221
Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Refs : [Gou2] Gourdon, Analyse ; [Pom] Pommellet, Cours d'analyse ; [FGNAn4] Francinou Gianella Nicolas, Analyse 4 ; [Dem] Demailly, Analyse numérique et équations différentielles.

Dev :
18 Hill Mathieu [ZQ]
91 Bessel [FGNAn4]

Cadre : On fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle.

I. Définitions, existence de solutions, structure.

1) Existence et unicité.

Def 1 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, toute équation différentielle sur $\mathbb{K}^m$ du type
$$Y^{(p)}(t) = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)}(t) + \dots + A_0(t)Y + B(t) \qquad (L)$$
où $A_0, \dots, A_{p-1} : I \to \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ sont des fonctions continues, de même que $B : I \to \mathbb{K}$, est dite équation linéaire d'ordre p.
Si B est identiquement nulle, on dit que (L) est homogène.

Gou2 357 358

Rq 2 : À toute équation linéaire d'ordre p, on peut associer une équation linéaire d'ordre 1 ; en posant $\mathcal{Y}(t) = (Y(t), Y'(t), \dots, Y^{(p-1)}(t))$, on a
$$\mathcal{Y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_m & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ & & & I_m \\ A_0(t) & \dots & & A_{p-1}(t)\end{pmatrix}\mathcal{Y} + \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ B(t)\end{pmatrix}.$$
Toute solution de cette dernière équation induit une solution de (L) et réciproquement, il suffit donc d'étudier (théoriquement) les équations linéaires d'ordre 1.

On considère par défaut une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme $y' = A(t)y + B(t)$. $(A, B \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_m(\mathbb{K})) \times \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^m))$ (L1).

Théo 3 : Pour tout $t_0 \in I$, $X_0 \in \mathbb{K}^m$, il existe une unique solution V de (L1) définie sur I entier, et telle que $V(t_0) = X_0$. (Théorème de Cauchy Lipschitz linéaire).

Rq 4 : La version de ce théorème pour les équations différentielles linéaires d'ordre p nous apprend que, dans (L), il existe pour tous $t_0 \in I$, $X_0, \dots, X_{p-1} \in \mathbb{K}^m$, une unique solution φ définie sur I et telle que $\varphi(t_0) = X_0$, $\varphi'(t_0) = X_1, \dots, \varphi^{(p-1)}(t_0) = X_{p-1}$.

Rq 5 : Ce sont bien les coefficients en y qui doivent être linéaires : l'équation $y' = t^2 y$ est bien linéaire.

Ex 6 : L'équation $y'' + 2y' + y = te^t$ est linéaire, en posant $Z = (y, y')$, on a
$Z'(t) = \begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\end{pmatrix}Z(t) + \begin{pmatrix}0\\te^t\end{pmatrix}$. On reviendra sur les solutions de cette équation.

Rq 7 : En intégrant dans (L1), on trouve une forme équivalente du problème : la solution de (L1) valant X_0 en t_0 est
$$Y(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(t)Y(t) + B(t))\,dt.$$

Ex 8 : Dans le cas non linéaire, on n'a pas unicité : $y' = 3|y|^{2/3}$ le problème de Cauchy avec condition initiale $y(0) = 0$ admet deux solutions globales $y \equiv 0$ et $y(t) = t^3$.

2) Structure de l'espace des solutions.

Théo 9 : Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une fonction continue, l'ensemble S_H des solutions maximales de l'équation différentielle linéaire homogène $Y'(t) = A(t)Y(t)$ est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$. [Gou2 358]

Cor 10 : Dans une équation différentielle linéaire d'ordre p sur $\mathbb{K}^m$, l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K}^m)$ de dimension mp.

Cor 11 : L'ensemble des solutions de (L1) est un espace affine de dimension n sur K : Toute solution V de (L1) s'écrit $V_H + V_0$ où V_0 est une solution particulière fixée de (L1) et V_H une certaine solution de l'équation homogène associée à (L1).

Rq 12 : (Principe de superposition) Si l'on connaît pour $i \in [\![1, r]\!]$, une solution Y_i à l'équation $Y' = AY + B_i$, alors $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i Y_i$ est solution de l'équation $Y' = AY + B$ où $B = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i B_i$. [Pom 393]

On considère (H) l'équation homogène associée à (L1).

Def 13 : On considère $Y_1, \dots, Y_n$ n solutions de (H), on appelle wronskien de $Y_1, \dots, Y_n$ l'application $W : t \mapsto \det(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$. [Gou2 359]

Ex 14 : Dans le cas d'une équation linéaire homogène d'ordre 2 $y'' = p(t)y' + q(t)y$, le wronskien de u, v est donné par $\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v'\end{vmatrix} = uv' - u'v$.

Prop 15 : Si $f_1, \dots, f_n$ sont n solutions de (H), le wronskien de $f_1, \dots, f_n$ est donné par $\forall a, t \in I$, $W(t) = W(a)\exp\left(\int_a^t \operatorname{tr} A(u)\,du\right)$. 368.

Prop 16 : Le rang des vecteurs $V_1(t), \dots, V_n(t)$ ne dépend pas de $t \in I$. Ainsi ils forment une base de S_H si et seulement si il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$, c'est alors le cas sur I tout entier.

Appl 17 : Théorème d'entrelacement de Sturm : Soient y_1, y_2 deux solutions indépendantes de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont continues. Alors les zéros de y_1 sont isolés entre deux zéros consécutifs de y_2 ou il existe un unique zéro de y_2. [FGNAn4 135]

Ex 18 : Équation de Hill Mathieu : Étude de l'équation différentielle linéaire $y'' + qy = 0$, où $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et π-périodique et paire. DVP [ZQ]

II. Résolution explicite.

1) Cas des coefficients constants.

- **Solutions générales du système (H) : $Y'(t) = A(t)Y(t)$**

[Dem 198 201] Le cas $n=1$ est déjà connu et donné par $y(t) = Ce^{a(t)}$ où $C \in K$ est une constante, on cherche à généraliser ce raisonnement.

Prop 19 : Si A est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ dans une base $V_1, \dots, V_n$ (A est diagonalisable donc). Une solution générale s'écrit sous la forme
$$Y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} V_n \qquad \alpha_i \in K.$$

Ex 20 : Si $a \neq 0$, les solutions de $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} Y$ ont une base $\left(e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e^{at}\begin{pmatrix}1\\a-1\end{pmatrix}\right)$.

Quand A n'est pas diagonalisable, on aura recours au calcul d'une exponentielle de matrice.

Théo 21 : La solution de H telle que $Y(0) = V_0$ est donnée par $Y(t) = e^{tA}V_0$.

[Gou2 361 363] Ex 22 : $\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$ se réécrit $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, les solutions réelles générales sont de la forme $Y = \lambda e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t - \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}$

Méthode 23 : Si on a une équation d'ordre p : $y^{(p)}(t) + a_{p-1} y^{(p-1)}(t) + \dots + a_0 = 0$, alors on appelle polynôme caractéristique de l'équation $P = a_0 + a_1 X + \dots + X^{p-1}$ si P est scindé sur K de la forme $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{m_i}$, on a que les solutions de E sont de la forme : $t \mapsto \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} P_i(t)$ avec $\deg(P_i) < m_i$.

Ex 24 : L'équation de l'exemple 16 : $y'' + 2y' + y = te^{t}$ a pour solutions homogènes $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- **Solutions générales du système (L1) : $Y' = AY + B$**

Les solutions générales sont données (cf. cor 11) par la somme d'une solution particulière et des solutions homogènes. Comme on a vu le calcul des solutions des équations homogènes, il suffit de trouver une solution particulière.

[Dem 202] Si aucune solution évidente n'apparaît, on peut toujours utiliser la méthode de variation des constantes : on cherche une solution particulière sous la forme $Y(t) = e^{tA}V(t)$, où $V(t)$ est supposé différentiable, on trouve la condition $B(t) = e^{tA}V'(t)$, d'où par exemple $V(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-uA}B(u)\,du$ $t_0 \in I$

Rq 25 : Dans le cas où le second membre a une forme particulière ($P(t)e^{\alpha t}$ par exemple), on peut chercher une solution particulière sous cette forme pour gagner du temps.

Ex 26 : Les solutions de $y'' + y = \tan^2(t)$ $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sont $y(t) = \alpha\cos t + \beta \sin t - 2 + \sin t \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$

[Pom ~327] Appli 27 : Soit $f \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{C})$ telle que $f' + f \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, alors $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$

2) Cas des coefficients variables.

[Gou2 359, 361] On n'a pas de méthode générale pour résoudre un système différentiel homogène à coefficients non constants. Mais comme précédemment, si l'on connaît n solutions linéairement indépendantes de (H) l'équation homogène associée. Elles forment une base de l'espace des solutions homogènes. On peut appliquer la méthode de variation des constantes pour trouver une solution particulière. Soient $V_1, \dots, V_n$ une base de solutions homogènes, on cherche une solution particulière sous la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) V_i(t)$. On obtient l'équation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) V_i(t) = B(t)$, qui demande d'inverser un système linéaire pour trouver $\lambda_i'(t)$ en fonction de B et des V_i.

Ex 26 : Dans le cas $n=2$, si $y'' + a(t)y' + b(t) = c(t)$, si $\begin{pmatrix}u\\u'\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}v\\v'\end{pmatrix}$ sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée, on a un système linéaire
$$\begin{cases} \lambda' u + \mu' v = 0 \\ \lambda' u' + \mu' v' = c(t) \end{cases}$$
à résoudre.

Pour $t^2 y'' - 2y = 3t^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, t^2 et $\frac{1}{t}$ sont des sols homo indep, d'où le $\begin{cases} \lambda' t^2 + \frac{\mu'}{t} = 0 \\ 2\lambda' t - \frac{\mu'}{t^2} = 3 \end{cases}$ qui donne les solutions $t \mapsto \alpha_1 t^2 + \frac{\beta_1}{t} + t^2 \ln|t| - \frac{t^2}{3}$

Prop 27 : Dans le cas d'une équation d'ordre 1 sur K (E) $y' = a(t)y + b$, les solutions de (H) l'équation homogène associée sont $y = Ce^{A(t)}$ où A est une primitive de a. Puis on a une solution particulière $y_1 = \lambda(t)e^{A(t)}$ où λ est une primitive de $b(t)e^{-A(t)}$

Ex 28 : Pour $(1+t^2)y' = ty + (1+t^2)$, les solutions sont $\sqrt{1+x^2}\left(\mu + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right)$.

Méthode de Liouville.

[Pom ~412] Dans l'équation (L) : $y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$, si l'on connaît une solution u de l'équation homogène associée, on peut chercher une solution sous la forme $y = uz$ où z est de classe C^2. On trouve alors que $uz'' + (2u' + au)z' = c$ sur un intervalle J où u ne s'annule pas, en posant $v = z'$, on obtient une équation du premier ordre qui, résolue, donne toutes les solutions de notre équation sur J.

Ex 29 : L'équation $(x+1)y'' - y' - xy = 0$ possède $u = e^{x}$ comme solution particulière. On en déduit les solutions générales $Be^{x} + C(2x+3)e^{-x}$

Rq 30 : Quand les coefficients sont des polynômes, on peut chercher des solutions développables en série entière dont on détermine ensuite les coefficients. Avant d'éventuellement montrer l'unicité.

Ex 31 : Équation de Bessel : $xy'' + y' + xy = 0$

OVP

III Etude qualitative

1) Etude de stabilité

[Dem] 281 284 On se place ici dans le cas d'un problème de Cauchy (C) $\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_0)=z_0 \end{cases}$, dont on suppose qu'une solution maximale est définie sur $[t_0,+\infty[$.

Def 31: Soit $y(t,z)$ la solution maximale de (C) telle que $y(t_0,z)=z$. On dira que $y(t,z_0)$ est stable s'il existe une boule $B(z_0,r]$ et une constante $C>0$ telle que (Cf Fig 1).

(i) $\forall z\in B(z_0,r)$, $t\mapsto y(t,z)$ est définie sur $[t_0,\infty[$

(ii) $\forall z\in B(z_0,r]$, $t\geq t_0$, on a $\|y(t,z_0)-y(t,z)\|\leq C\|z-z_0\|$

Elle est dite asymptotiquement stable si elle est stable et si la condition (ii)' plus forte que (ii) est satisfaite:

(ii)' $\exists B(z_0,r]$, $\gamma:[t_0,\infty[\to\mathbb{R}_+$ continue avec $\lim_{t\to\infty}\gamma(t)=0$, telle que $\forall z\in B(z_0,r]$, $t\geq 0$ $\|y(t,z)-y(t,z_0)\|\leq\gamma(t)\|z-z_0\|$

Revenons au cas $Y'=AY$ d'un système linéaire

Théo 32: Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ les valeurs propres complexes de la matrice A. Alors les solutions de $AY=Y'$ sont

- asymptotiquement stables si et seulement si $Re(\lambda_j)<0$ $\forall j\in 1,\dots,m$
- stables si et seulement si $Re(\lambda_j)<0$ ou $Re(\lambda_j)=0$ et le bloc de Jordan corresp est diagonalisable.

Théo 33 (Lemme de Gronwall) Soient $\varphi,\psi,y:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ continues et telles que $\forall t\in[a,b]$ $y(t)\leq\varphi(t)+\int_a^t\psi(s)y(s)ds$. Alors $y(t)\leq\varphi(t)+\int_a^t\varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t\psi(u)du\right)ds$.

Gou2 348 On a une inégalité sur y en partant d'une inégalité intégrale sur u

Cor 34 Soit $y:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de classe C^1 vérifiant $\|y'\|\leq\beta+\alpha\|y(t)\|$ pour $\beta\geq 0$, $\alpha>0$. Alors $\|y(t)\|\leq\|y(a)\|e^{\alpha(t-a)}+\frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha(t-a)}-1\right)$.

Rq 35 Ce dernier résultat permet de majorer les erreurs sur les solutions.

2) Etude qualitative des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$.

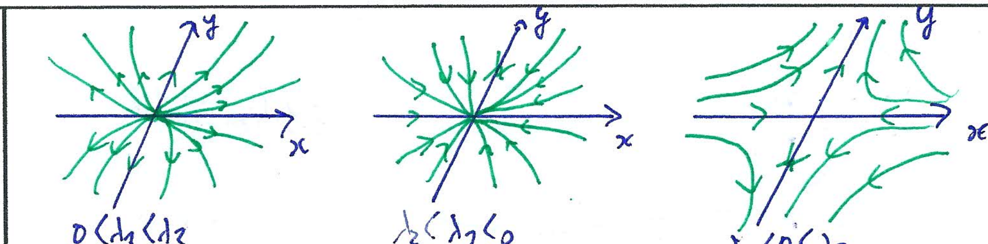
On considère $Y'=AY$ avec $Y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{R})$. En posant $Y=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on a le système $\begin{cases}x'=ax+by\\y'=cx+dy\end{cases}$, l'allure des trajectoires des solutions va dépendre des valeurs propres λ_1,λ_2 de A.

[Dem] 290 294

- Si λ_1 et λ_2 sont réelles. (ie $(a-d)^2+4bc\geq 0$).

Si $\lambda_1\neq\lambda_2$ après changement de base, on peut supposer $\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=A$ les solutions sont donc de la forme $Y=\begin{pmatrix}x_0e^{\lambda_1t}\\y_0e^{\lambda_2t}\end{pmatrix}$. On discute alors selon les signes de λ_1 et λ_2.

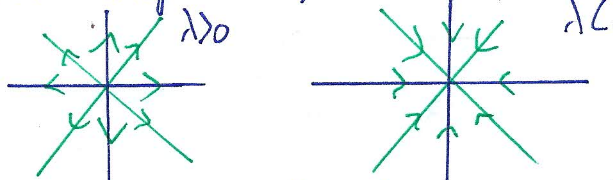
[Dem] 290 294



$0<\lambda_1<\lambda_2$ noeud impropre instable — $\lambda_2<\lambda_1<0$ noeud impropre stable — $\lambda_1<0<\lambda_2$ col instable

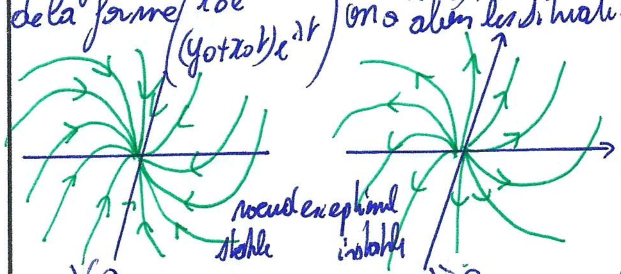
Si $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, il faut distinguer si A est diagonalisable ou non.

- Si A est diagonalisable, alors dans toute base, $Y=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}e^{\lambda t}$, et on a



$\lambda>0$ — $\lambda<0$.

A présent, si A n'est pas diagonalisable, alors elle se trigonalise sous la forme $\begin{pmatrix}\lambda&0\\1&\lambda\end{pmatrix}$, les courbes intégrales sont donc de la forme $\begin{pmatrix}x_0e^{\lambda t}\\(y_0+x_0t)e^{\lambda t}\end{pmatrix}$ on a alors la situation



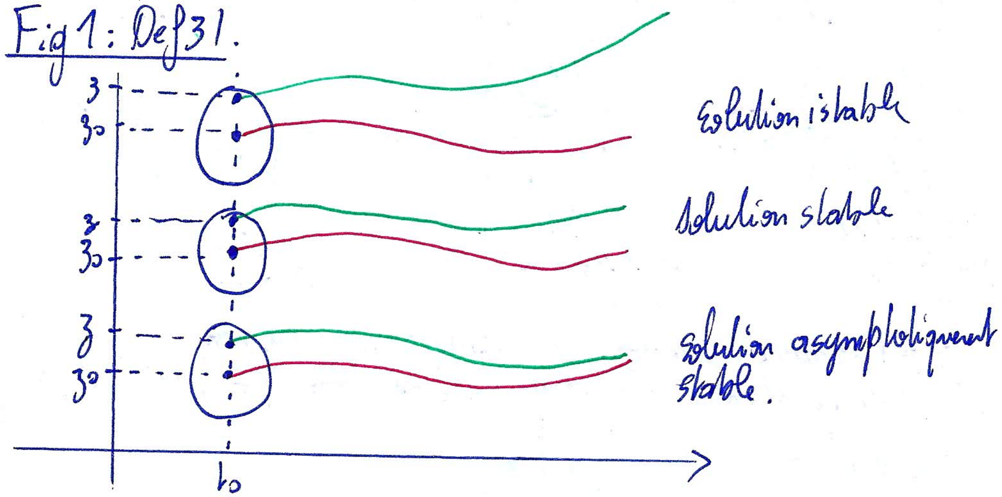
noeud exceptionnel stable ($\lambda<0$) — instable ($\lambda>0$)

- Si λ_1 et λ_2 sont complexes. On note $\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$ avec $\beta>0$.

On obtient un système $\begin{cases}x'=\alpha x-\beta y\\y'=\beta x+\alpha y\end{cases}$ qu'on résout en posant $z=x+iy$, on obtient $z=z_0e^{\alpha t}e^{i\beta t}$, donc en coordonnées polaires, $Y(t)=r_0e^{\frac{\alpha}{\beta}(\theta-\theta_0)}$

$\alpha>0$ foyer instable — $\alpha<0$ foyer stable — $\alpha=0$ Centre

Fig 1 : Def 31.


z
z0
Solution instable
z
z0
Solution stable
z
z0
Solution asymptotiquement stable.
t0