$
où D est l'ensemble des morceaux de C^1 de f, et $\{a_i\}_{1,N-1} =]a,b[\setminus D$.

Prop-def 65: Pour $t \in \mathbb{R}$, $u \in D'(\mathbb{R})$, on pose $\tau_t u$ la distribution définie par $\langle \tau_t T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-t}\varphi \rangle$
On a alors $\dfrac{\tau_{-t} u - u}{t} \longrightarrow u'$ asdd.

Exemple 66: La fonction $\ln|x|$ admet une dérivée au sens des distributions la valeur principale de $\frac{1}{x}$: $vp(\frac{1}{x})$.