223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Refs : [Gou2] Gourdon, Analyse [El Am] El Amrani, Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions. [FGN2] Analyse 2.

Devt : 56 Méthode de Newton [Rou]. 61b Stirling

Cadre : On appelle suite numérique les suites à valeur dans $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Suites numériques et convergence.

1) Limite d'une suite

[El Am] 12 13

Def 1 : On dit que une suite (u_n) dans K converge vers un $l\in K$ si :
$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\geq 0 \mid n\geq N \Rightarrow |u_n-l|<\varepsilon.$$
Si (u_n) n'est pas convergente (si elle ne converge vers aucun $l\in K$) on dit que (u_n) diverge.

Prop 2 : Si (u_n) est une suite numérique convergente, alors elle converge vers un unique réel, que l'on appelle limite de la suite (u_n), on note alors $\lim_{n\to\infty} u_n$ ce réel. On encore $u_n\to l$.

Appli 3 : Une fonction $f : K\to K$ est continue si et seulement si : pour toute suite (u_n) de K convergent vers l, alors $f(u_n)$ converge vers $f(l)$.

Ex 4 : La fonction $x\mapsto \sin(\frac{1}{x})$ ne se prolonge pas par continuité en 0.

Prop 5 : Toute suite convergente de K est bornée : il existe $M>0$ tel que $|u_n|\leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Ex 6 : La suite $u_n=(-1)^n$ ne converge pas tout en étant bornée.

Prop 7 : Les suites convergentes forment un K-espace vectoriel de dimension infinie : Si (u_n), (v_n) convergent respectivement vers u et $v\in K$, alors pour $\lambda\in K$, (λu_n+v_n) converge vers $\lambda u+v$.

Prop 8 : Le produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0 converge vers 0.

Ex 9 : La suite $\frac{\sin n}{n}$ converge vers 0.

Cas particulier des suites réelles

[Gou2]

Def 10 : Une suite réelle (u_n) est dite majorée (resp minorée) s'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $u_n\leq M$ (resp $u_n\geq M$) quel que soit $n\in\mathbb{N}$.

Prop 11 (Théorème des Gendarmes). Si trois suites réelles vérifiant
$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n\leq u_n\leq w_n$$
et si $(v_n)(w_n)$ convergent vers une même limite l, alors c'est aussi le cas de (u_n).

[Gou2] 198, 206, 192.

Ex 12 : La suite $n\mapsto e^{in}$ donne un contre exemple à tous ces genres de résultats, même en comparant les modules des suites.

Def 13 : Deux suites (u_n), (v_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si $\lim_{n\to\infty} u_n-v_n=0$

Prop 14 : Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

Ex 15 : Si (u_n), (v_n) sont deux suites réelles vérifiant $0<v_0<u_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n)$ $v_n=\sqrt{u_nv_n}$. Alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Appli 16 : Critère des séries alternées. Soit (a_n) une suite à termes positifs décroissante vers 0, alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge, le reste R_n vérifiant $|R_n|\leq a_{n+1}$.

2) Valeurs d'adhérence.

[Gou2] 19

Def 17 : Soit (u_n) une suite numérique, on dit que $a\in K$ est une valeur d'adhérence pour (u_n) si : $\forall\varepsilon>0, N\in\mathbb{N}, \exists n\geq N \ |u_n-a|<\varepsilon$.

Ex 18 : Les réels -1 et 1 sont valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$.
Si (u_n) converge, sa limite est en particulier une valeur d'adhérence.

[El Am] 14 15

Def 19 : Soit (u_n) une suite numérique, pour $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une application strictement croissante, on appelle suite extraite de la suite (u_n) la suite $(u_{\varphi(n)})$

Ex 20 : Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des exemples de suites extraites.

Rq 21 : Si $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est strictement croissante, on a $\varphi(n)\geq n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Prop 22 : Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

[Gou2] 19

Prop 23 : Soit (u_n) une suite numérique. On a équivalence entre
(i) a est une valeur d'adhérence pour (u_n).
(ii) Il existe une sous suite de (u_n) qui converge vers a.
(iii) Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a $a\in\overline{A_N}$ où $A_N=\{u_n, n\geq N\}$
(iv) a est point d'accumulation de $A=\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ou $\{n \mid u_n=a\}$ est infini.
L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est donc un fermé de K.

Rq 24 : Si $u_n\to l$, l est l'unique valeur d'adhérence de (u_n).

Ex 25 : La suite $u_n = \sin(n)$ admet $[-1,1]$ comme valeur d'adhérence (sous groupes denses de $\mathbb{R}$).

Théo 28 : (Bolzano Weierstrass) Toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence. Toute suite complexe bornée admet une valeur d'adhérence.

Cor 29 : Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est bornée et admet une unique valeur d'adhérence.

B) Suites de Cauchy.

[Gou2] 20

Def 30 : Soit (u_n) une suite numérique, on dit que (u_n) est de Cauchy si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N,\ p > 0,\ |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

Prop 31 : Toute suite convergente est de Cauchy ; Toute suite de Cauchy est bornée.

Rq 32 : La notion de suite de Cauchy n'est pas topologique mais métrique.

Prop 33 : Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

Rq 34 : Dans un espace métrique général, une suite de Cauchy peut ne pas converger : Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il n'est pas complet.

Prop 35 : Toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge.

Théo 36 : Toute suite numérique de Cauchy est convergente : les espaces métriques $(\mathbb{R}, |.|)$ et $(\mathbb{C}, |.|)$ sont complets.

Ex 37 : Toute série numérique absolument convergente est convergente.

Ex 38 : La série harmonique est divergente car elle n'est pas de Cauchy.

C) Limite inférieure et supérieure.

[ElAm] 358

Def 39 : Soit (u_n) une suite réelle, les suites
$$v_n = \inf_{k \geq n} u_k \quad \text{et} \quad w_n = \sup_{k \geq n} u_k$$
sont bien définies dans $\overline{\mathbb{R}}$ et croissante. On peut donc définir
$$\underline{\lim}_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} v_n \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} w_n$$
$$= \sup_{n \geq 0} \left(\inf_{k \geq n} u_k\right) \qquad = \inf_{n \geq 0} \left(\sup_{k \geq n} u_k\right).$$

Prop 40 : On a $\underline{\lim}\, u_n \leq \overline{\lim}\, u_n$ avec égalité si et seulement si la suite (u_n) converge vers cette valeur commune. [ElAm] 354

Ex 41 : Si $u_n = n^{(-1)^n}$, alors $\underline{\lim}\, u_n = 0$ et $\overline{\lim}\, u_n = +\infty$.

Prop 42 : Si A désigne l'ensemble des valeurs d'adhérences de (u_n) alors $\underline{\lim}\, u_n = \inf(A)$ et $\overline{\lim}\, u_n = \sup(A)$.

II. Exemples de suites particulières.

1) Suites arithmétiques et géométriques.

[ElAm] 3 [Gou2] 193

Def 43 : On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique (de raison a) si il existe a tel que $u_{n+1} = a + u_n$, et géométrique (de raison a) si $u_{n+1} = a u_n$.

Prop 44 : Si (u_n) est une suite arithmétique (resp géométrique) de raison a, alors $u_n = na + u_0$ (resp $u_n = a^n u_0$). Ainsi, une suite arithmétique converge si et seulement si elle est constante, et une suite géométrique converge vers 0 si et seulement si $|a| < 1$, et est bornée si et seulement si $|q| \leq 1$.

Appli 45 Avec les notations précédentes, on a $\sum_p^n u_n = u_0 \frac{a^p - a^{n+1}}{1-a}$ si u est géométrique

2) Suites homographiques.

[Gou2] 193

Def 46 : On dit qu'une suite (u_n) est homographique si elle vérifie une relation de récurrence de la forme $\forall n \in \mathbb{N},\ h(u_n) = u_{n+1}$ avec $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$. (R)
Une telle suite est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ seulement si aucune des valeurs de u_n n'annule $(cx+d)$.

Prop 47 : Soit (u_n) une suite complexe vérifiant (R). On considère l'équation $h(x) = x \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0$.
- Si (E) admet deux racines distinctes α, β, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ où $k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$.
- Si (E) admet une racine double α, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_n - \alpha)^{-1} = (u_0 - \alpha) + kn$ où $k = c(a - \alpha c)^{-1}$

Ex 48 : Si $u_{n+1} = \frac{u_n}{\pi + u_n}$ avec $u_0 = 1$ tend vers 0.

3) Suites récurrentes d'ordre 1.

[ElAm] 38

Nous avons étudié deux exemples d'un phénomène plus général

Def 49 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, on dit que (u_n) est définie par récurrence si $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$.

Rq 50 : Pour que cette définition ait un sens, nous avons besoin que $(u_n) \in I$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour cela que f soit à valeurs dans I.

Cor 51 : Si une suite (u_n) définie par récurrence converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est un point fixe de la fonction f.

Ex52 : La suite $u_0=1$, $u_{n+1}=u_n^2-u_n-3$ ne peut converger que vers -1 ou 3.

[Gou2] 193 Théo53 : Dans le cas où $f(I)\subseteq I$, $u_0\in I$, $f(u_n)=u_{n+1}$, on a

- Si f est croissante, la suite (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de u_1-u_0
- Si f est décroissante, alors $f\circ f$ est croissante, ainsi les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, et leur sens de monotonie est opposé (cf Fig 1).

Ex54 : Pour $u_{n+1}=\sin(u_n)$, sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, la suite converge vers 0.

Ex55 : Sur $I=[0,1]$, $u_{n+1}=(2-\sqrt{u_n})^{-1}$ (u_n) converge vers 1.

[Rou] 153 DVP Appli56 (Méthode de Newton) Soit $f\in C^2([c,d],\mathbb{R})$, $f(c)<0<f(d)$ et $f'>0$ sur $[c,d]$. Soit a l'unique zéro de f sur $[c,d]$. On pose $u_{n+1}=F(u_n)$ où $F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors

1) Il existe $z\in[a,x]$ tel que $F(x)-a=\frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}|x-a|^2$.

2) $\exists C>0 \mid \forall x\in[c,d]$ $|F(x)-a|\leq C|x-a|^2$ et $\exists \alpha>0 \mid F(I)\subset I$ avec $I=[a-\alpha,a+\alpha]$ et pour tout $x_0\in I$, la convergence de (u_n) vers a est quadratique.

3) Si de plus, $f''(x)>0$ sur $[c,d]$, alors $I=[a,d]$ est F-stable et $\forall x_0\in I$, (u_n) est décroissante avec $0\leq u_{n+1}-a\leq C|x_n-a|^2$ et $u_{n+1}-a\sim\frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n-a)^2$.

4) Suites équiréparties.

[FGN2] 47 Def57 : Soit (u_n) une suite de $[0,1]$, pour $0\leq a<b\leq 1$, on pose $S_n(a,b)=\#\{k\in[\![1,n]\!] \mid u_k\in[a,b]\}$. On dit que (u_n) est équirépartie si pour tout $0\leq a<b\leq 1$, $\lim \frac{S_n(a,b)}{n}=b-a$.

Prop58 : (Critère de Weyl) On a équivalence entre
(i) (u_n) est équirépartie (ii) $\forall f\in C([0,1],\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(u_k)=\int_0^1 f(t)dt$
(iii) $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2i\pi p u_k}=0$.

[Gou2] 125 Cor59 (Somme de Riemann) Si $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ est continue par morceaux
$\lim \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(t)dt$.

III Comportement asymptotique.

1) Sommation des équivalents.

[Gou2] 202 Théo60 : Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, tel que $u_n\sim v_n$, alors
Si $\sum u_n$ CV, $\sum v_n$ CV et $\sum_{n}^{\infty}u_n\sim\sum_{n}^{\infty}v_n$

2) Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge et $\sum_{k=0}^{n}u_k\sim\sum_{k=0}^{n}v_k$ [Gou2] 202

Appli60 Soit H_n la n-ème somme partielle de la série harmonique, alors $H_n=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{2n}\right)$.

2) Formule de Stirling.

Prop61 : Soit $\sum u_n$ une série télescopique associée à la suite (a_n). Alors la série $\sum u_n$ et la suite (a_n) sont de même nature et en cas de convergence on a $\sum_{k=1}^{\infty}u_k=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)-a_0$ [ElAm]

Formule de Stirling. On a l'équivalence $n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$. DVP

3) Moyenne de Cesàro.

Def62 : Soit (u_n) une suite numérique. On appelle suite des moyennes de Cesàro la suite $(v_n)=\frac{1}{n}(u_1+\dots+u_n)$.

Prop63 : La moyenne de Cesàro d'une suite convergente converge vers la même limite.

Def64 Si la moyenne de Cesàro d'une suite converge, on dit qu'elle converge en moyenne de Cesàro.

Ex65 : La réciproque de la proposition 63 est fausse : $(-1)^n$ converge en moyenne de Cesàro, mais pas en général.

Appli66 : Si (u_n) converge vers $l\neq 0$, si $u_n\neq 0$ pour $n\geq 1$. Alors la suite (v_n) définie par $\frac{n}{v_n}=\frac{1}{u_1}+\dots+\frac{1}{u_n}$ converge vers l.

Appli67 (Théorème de Fejér) La moyenne de Cesàro de la série de Fourier d'une application 2π périodique continue f converge uniformément vers f.