220 Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

Refs : [Dem] Analyse numérique [Gou2] Gourdon Analyse. [Rou] Petit guide du calcul diff.
[ZQ] Zuily Queffélec Analyse pour l'agrégation. [FGN4] Analyse 4
[FGN4]

Devt : 37 Benel
36 Hill Mathieu

I. Étude générale des équations différentielles.

1) Équations différentielles, solutions, définitions.

[Dem] 125

On considère U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue. On considère l'équation différentielle

$$y' = f(t,y) \quad , t\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^m \quad (t,y)\in U \qquad (E).$$

Def 1 : On appelle solution de (E) la donnée d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que
- $\forall t\in I$, $(t, y(t))\in U$
- $\forall t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$.

[Gou2] 353 354

Rq 2 : On peut chercher à être plus général en considérant des équations d'ordre supérieur : si $f : V \to \mathbb{R}^m$ est continue où V est un ouvert de $\mathbb{R}\times\underbrace{\mathbb{R}^m\times\dots\times\mathbb{R}^m}_{p\text{ fois}}$. On considère l'équation d'ordre p

$$y^{(p)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(p-1)}) \qquad (E')$$

Mais une telle équation induit une équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^{mp}$ en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(p-1)}\end{pmatrix}$ et $F(t,Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(t, y_1, y_2, \dots, y_p)\end{pmatrix}$ en obtient que Y est solution de $Y' = F(t, Y)$ si et seulement si y est solution de (E'). On peut donc se contenter théoriquement d'étudier les équations d'ordre 1.

[Dem] 126 129

Def 3 : Étant donnés un point $(t_0, y_0)\in U$, on appelle problème de Cauchy (associé à (E) et (t_0,y_0)) le problème consistant à trouver une solution de (E) définie en t_0 avec $y(t_0) = y_0$.

Def 4 : Soient $y : I \to \mathbb{R}^m$ et $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ deux solutions de (E), on dit que $\tilde{y}$ est un prolongement de y si $I \subseteq \tilde{I}$ et $\tilde{y}_{|I} = y$.
On dit que y est maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ tel que $I \subsetneq \tilde{I}$.

Rq 5 : Une solution maximale n'est pas forcément globale comme nous le verrons.

Def 6 : On suppose ici que $U = J\times\Omega$ où J est un intervalle réel ouvert et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. On dit qu'une solution de (E) est globale si elle est définie sur J tout entier.

[Dem] 130

Ex 7 : Considérons (E) : $y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. La solution $y : t \mapsto -\frac{1}{t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est maximale non globale.

Prop 8 : Si la fonction f est de classe C^k pour $k\in\mathbb{N}$, alors toute solution de (E) est de classe C^{k+1}.

2) Existence, unicité des solutions.

[Dem] 131

Prop 9 (Forme de Duhamel) Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^m$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si on a
- y est continue et $\forall t\in I$, $(t, y(t))\in U$
- $\forall t \in I$, on a $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\,du$.

[Rou] 170

Rq 10 : On peut ainsi voir y comme la solution d'un problème de point fixe, ce qui donne lieu au théorème suivant.

Théo 11 (Cauchy Lipschitz global). Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle et $f : I\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue et globalement Lipschitzienne en sa seconde variable : $\exists k>0 \mid \forall t\in I$, $y, \tilde{y}\in\mathbb{R}^m$, $\|f(t,y) - f(t,\tilde{y})\| \leq k\|y-\tilde{y}\|$, où $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^m$. Alors tout problème de Cauchy admet une unique solution, globale.

Rq 12 : Ce théorème s'applique en particulier au cas où f est linéaire en sa seconde variable. Il reste cependant assez restrictif dans la plupart des cas et possède une version plus générale mais aux conclusions moins fortes que nous présentons.

[Dem] 138, 141

Théo 13 (Cauchy Lipschitz local) Avec les notations du théorème 11, si f est localement lipschitzienne en sa seconde variable, ie
$\forall K\subseteq\mathbb{R}^m$ compact $\exists C_K \mid \forall t\in I, y,\tilde{y}\in\mathbb{R}^m$, $\|f(t,y) - f(t,\tilde{y})\| \leq C_K\|y-\tilde{y}\|$.
Alors tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale.

Rq 14 : En considérant l'exemple 7, on voit qu'une solution globale peut ne pas exister dans le cas où f est seulement localement lipschitzienne en y.

Rq 15 : Le théorème 13 s'applique en particulier quand f est de classe C^1.

Ex 16 : Pour l'équation (E) : $y' = 3|y|^{2/3}$, le problème de Cauchy en $(0,0)$ admet deux solutions maximales car globales :

$$y_1 : t\mapsto 0 \qquad y_2 : t\mapsto t^3 \qquad t\in\mathbb{R}$$

La fonction $f : t, y \mapsto |y|^{2/3}$ n'étant pas localement lipschitzienne autour de 0.

[Dem] 138 Théo 17 (Cauchy Péano Arzela) Si $f: I\times\Omega \to \mathbb{R}^m$ est continue, tout problème de Cauchy admet une solution maximale (pas forcément unique).

2) Outils pour l'étude des solutions.

[Dem] 377 378. Prop 18 (Gronwall) Soient φ, ψ, y trois fonctions continues sur un segment $[a,b]$, à valeurs positives et vérifiant $\forall t\in[a,b]$, $y(t)\leq \varphi(t)+\int_a^t \psi(s)y(s)ds$

Alors on a $\forall t\in[a,b]$, $y(t)\leq \varphi(t)+\int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)ds$

Rq 19 : Ce résultat est utile pour des majorations d'erreur.

Cor 20 : Soit $y:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ de classe C^1 vérifiant $\|y'(t)\|\leq \beta+\alpha\|y(t)\|$ pour $\beta,\alpha\geq 0$ alors $\forall t\in[a,b]$, $\|y(t)\|\leq \|y(a)\|e^{\alpha(t-a)}+\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-a)}-1)$

Ex 21 : Si $q:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ est de classe C^1 et strictement positive, et croissante, alors toute solution de l'équation $y''+qy=0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$. $a,b\in\mathbb{R}$.

[Dem] 138 Théo 22 : (Critère de maximalité) Une solution $y:]a,b[\to\mathbb{R}^m$ de (E) est maximale si et seulement si pour tout compact $K\subseteq U$ la courbe $(t,y(t))$ sort de K quand $t\to a^+$ ou $t\to b^-$, ou de manière équivalente si $(t,y(t))$ tend vers le bord de U ou vers l'infini.

Ex 23 : $t\mapsto -\frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est une solution maximale de $y'=y^2$.

[ZQ] 371 Cor 24 : Si $f: I\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ est continue bornée, alors toute solution à un problème de Cauchy est globale.

Ex 25 : $f(t,y)=\frac{y^2}{1+y^2}$ donne une unique solution globale.

Cas linéaire : Wronskien. On considère ici un système de la forme $Y'=A(t)Y$ où (L) $A: t\mapsto A(t)\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est continue.

[Dem] 213 Déf 26 : Si $Y_1,\dots,Y_m$ sont des solutions de (L), on appelle wronskien de ces solutions la fonction $W(t):=\det(Y_1(t),\dots,Y_m(t))$ c'est une fonction continue de t.

Prop 27 : Avec les notations précédentes et en posant $V_i:=Y_i(0)$, on a
$$W(t)=\exp\left(\int_{t_0}^t \mathrm{tr}\,A(u)du\right)\det(V_1,\dots,V_m)$$

Ainsi le wronskien ne change pas de signe et indique si des solutions sont indépendantes.

[FGN 4] Théo 28 (Entrelacement de Sturm) Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y''+a(t)y'+b(t)y=0$, où a et b sont continues. Alors les zéros de y_1 sont isolés et entre deux zéros consécutifs de y_1 il y a un unique zéro de y_2

II. Stabilité des solutions d'un système autonome.

1) Définitions.

On dit que l'équation (E) est autonome si f est constante par rapport à sa première variable (le champ de vecteurs associé ne dépend pas du temps). Si (E) est une telle équation, on peut considérer les points d'équilibre du système, définis comme les $y_0\in\mathbb{R}^m$ tels que $f(y_0)=0$. [ZQ] 380 382

On sait que la solution maximale du problème de Cauchy aux données initiales (t_0,y_0) où y_0 est un point d'équilibre, est constante, mais qu'en est-il d'une solution perturbée, aux données initiales $(t_0,y_0+\varepsilon)$.

Déf 29 : Un point d'équilibre y_0 est dit stable si pour $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que pour y solution de (E) avec $|y(t_0)-y_0|<\delta$, on ait $|y(t)-y_0|<\varepsilon$ pour $t\geq t_0$ (et y doit être définie sur $[t_0,\infty[$).

On dit que y_0 est instable sinon. Enfin y_0 est dit asymptotiquement stable s'il existe $\delta>0$ tel que $|y(t_0)-y_0|<\delta \Rightarrow y$ définie sur $[t_0,\infty[$ et $\lim_{t\to\infty} y(t)=y_0$ (Gourdon) pour y solution de (E).

Ex 30 : Pour $y'=ay$ sur $\mathbb{R}$, on a 0 comme unique point d'équilibre si $a\neq 0$, il est stable si et seulement si $a<0$.

2) Cas linéaire.

On se place à nouveau dans le cas où $f(t,y)=A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donne un système différentiel linéaire, cette fois-ci autonome. [Dem] 284, 290-294

Théo 31 : Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres complexes de A, le point d'équilibre 0 est
- asymptotiquement stable si et seulement si $Re(\lambda_j)<0$ $\forall j\in[\![1,n]\!]$.
- stable si et seulement si ($\forall j\in[\![1,n]\!]$, $Re(\lambda_j)<0$ ou $Re(\lambda_j)=0$ et le bloc correspondant dans la réduite de Jordan de A est diagonal).

En dimension 2, on considère $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ de déterminant non nul (0 est le seul point d'équilibre), et λ_1,λ_2 les valeurs propres de A. On travaille par disjonction de cas.
- Si $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ et $\lambda_1\neq\lambda_2$, on a un noeud impropre, stable (asymptotiquement) si λ_1 et λ_2 sont négatifs, instables si λ_1 et λ_2 sont positifs. Si λ_1 et λ_2 sont de signes différents, on a un col (instable)
- Si $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ et $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, on distingue selon si A est diagonalisable.
  - Si A est diagonalisable on a un noeud propre, stable ou instable selon $\lambda<0$ ou $\lambda>0$.
  - Si A n'est pas diagonalisable, alors on a un noeud exceptionnel, stable

[Dem] 294

ou instable toujours selon si $\lambda<0$ ou $\lambda>0$.

- Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, avec $Re(\lambda_1)=\alpha\neq 0$, on a un foyer, instable si $\alpha>0$ et stable (asymptotiquement) si $\alpha<0$
- Si $\lambda_1 \lambda_2 \in i\mathbb{R}$, alors on a un centre, les solutions sont cycliques donc stable mais pas asymptotiquement (Fig 2.)

3) Cas général.

On revient ici à un système différentiel autonome général, si f_0 en est un point d'équilibre, on peut quitte à translater se ramener au cas $y_0=0$. On étudie alors le système différentiel linéaire : $z'=Az$ où $A=Jf_0$.

[Rou] 143

Théo 32 (Liapounov) Si la matrice A a toutes ses valeurs propres de partie réelles strictement négatives, alors 0 est un point d'équilibre attractif du système.

Contrairement au cas linéaire, si Jf_0 a une valeur propre de partie réelle nulle, on ne peut rien conclure

[Dem] 297

Ex 33 : $\begin{cases} x'(t)=\alpha x^3 \\ y'=\beta y^3 \end{cases}$, on a $Jf_0=0$ et $(0,0)$ est asymptotiquement stable si $\alpha<0, \beta<0$. instable si $\alpha>0$ ou $\beta>0$.

[FGN4] 183

Ex 34 : $\begin{cases} x''+\varepsilon(x^2-1)x'+x=0 \\ x(0)=x_0 \quad x'(0)=x_1 \end{cases}$ $\varepsilon<0$ Alors $Jf_0=\begin{pmatrix}0&1\\-1&\varepsilon\end{pmatrix}$ et 0 est asymptotiquement stable.

III. Exemples d'études.

1) Equation particulière

[Dem] 164 165

Il est rare en pratique que l'on puisse exhiber une solution d'une équation différentielle arbitraire, c'est surtout possible dans le cas linéaire, auquel on cherche donc à se ramener.

Equations de Bernoulli. Equations de la forme $y'=p(t)y+q(t)y^\alpha$ $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. avec p,q continues. On se place dans le demi plan supérieur $U=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.

En multipliant par $y^{-\alpha}$, on trouve $y^{-\alpha}y'=p(t)y^{1-\alpha}+q(t)$, en posant $z=y^{1-\alpha}$ on trouve $\frac{1}{1-\alpha}z'=p(t)z+q(t)$, on s'est ramené à une équation linéaire en z, qu'il reste à résoudre.

[Dem] 164 165.

Equation de Riccati. On part d'une équation de la forme $y'=a(t)y^2+b(t)y+c(t)$ avec a,b,c continues. Si l'on connait y_1 une solution particulière de cette équation, on pose $z=y+y_1$ et on trouve.

$$z'=(2a(t)y_1+b(t))+a(t)z^2.$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha=2$, on se ramène alors à une équation linéaire en posant $\omega=\frac{1}{z}$.

Ex 35 : $(1-t^3)y'+t^2y+y^2-2t=0$, t^2 est une solution particulière, qui permet de trouver l'équation linéaire $w'=\frac{3t^2}{1-t^3}\omega+\frac{1}{1-t^3}$. $t\neq 1$.

Théo 36 (Hill Mathieu) Soit $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue π périodique et paire. On considère l'équation différentielle $y''+qy=0$. Soit W l'espace des solutions complexes de cette équation et $A: f\in W\mapsto f(x+\pi)\in W$. Alors

$|T_2(A)|<2 \iff$ toutes les solutions sont non nulles et bornées

$|T_2(A)|=2 \Rightarrow$ l'équation possède une solution non nulle bornée

$|T_2(A)|>2 \iff$ toutes les solutions non nulles sont non bornées. DVP

2) Utilisation des séries entières.

[FGN4] 250, 283

Si l'équation est à coefficients polynomiaux, on peut chercher les solutions développables en séries entières autour de 0. (Si cette solution est maximale, elle est unique par Cauchy Lipschitz)

Ex 37 : $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1\end{cases}$ a pour solution $t\mapsto\sum\frac{t^n}{n!}=\exp t$.

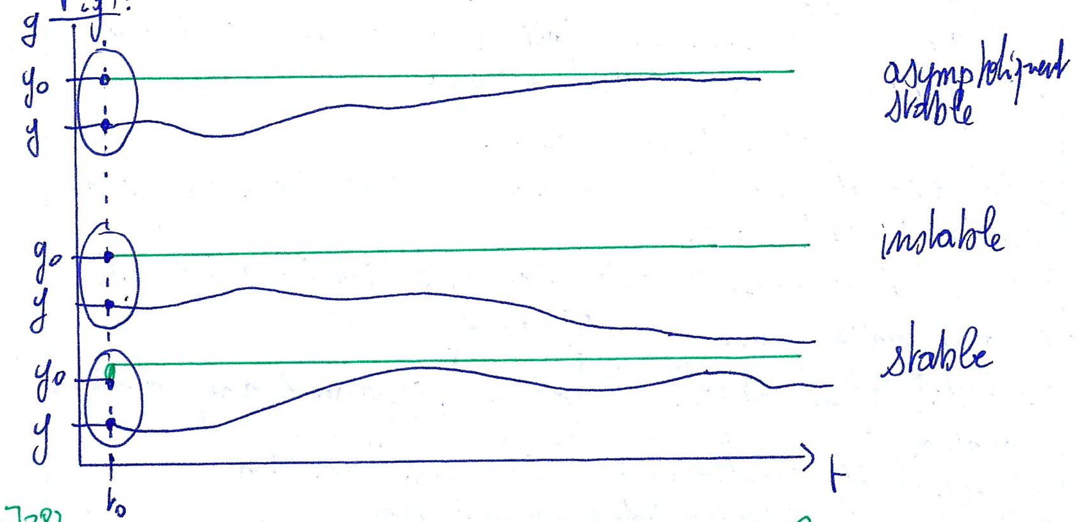
Ex 38 (Bessel) L'équation de Bessel $xy''+xy+y'=0$ a pour solution valant 1 en 0 une fonction développable en série entière, de plus toute solution sur $]0,a[$ indépendante de la première est non bornée au voisinage de 0 DVP

3) Système de Lotka Volterra.

Système classique modélisant une interaction proie prédateur, Soient $a,b,c,d,x_0,y_0\in\mathbb{R}_+^*$ On considère le système $\begin{cases} x'=x(a-by) & x(0)=x_0 \\ y'=y(-c+dx) & y(0)=y_0\end{cases}$

Il admet une unique solution maximale globale, qui est périodique (Le système admet deux points d'équilibre, un col et un centre.

Fig1:



[Dem]282

(Fig2).