215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Refs : [Gou2] Gourdon, analyse [Rou] Rouvière, petit guide du calcul diff. [BP] Briane Pagès. Théorie de l'intégration [All] Allaire, Analyse numérique et optimisation.

Devt : Surjectivité de l'exponentielle (98) [Zav]
Lemme de Morse (53) [Rou]
Extrema liés (57, 58) [Avez]
Brouwer.

Cadre : On se donne $n, m \geq 1$ des entiers et U, V deux ouverts respectivement de E et F deux $\mathbb{R}$-ev de dim respective n et m.

I. Généralités sur la différentiabilité.

1) Différentielles

[Gou2] 303 304

Def1 : Une application $f : U \to F$ est dite différentiable en un point $a \in U$ s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que
$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|) \quad \text{quand } h \to 0.$$
Si elle existe, φ est unique et on l'appelle la différentielle de f en a, notée df_a.
Si f est différentiable en tout point de U, on la dit différentiable sur U. L'application $df : U \to \mathcal{L}(E,F)$ associant df_a à a est appelée différentielle de f. Si df est continue, alors f est dite de classe C^1.

Ex2 : Si $n = m = 1$, alors f différentiable en $a \iff f$ est dérivable en a, avec $df_a(h) = f'(a).h$.
Si f est linéaire, alors $df_a = f$ pour tout $a \in U$, l'application df est constante.

Prop3 : Si $f : U \to F$ est différentiable en a, alors elle y est continue (bien sûr la réciproque est fausse, déjà en dimension 1)

Prop4 : La différentiation en un point est linéaire : pour $a \in U$, si $g, f : U \to F$ sont différentiables en a, alors $f+g$ aussi, avec $d(f+g)_a = df_a + dg_a$, de même, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda f)_a = \lambda df_a$.

Prop5 : Soit G un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension k, $f : U \to F$, $g : V \to G$ avec $f(U) \subseteq V$. Si f est différentiable en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a avec $d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$.

Appli6 : Si $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables, et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est C^1, l'appli $x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,dt$ est dérivable.

Def7 : On dit que $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme si elle est bijective de classe C^1 et sa réciproque est de classe C^1.

Rq8 : Si U et V sont difféomorphes, ils sont homéomorphes et donc $n = m$.

[Gou2] 311

Ex9 : L'inversion de $Gl_n(\mathbb{R})$ dans lui-même est un difféomorphisme avec $d_{inv\,M} : H \mapsto -M^{-1}HM$.

Rq10 : Si $f : U \to V$ est un C^1 difféo, on a $Id = d(f^{-1}\circ f)(a) = df^{-1}_{f(a)} \circ df_a$ donc $(df_a)^{-1} = df^{-1}_{f(a)}$.

Rq11 : Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a, alors $df_a \in E^*$, et si E est euclidien, df_a se réalise comme produit scalaire contre un vecteur, appelé gradient de f en a $\nabla f(a)$.

2) Dérivées partielles, dérivées directionnelles.

[Gou2] 303 307

Def12 : Soit $f : U \to F$, $a \in U$ et $v \in E$. Si la fonction d'une variable réelle $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en $t=0$, on dit que f est dérivable en a selon le vecteur v, on note alors $f'_v(a) = \varphi'(0)$.

Prop13 : Si f est différentiable en a, elle admet en a des dérivées selon tout vecteur, avec $df_a(v) = f'_v(a)$.

Ex14 : La réciproque est fausse : $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable selon tout vecteur en $(0,0)$ sans même être continue en ce point.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, on peut particulièrement s'intéresser aux dérivées directionnelles selon les vecteurs de la base canonique :

Def15 : Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to F$ et $a \in U$, si f est dérivable en a par rapport au vecteur e_i, on dit que f admet une i-ème dérivée partielle en a, on note $\partial_i f(a) = f'_{e_i}(a)$.

Ex16 : Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, alors les coordonnées de $\nabla f(a)$ sont les $\partial_i f(a)$.

Théo15 : Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to F$ une application. Si toutes les dérivées partielles de f en a existent et sont continues, alors f est différentiable en $a \in U$, avec $df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) h_i$

Rq16 : La réciproque est fausse : $x \mapsto \sin(\frac{1}{x}).x^2$ en 0

Cor17 : $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to F$ est C^1 si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.

Considérons $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ différentiable en $a \in U$, on note $(e_1 \dots e_n)$ et $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. On note $(f_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ les applications coordonnées de f, de sorte que

[Gou2] 307

$f = \sum_{i=1}^{m} f_i e_i$ par construction, f_i est différentiable en a, avec

$$df_a = \sum_{i=1}^{m} df_{i,a} e_i \quad \text{donc} \quad df_a(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \partial_j f_i(a) e_i.$$

Donc la matrice de df_a dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est $J_a = (\partial_j f_i(a))_{i \in [1,m],\, j \in [1,n]}$, on l'appelle matrice jacobienne de f en a.

Si $m = n$, J_a est carrée, donc peut considérer son déterminant, noté $|J_a|$ le déterminant Jacobien de f en a.

[BP] 237

Appli 18 : Si φ est un C^1 difféomorphisme entre Δ et D deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, on a, pour $f : D \to \mathbb{R}$ intégrable, $\int_D f \, d\lambda = \int_\Delta f \circ \varphi \times |J\varphi| \, d\lambda$

[Gou2] 307

Prop 19 : Soient $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec $\varphi(V) \subseteq U$. On écrit $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ les applications coordonnées de φ. Si φ est différentiable en $a \in V$ et f en $\varphi(a)$, alors $f \circ \varphi$ est différentiable en a, avec

$$\forall j \in [1, n],\ \partial_j F(a) = \sum_{i=1}^{m} \partial_i f(\varphi(a)) \partial_j \varphi_i(a).$$

Conséquence : Les fonctions de classe C^1 sont stables par composition.

Appli 20 : Si $\varphi : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ envoie (r, θ) sur $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, alors $F = f \circ \varphi$ est de classe C^2, avec $\Delta f = (\partial_r)^2 F + \frac{1}{r} \partial_r F + \frac{1}{r^2} (\partial_\theta)^2 F$.

3) Accroissements finis

[Rou] 97 109

Théo 21 : Soit $f : U \to F$, $(a, b) \in U^2$ tels que $[a; b] \subseteq U$, f continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a; b[$. S'il existe $M > 0$ tel que $|||df_c||| \leq M$ pour $c \in]a, b[$ alors $\|f(a) - f(b)\| \leq M \|b - a\|$.

Cor 22 : Si U est convexe, et df est uniformément bornée sur U (par $M > 0$), alors $\|f_a - f_b\| \leq M \|a - b\|$ pour tous $a, b \in U$. En particulier f est Lipschitzienne.

Cor 23 : Si U est convexe, $df \equiv 0 \Rightarrow f$ constante.

Rq 24 : Le théorème des accroissements finis à une variable ne s'adapte pas tel quel en dimension supérieure : $f : t \mapsto e^{it} \in \mathbb{R}^2$, on a $f(0) = f(2\pi)$ mais $f' = ie^{it}$ ne s'annule jamais.

Théo 25 : Si $(f_n) : U \to F$ est une suite d'applications différentiables telle que
- (f_n) CS vers f
- df_n CU vers $g : U \to \mathcal{L}(E, F)$.

Alors f est différentiable et $df = \lim df_n$. De plus, f_n $C^1 \Rightarrow f$ C^1.

Appli 26 : L'exponentielle de matrices est de classe C^1 (même C^∞).

II Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites, applications

1) Théorème d'inversion locale

[Gou2] 321

Théo 27 : Soit $f : U \to F$ de classe C^1, et $a \in U$ tel que $df_a \in \mathcal{L}(E, F)$ soit un isomorphisme. Alors il existe V un voisinage ouvert de a et W de $f(a)$ tels que $f_{|V} : V \to W$ soit un C^1 difféomorphisme.

[Zav]

Appli 28 : L'exponentielle $\exp : \mathcal{M}_n\mathbb{C} \to Gl_n\mathbb{C}$ est surjective, plus précisément toute matrice $C \in Gl_n\mathbb{C}$ est image par exp d'un polynôme en C. DVP

[Rou] 187 192

Cor 29 : Avec les notations du théorème 27, si f est injective et si $\forall x \in U$ df_x est un isomorphisme alors $f(U)$ est un ouvert de F et $f : U \to f(U)$ est un C^1 difféomorphisme.

Ex 30 : $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ est un difféo local sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mais pas global.

Ex 31 : $x \mapsto x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ a une différentielle inversible en tout point sans être injective sur aucun voisinage de 0 : elle n'est pas C^1.

2) Théorème des fonctions implicites

Théo 32 : Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un ouvert, $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application de classe C^1 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. On suppose que $f(a, b) = 0$ et que la matrice $J_y f(a, b)$ formée des dérivées partielles par rapport à y, est inversible. Alors il existe V (resp W) voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ (resp de b dans $\mathbb{R}^m$) avec $V \times W \subseteq U$ et $\varphi : V \to W$ de classe C^1 unique telle que $(x \in V, y \in W$ et $f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V$ et $y = \varphi(x))$. De plus $D_y f(x, y)$ est inversible sur $V \times W$. (Fig 3)

Cor 33 : Avec les notations précédentes, on a $d\varphi_x = -(d_y f(x, \varphi(x)))^{-1} d_x f(x, \varphi(x))$.

Appli 34 : Soit $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$, S^1 s'écrit comme le graphe de deux fonctions $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ et $x \mapsto -\sqrt{1 - y^2}$ défs sur $]-1, 1[$ à val dans $]0, 1[$.

3) Applications aux sous variétés

Def 35 : Soit $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in V$ et $d \in \mathbb{N}$, on dit que V est lisse en a de dimension d s'il existe $F : U \to F(U)$ ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) un C^1 difféomorphisme avec $a \in U$ tel que $F(V \cap U) = V' \cap F(U)$ avec $V' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que V est une sous variété de dimension d si V est lisse en tous ses points. (Fig 2)

Théo 36 : Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une submersion (C^1 et df_x surj $\forall x \in U$). On pose $V = f^{-1}(0)$. Alors V est une sous variété de dimension $n - m$. Et réciproquement, une sous variété se réalise comme annulation d'une submersion.

Rq 37 Utilise les fonctions implicites.

Théo 38 : Une sous variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ est exactement l'image d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$ par une immersion $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$.

Ex 39 : S^n est une sous variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension n. Un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension d est une variété de dimension d.

[Rou] 190

Ex 40 : Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une variété de dimension n

Def 41. Soit V une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, on dit que v est un vecteur tangent à $a \in V$ s'il existe $\gamma : I \to V$ dérivable avec $\gamma(0)=a$, $\gamma'(0)=v$. L'ensemble des vecteurs tangents à V en a est un sev de $\mathbb{R}^n$ de dim d, noté T_Va l'espace tangent à V en a. (Fig 1)

Rq 42 : Les définitions équivalentes de sous variétés donnent des caractérisations différentes des espaces tangents. (Bronner).

Ex 43 : $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $M_n(\mathbb{R})$, de dim n^2-1.

III Différentielles d'ordre supérieur.

1) Définitions.

[Rou] 284 286

Def 44 : Soit $f : U \to F$ de classe C^1, l'appli $df : U \to \mathcal{L}(E,F)$ est continue, on peut chercher à la différentier. Si df est différentiable en a, on dit que f est deux fois différentiable en a, et on note $d^2f_a = d(df)_a$.

Rq 45 : Attention, $d^2f_a \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F)) = \mathcal{L}(E \otimes E, F)$ est une application bilinéaire.
Bien sur, on peut différentier $d^2f : a \mapsto d^2f_a$ pour obtenir d^3f_a trilinéaire... on définit ainsi des applications de classe C^k.

Rq 46 : Les théorèmes 27 et 32 (et la def 7) se transposent tels quels aux cas d'appli C^k.

Rq 47. On peut aussi parler des différentielles partielles secondes $\partial_i \partial_j f$: [illegible]

Théo 48 (Schwarz) Si $f : U \to F$ est de classe C^2, $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$.
En particulier pour $f : U \to \mathbb{R}$ C^2, la matrice des dérivées partielles secondes est appelée Hessienne de f, c'est une matrice symétrique, associée à une forme quadratique.

[Gou2] 309

Cex 49 : $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et 0 en 0, les dérivées partielles secondes existent sans être égales.

2) Formules de Taylor.

[Rou] 286 288.

Théo 50 : Soit $f : U \to F$ est k fois différentiable en $a \in U$, on a
$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + d^2f_a\, h.h + \dots + d^kf_a\, h^k + o(\|h\|^k).$$
quand $h \to 0$ dans E (formule de Taylor Young).

Théo 51 : Soit $f : U \to F$ de classe C^{k+1} sur U et si $[a, a+h] \subseteq U$, alors
$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \dots + d^kf_a\, h^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1}f(a+th)\, h^{k+1}\, dt.$$
C'est la formule de Taylor reste intégral.

[Rou] 344

Théo 53 : Lemme de Morse : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sur $0 \in U$. On suppose $df_0 = 0$ et d^2f_0 est une forme quadratique nondégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un C^1 difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine tel que $\varphi(0)=0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$. DVP

IV. Optimisation.

[Rou]

Théo 54 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
(a) Si f est différentiable en a et f y admet un minimum local, alors $df_a = 0$.
(b) Si de plus f est deux fois différentiable en a, d^2f_a est positive.
(c) Si f est deux fois différentiable et d^2f_a est définie positive, $df_a = 0$, alors a est un minimum local isolé.

Ex 55 : $x \mapsto x^3$ dans $\mathbb{R}$ satisfait aux deux premières conditions en 0 sans y avoir d'extremum.
Pour avoir des réciproques, il faut des hypothèses de convexité.

[All] ~297

Prop 56 : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable, on a équivalence entre
f convexe, $f(v) \geq f(u) + df_u(v-u)$. $(df(u) - df(v))(u-v) \geq 0$ $\forall u, v \in E$.
et de même pour la stricte convexité avec des inégalités strictes.
Dans le cas convexe, un minimum local est caractérisé par l'équation d'Euler $\nabla f_a = 0$.
On peut aussi considérer l'optimisation sous contraintes.

[Avez]

Théo 57 (Extrema liés) Soient $g_1 \dots g_r : U \to \mathbb{R}$ C^1 et $f : U \to \mathbb{R}$ C^1, on pose $g = (g_1 \dots g_r) : U \to \mathbb{R}^r$, $\Gamma = g^{-1}(0)$. On suppose que $f|_\Gamma$ admet un minimum local en $a \in \Gamma$, et $dg_i a$ lin indep, alors $df_a \in Vect(dg_{1a} .. dg_{ra})$ DVP

Appli 58 : Soit $(E, \langle . \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique, alors u se diagonalise sur E.

[Rou] 363

Rq 59 Géométriquement, le théorème 57 affirme que df_a s'annule sur l'espace tangent à Γ en a (qui est une sous variété).

[Gou2] 320

Appli 60 : Inégalité arithmético-géométrique.
$\forall (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$

Fig 1

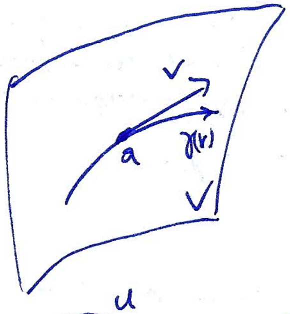

Fig 2:

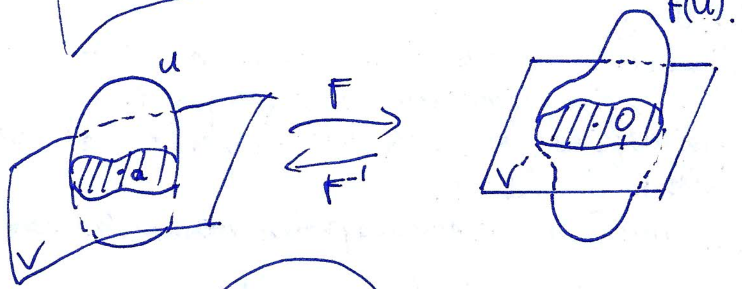

Fig 3: