226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Refs : [Gou2] Gourdon Analyse [FGN1] Analyse 1 [Rou] Rouvière, Petit guide de calcul différentiel.
[Dem] Demailly, Analyse numérique. [All] Allaire, Analyse numérique
[Cia] Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.

DeV :
31 32 Méthode de Newton [Rou]
35 Gradient à pas optimal. [Cia] 189, 190.

Cadre : On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, de norme $\|\ \|$.
On appelle suite récurrente d'ordre k une suite définie par une relation de la forme $u_{n+k}=f(u_n,\dots,u_{n+k-1})\ \forall n\geq k$, $f:E^k\to E$. (1)

I. Généralités sur les suites récurrentes.

[Gou2] 190

Prop 1 : Soit (u_n) une suite récurrente d'ordre k donnée par la relation $u_{n+k}=f(u_n,\dots,u_{n+k-1})$ $n\geq 0$.
Si la suite (u_n) converge vers une limite l et l'application f est continue en $(l,\dots,l)$, alors on a $l=f(l,\dots,l)$.

Ex 2 : Considérons la suite $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+\mathbb{1}_{\{0\}}(u_n)$, pour $u_0>0$.
On a $u_n\to 0$ mais $\frac{0}{2}+\mathbb{1}_0(0)=1\neq 0$.

Rq 3 : Comme pour les équations différentielles, une suite récurrente d'ordre k induit une suite récurrente d'ordre 1 par
$$U_n=\begin{pmatrix}u_n\\ \vdots\\ u_{n+k-1}\end{pmatrix}\qquad U_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ \vdots\\ \vdots\\ f(u_n\dots u_{n+k-1})\end{pmatrix}=F(U_n)$$
Mais cette suite est dans l'espace E^k, ce qui peut rendre l'étude de F plus difficile que celle de f.

1) Cas des suites réelles.

On considère ici le cas d'une suite réelle récurrente d'ordre 1.
On considère $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle f-stable et $u_0\in I$.
- Si f est croissante, la suite u_n est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de u_1-u_0.
- Si f est décroissante, alors $f\circ f$ est croissante, ainsi les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonie opposées.

Ex 4 : La suite définie par $u_0\geq 0$ et $u_{n+1}=(2-\sqrt{u_n})^{-1}$, alors
- Si $u_0=1$, la suite (u_n) est constante égale à 1
- Si $u_0\in]1,(3+\sqrt5)/2[$ (u_n) décroît vers 1
- Si $u_0\in\frac{3+\sqrt5}{2}$, stationnaire, Si $u_0>\frac{3+\sqrt5}{2}$, $u_n>4$ pour un n et la suite n'est plus définie.

Ex 5 : $u_0=0$, $u_{n+1}=\cos(\lambda u_n)$, $\lambda\in[0,1[$ fixé.

Ex 6 : $u_0=1$, $u_{n+1}=\sin(u_n)$.

[FGN1]

Lemme 7 (Lemme de la grenouille) Si $f:[0,1]\to[0,1]$ est continue, alors la suite définie par $u_0\in[0,1]$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ converge si et seulement si $u_{n+1}-u_n\to 0$.

Rq 8 : Le résultat est faux si la suite (u_n) n'est pas une suite récurrente (la série harmonique en donne un contre-exemple).

2) Suites récurrentes linéaires

[Gou2] 193 194

Def 9 : On dit que la relation de récurrence (1) est une relation de récurrence linéaire si f est une application linéaire.
Si $E=\mathbb{R}$, f est une forme linéaire donnée par un vecteur $(a_1,\dots,a_k)$.
La fonction F associée à f par la remarque 3 est alors donnée dans la base canonique par la matrice compagnon du polynôme $P=\sum_{i=1}^{k}a_iX^{k-i}$, ce polynôme est alors appelé polynôme caractéristique de la relation 1.

Théo 10 : Si l'on note $r_1,\dots,r_q$ les racines de P et $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ leurs multiplicité respective, alors l'ensemble des suites u_n vérifiant (1) est l'ensemble des suites de la forme dans $\mathbb{C}$.
$$u_n=P_1(n)r_1^n+\dots+P_q(n)r_q^n$$
où P_i est un polynôme de degré $<\alpha_i$.

Ex 11 : Considérons la relation de récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$, l'équation caractéristique associée est $X^2-X-1=0$ dont les racines sont $\frac{1\pm\sqrt5}{2}$, on a donc affaire aux suites
$$u_n=a\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+b\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\quad a,b\in\mathbb{R}.$$

Rq 12 : À part dans ce cas particulier, il n'existe pas de méthode permettant en général d'exprimer u_n en fonction de n directement.

3) Quelques exemples classiques.

Def 13 : On dit que (u_n) est une suite arithmétique si (u_n) vérifie une

[Gou] 493 relation de récurrence de la forme $u_{n+1}=u_n+a$ pour un $a\in E$ fixé.

Rq14 Une suite arithmétique converge si et seulement si elle est constante.

Def15 : Si (u_n) est à valeurs réelles ou complexe, on peut dire que u_n est une suite géométrique s'il existe $q\in\mathbb{C}$ tel que $u_{n+1}=qu_n$, la suite est alors bornée si et seulement si $|q|\le 1$ et convergente (vers 0) si et seulement si $|q|<1$.

Appli16 : Si (u_n) est géométrique de raison q, on a $\sum_{k=0}^{n} u_k=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

On peut aussi considérer une suite arithmético-géométrique (f est une fonction affine) donc $u_{n+1}=au_n+b$, on étudie alors $v_n=u_n-\frac{b}{1-a}$ qui est une suite géométrique.

Def17 : Une suite homographique est une suite réelle ou complexe vérifiant une relation de récurrence de la forme $h(u_n)=u_{n+1}$, où $h(x):=\frac{ax+b}{cx+d}$ où $ad-bc\neq 0$ (2). Une telle suite n'est bien définie que si aucune de ses valeurs n'annule le dénominateur de h.

Prop18 : Soit (u_n) une suite vérifiant (2). On considère l'équation $h(x)=x \iff cx^2-(a-d)x-b=0$. Si elle admet deux racines distinctes α et β, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}=k^n\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}$ où $k=\frac{a-\alpha c}{a-\beta c}$.
Si elle admet une racine double α, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{u_n-\alpha}=\frac{1}{u_0-\alpha}+nk$ où $k=\frac{c}{a-\alpha c}$

Ex19 : Pour la relation $u_{n+1}=\frac{au_n+1}{u_n+a}$, l'équation associée est (E) : $X^2-1=0$.
On a donc $\frac{u_n-1}{u_n+1}=k^n\frac{u_0-1}{u_0+1}$ avec $k=\frac{a-1}{a+1}$.

II. Suites récurrentes et points fixes.

1) Théorème du point fixe de Picard Banach et applications

[Rou] 163, 170 Théo20 (Picard Banach) Si (X,d) est un espace métrique complet (non vide), Λ un espace métrique et $f : X\times\Lambda\to X$ une application continue. Si f est uniformément contractante en X, i.e $\exists k\in[0,1[\ \mid \forall\lambda\in\Lambda, x,y\in X$ $d(f(x,\lambda),f(y,\lambda))\le kd(x,y)$.
Alors $\forall\lambda\in\Lambda, \exists!\varphi(\lambda)\in X \mid f(\varphi(\lambda),\lambda)=\varphi(\lambda)$, de plus $\varphi:\Lambda\to X$ est continue.

Appli21 Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle, $f : I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ continue, lipschitzienne en y (sur tout compact $K\subset I$). Alors le système différentiel $y'=f(t,y)$ $y(t_0)=x$ admet une unique solution globale.

Co22 : Soit (X,d) complet, $f : X\to X$ telle qu'il existe $p\geq 0$ avec f^p contractante. [Rou] 160 163
Alors f a un unique point fixe dans X. De plus, pour $x_0\in X$, la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe, la vitesse de convergence est géométrique.

Ex23 : Pour $f :]0,1]\to]0,1]$ envoyant x sur $\frac{x}{2}$, contractante qui a aucun point fixe mais $]0,1]$ n'est pas complet (par opposition à $[0,1]$ par exemple).

Ex24 : $X=[0,1]$ $f=\sqrt{x^2+1}$, ici f n'est pas à valeurs dans X, mais dans $[1,\sqrt{2}]$

Rq25 : Dans le cas compact, on peut affaiblir les hypothèses du co22 : Si (X,d) est compact non vide, $f : X\to X$ avec $\forall x,y\in X$, $d(f(x),f(y))<d(x,y)$, alors f admet un unique point fixe.
Si (X,d) est un compact convexe d'un evn, une inégalité suffit.

Quand on cherche à résoudre une équation de la forme $f(x)=0$ en une variable réelle, on peut étudier les points fixes d'une application $x\mapsto x-Cf(x)$ où $C\neq 0$ est une constante. On peut faire varier C et l'intervalle d'étude pour satisfaire sur φ les hypothèses d'un théorème de point fixe. [Dem] 95

2) Classification des points fixes.

On considère dans un premier temps $I\subseteq\mathbb{R}$ intervalle fermé, $\varphi : I\to I$ de classe C^1, $a\in I$ un point fixe. On distingue trois cas. [Dem] 95.

- $|\varphi'(a)|<1$, il existe un voisinage de a dans I dans lequel $\varphi(u_n)=u_{n+1}$ cv vers a. On dit que a est attractif
- $|\varphi'(a)|>1$ le point fixe est répulsif, il existe un voisinage V de a tel que $x\in V\Rightarrow\varphi(x)\notin V$.
- $|\varphi'(a)|=1$, cas douteux. Tout est possible ($\sin$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, sh sur $\mathbb{R}_+$) Fig1

Prop26 : Avec les notations ci-dessus, si $\varphi'(a)=0$, φ de classe C^2 alors pour u_0 assez proche de a la convergence de la suite $\varphi(u_n)=u_{n+1}$ est quadratique (la quantité de décimales exactes double à environ chaque itération). On parle de point fixe super attractif.

Dans le cas vectoriel, on considère $\varphi : \Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ une fonction C^1 108.

[Dem] 109

Théo 27 : Soit $a \in \Omega$ un point fixe de φ, alors on a équivalence entre :
(i) $\exists V$ voisinage de a tel que $\varphi(V) \subseteq V$ et N une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour laquelle $\varphi_{|V}$ est contractante
(ii) $\rho(d\varphi_a) < 1$ (rayon spectral de la Jacobienne). On dit alors que a est attractif.

3) Orbite périodique ($E = \mathbb{R}$).

[FGN1] 92

Déf 28 : Si $x \in I$ vérifie $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour $k < n$, on dit que x est un point n-périodique de f.

Théo 29 (Sarkowski) : Si $f : I \to I$ est continue et admet un point 3-périodique, alors f admet un point n périodique pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex 30 : $f : [0, \frac{1}{2}] \to [1, 2]$ envoyant $x \sin \frac{1}{1-x}$ n'admet que des points 3-périodiques.

III Méthodes numériques itératives à un pas.

1) Méthode de Newton.

[Dem]

On cherche à évaluer numériquement une solution d'une équation $f(x) = 0$ en supposant qu'on possède x_0 une approximation grossière d'une solution. En cherchant plutôt à annuler la tangente à f en x_0 : $x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, on est amenés à poser $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

[Rou] 142

Théo 31 : Si $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, $f(c) < 0 < f(d)$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c, d]$. Alors f admet un unique zéro $a \in [c, d]$. Pour tout $x \in [c, d]$, il existe z entre a et x tel que $x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a = \frac{1}{2} f''(z)/f'(x) (x - a)^2$. Il existe de plus $C > 0$ tel que $|F(x) - a| \leq C|x - a|^2$ et $\alpha > 0$ tel que $[a - \alpha, a + \alpha]$ soit F stable ($F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$). En résumé, la suite $u_{n+1} = F(u_n)$ converge quadratiquement vers a si le point de départ est suffisamment proche de a.

DVP

Co 32 : Dans le théorème précédent si $f''(x) > 0$ sur $[c, d]$, le résultat précédent est valable sur $[a, d]$ et la suite (u_n) est alors strictement décroissante (un côté)

Ex 33 : Pour la fonction $f(x) = x^2 - y$, $y > 0$, on trouve la méthode de Héron de recherche d'une racine carrée. $u_{n+1} = (u_n^2 + y)/2u_n$.

2) Méthodes de Gradient.

On est ici dans le cadre de l'optimisation : On considère $J : V \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle définie sur V un espace de Hilbert α-convexe (par exemple, J une fonctionnelle quadratique de la forme $\frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) = J(x)$, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$).

[All] 338. 360

La fonctionnelle J admet un unique minimum, caractérisé par l'équation d'Euler $\nabla J(x) = 0$. On construit des méthodes itératives de la forme $x^{n+1} = x^n + \rho^n d^n$, ρ^n un réel et d^n une direction de descente, telle que $\exists \rho^n$ $J(x^{n+1}) < J(x^n)$.

On peut considérer la méthode de relaxation (les d^n sont les vecteurs de base canonique). On parle de méthodes de gradient si $d_n = -\nabla J(x^n)$ qui est toujours une direction de descente. Si $\rho_n = \rho$ est constant, on trouve la méthode de Gradient à pas constant.

Théo 34 : Si J est α-convexe différentiable et ∇J est L lipschitzien sur V. Alors pour $\rho \in]0, 2\alpha/L^2[$, l'algorithme du gradient à pas optimal converge vers l'infimum de J pour tout point de départ x_0.

On peut également chercher ρ^n pour minimiser la fonctionnelle $\rho \mapsto J(u^n + \rho \nabla J u^n)$. C'est le gradient à pas optimal

DVP

Théo 35 : Si J est α-convexe différentiable et ∇J est lipschitzien sur tout borné de V. Alors l'algorithme du gradient à pas optimal converge.

[Cia] 191

Rq 36 : A priori, ρ^n le pas optimal peut être difficile à calculer, mais pour une fonctionnelle quadratique, il se calcule explicitement et est donné par. $\rho^n = \frac{\|r_k\|^2}{(Ar_k, r_k)}$ où $r_k := Au_k - b$

Rq 39 : Pour une fonctionnelle quadratique, la minimisation équivaut à la résolution du système linéaire $Ax = b$. Certains algorithmes de résolution sont ainsi des analogues d'algorithmes de minimisation (Gauss Seidel - relaxation, Jacobi...).

(Fig 1).