214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Refs : [Rou] Petit guide du calcul différentiel. [Laf] Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles.
[OA] Oral Math de Rogier : Objectif Agrégation. [MT] Mneimné Testard
Devs : (16.17) Surjectivité exponentielle [Zav] [Rou] (38.39) Extremas liés [Avez]
(28.29) Lemme de Morse
32 Brouwer

Cadre : On considère $n, m \in \mathbb{N}$, U, V respectivement des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application

I. Théorème d'Inversion locale

1) Énoncé et premiers exemples

[Laf] 23 25

Def 1 : On dit que f est un C^k-difféomorphisme entre U et $f(U)$ ($k \in \mathbb{N}$) si f est de classe C^k, bijective, et si sa réciproque f^{-1} est elle aussi de classe C^k.

Ex 2 : Si $k=0$ on retrouve un homéomorphisme, pour cette raison on admettra en général $k \geq 1$.
L'application $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans lui-même, mais pas un C^1-difféomorphisme.

Rq 3 : La formule de différentiation des composées nous apprend que si f est un C^k-diffeo, alors $n=m$. C'est aussi vrai pour un homéo mais nettement plus dur à montrer.

Théo 4 (Inversion locale) Si f est de classe C^k ($k \geq 1$) et si df_a est un isomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, alors il existe un ouvert $\Omega \subseteq U$ contenant a tel que $f : V \to f(V)$ soit un C^k-difféomorphisme.

Rq 5 : Dans le théorème précédent, on a, pour $x \in V$, $d(f^{-1})_{f(x)} = (df_x)^{-1}$

[Rou] 196

Ex 6 : On pose $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(x,y) := (x^2 - y^2, 2xy) \in U$, la fonction f induit au voisinage de tout les points de U un C^1 difféomorphisme, sans être un difféomorphisme de lui-même (pas injective).
- Dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ prolongée par 0 en 0, on a $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, mais le théorème 4 ne s'applique pas : f n'est pas de classe C^1.

[Laf] 25

Def 7 : Si f est de classe C^k et df_a est inversible pour tout $a \in U$, on dit que f est un C^k-difféomorphisme local.

Rq 8 : Par le théorème 4, cette définition est équivalente à "f induit un C^k-difféomorphisme au voisinage de tout point de U".

Ex 9 : L'appli $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un difféo local à val dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Théo 10 (Inversion globale). Un C^k difféomorphisme local injectif est un C^k-difféomorphisme.

Cor 11 : Restreindre l'application de l'exemple 9 à $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ donne un C^∞ difféomorphisme sur son image.

[Rou] 183

Théo 12 : Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est un ouvert connexe, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe injective sur U. Alors $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ est un ouvert, et $f^{-1} : f(U) \to U$ est holomorphe.

Ex 13. On peut définir les déterminations du logarithme ainsi

2) Applications en algèbre linéaire et analyse

[Rou] 192

Théo 14 (Changement de coordonnées). Soient $f_1, \dots, f_n : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $f = (f_1, \dots, f_n)$, alors f induit un C^1 difféomorphisme au voisinage de a si et seulement si : le déterminant Jacobien de f est non nul, si et seulement si les df_i sont linéairement indépendants.

[OA] 11

Appli 15 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est assez proche de I_n, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B^k = A$, de plus la fonction $A \mapsto B$ est C^∞

[Zav]

Théo 16 : L'exponentielle matricielle induit un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{C})$.

DVP

Cor 17 : L'exponentielle matricielle $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

Cor 18 : L'exponentielle matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a pour image $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

[OA] 11

Appli 19 : $GL_n(\mathbb{R})$ ou $GL_n(\mathbb{C})$ n'ont pas de sous groupes contenus dans une boule arbitrairement petite.

Appli 20 : Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$, x_0 une racine simple de P_0. La racine x_0 dépend de P_0 de manière lisse au voisinage de P_0 : Il existe un C^∞-difféomorphisme entre un voisinage U de P_0 dans $\mathbb{R}_n[X]$ et un voisinage V de x_0 dans $\mathbb{R}$ tel que $\forall P \in U, x \in V$, $x = \varphi(P) \Leftrightarrow P(x) = 0$. déploiement II.2

3) Applications en géométrie.

[Rou] 183

Théo 21 (Hadamard Lévy) Soit f de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. On a équivalence entre :
- f est un difféo.
- f est propre et un difféomorphisme local.

Rq 22 : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est propre si et seulement si elle est coercive.

[Laf] 27

Def 23 : Une immersion (de classe C^k) de U dans $\mathbb{R}^m$ est une application de classe C^k de U dans $\mathbb{R}^m$ dont la différentielle en tout point est injective.
De même, une submersion $U \to \mathbb{R}^m$ est une application (de classe C^k) dont la différentielle en tout point est surjective.

$f(0)=0$

[Laf] 26 28 **Théo 24:** Si $f: U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1, $0 \in U$, et df_0 est injective, alors il existe V voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$, $U' \subseteq U$ contenant 0 tel que $f(U') \subseteq V$ et un difféomorphisme $\varphi: V \to \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ tel que $\varphi(f(x_1,\dots,x_n)) = (x_1,\dots,x_n,0\dots0)$

Exemple 25: Si $n=1$, f est une courbe de $\mathbb{R}^m$, le théorème nous dit qu'en un point régulier, la courbe f peut localement être transformée en un segment de droite de manière difféomorphe (Fig 1).

Théo 26 Avec les mêmes notations, si df_0 est surjective. Alors il existe $W \subseteq \mathbb{R}^n$ voisinage de 0 et $\psi: W \to \mathbb{R}^n$ difféo sur son image tel que $\psi(W) \subseteq U$ et

$$f(\psi(x_1,\dots,x_m)) = (x_1,\dots,x_m)$$

Ex 27: Si $p=1$, le théorème dit qu'une fonction ~~numérique~~ s'assimile localement à une forme linéaire.

Théorème du rang constant

[Rou] 344 **Lemme 28:** Si $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$, alors il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\rho: V \to GL_n(\mathbb{R})$ C^1 tel que $\forall A \in V$, $A = {}^t\rho(A) A_0 \rho(A)$. DVP

Théo 29 (Lemme de Morse) Si $f: U \to \mathbb{R}$ est de classe C^3, $0 \in U$, $f(0)=0$ et $df_0 = 0$ et d^2f_0 est une forme quadratique non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe un C^1-difféomorphisme $\varphi: x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$, tel que $\varphi(0)=0$ et $f(x) = \sum_{i=1}^{p} u_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i^2$

Appl 30: Sous les hypothèses précédentes, si d^2f_0 est définie positive, alors f admet un minimum local isolé en 0.

[Rou] 165 374 **Appl 31:** $f: (x,y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$ admet un point double à l'origine

Théo 32 (Brouwer) Toute application continue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ dans elle même admet un point fixe. DVP

II. Théorème des fonctions implicites.

1) Énoncé.

[Rou] 183 **Théo 33** (Fonctions implicites) Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$, et $f: (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application C^1 de U dans $\mathbb{R}^p$. On suppose $f(a,b)=0$ et $d_yf(a,b)$ inversible. Alors l'équation $f(x,y)=0$ peut être résolue localement par rapport aux variables y. $\exists V$ voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, $\exists W$ voisinage de b dans $\mathbb{R}^p$, $\varphi: V \to W$ C^1 avec $V \times W \subseteq U$, et $(x \in V, y \in W, f(x,y)=0) \iff (\varphi(x) = y \;\; x \in V)$. Et φ unique.

Rq 34 De plus, $d_yf(x,y)$ est inversible sur $V \times W$. $d_yf(x,y)$ est la différentielle de f en y: f vue comme f° de y, à x fixé. [Rou] 183 185
(Fig 2)

Ex 35: L'équation $x^2+y^2-1=0$ donne $f_y(x,y) = 2y$, on peut appliquer le théorème précédent sauf en $(\pm1, 0)$. Les deux fonctions implicites que l'on obtient sont définies sur $]-1,1[$ par $\pm\sqrt{1-x^2}$.
En permutant les variables, on peut voir x comme un graphe en y au voisinage des points $(\pm 1, 0)$.
Le théorème 33 affirme la différentiabilité de la fonction implicite φ, elle vérifie de plus des relations qui permettent de calculer sa différentielle.
On a $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $f_j(x_1,\dots,x_n, \varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_p(x_1,\dots,x_n)) = 0$ autour de a.
en dérivant par rapport à x_i:

$$\partial_i f_j(x,\varphi(x)) + \sum_{k=1}^{p} \partial_k f_j(x,\varphi(x))\, \partial_{x_i}\varphi_k(x) = 0$$

on en déduit $d\varphi(x) = -(d_y f(x,\varphi(x)))^{-1} \circ (d_x f(x,\varphi(x)))$. Mais il est souvent plus profitable de faire un calcul direct plutôt que de retenir cette formule terrifiante de notations.

Ex 36: Dans l'exemple 35. On obtient $\varphi'(x) = \frac{-x}{y}$, ceci est bien défini justement car on se place sur un ouvert où y ne s'annule pas.

Rq 37: Les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites sont équivalents.

2) Applications.

Théo 38 (Extrémas liés) Soient $f, g_1, \dots, g_r: U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, on pose $g = (g_1,\dots,g_r)$ $\Gamma = g^{-1}(0)$. Si $f|_\Gamma$ admet en a un extremum local, et si $dg_{i,a}$ sont linéairement indépendantes, alors $df_a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i dg_{i,a} \in \mathrm{Vect}(dg_{i,a})$ les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange. DVP [Avez]

Appl 39. Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable. [Gou]

Appl 40 Inégalité arithmético géométrique

Appl 41 Inégalité de Hadamard.

Mettre ici les trucs de polynômes

déplacer après les espaces tangents

III. Application aux sous variétés.

Désormais, on se place dans $\mathbb{R}^n$, dont on considère V un sous ensemble de l'EV.

1) Définition et théorème central.

[Rou] 189 192

Def 42: On dit que V est lisse en a, de dimension d s'il existe $U \in \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant a, $F : U \to F(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ un C^1 difféomorphisme où $0 \in F(U)$. Tel que

$$F(U \cap V) = F(U) \cap \mathbb{R}^d \times 0$$

F "transforme V en un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d".

On dit que V est une sous variété de dimension d si V est lisse de dimension d en tous ses points. (Fig 3)

Ex 43: Si C est le cône de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x^2+y^2=z^2$, $C \setminus \{0\}$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Mais C ne l'est pas.

Théo 44: On a équivalence entre

(i) V est une sous variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$

(ii) $\forall a \in V, \exists U \subseteq \mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de a, et $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion de classe C^1, telle que $U \cap V = f^{-1}(0)$.

(iii) $\forall a \in V, \exists U \subseteq \mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de a, Ω voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une immersion, qui induise un homéo entre Ω et $U \cap V$, avec $\varphi(0) = a$.

(iv) $\forall a \in V$, il existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ voisinage ouvert de a, $U' \subseteq \mathbb{R}^d$ voisinage ouvert de $(a_1, \dots, a_d)$ et $g : U' \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe C^1 telle que $x \in V \cap U \iff (x_1 \dots x_d) \in U'$ et $x = (x_1, \dots, x_d, g(x_1, \dots, x_d))$ après éventuelle permutation des coordonnées.

Rq 45: ii ⇒ iv vient des fonctions implicites, iv ⇒ iii de l'inversion locale.

Ex 46: $\mathbb{S}^n$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ pour la caractérisation (ii).

Les graphes de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sont des sous variétés par (iv)

Le tore de révolution est une surface de $\mathbb{R}^3$ (iii)

Bien sûr, Tout sous espace vectoriel de dimension d est une sous variété de dimension d.

2) Espace Tangent.

[Rou] 190

Def 47: Un vecteur v est dit tangent à V en a s'il existe $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert contenant 0, $\gamma : I \to V$ dérivable telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma'(0) = v$. (Fig 4)

Si V est lisse en a de dimension d, l'ensemble des vecteurs tangents à V en a est un sous espace vectoriel de dimension d, appelé espace tangent à V en a, noté T_Va.

[Rou] 191

Théo 48: Dans le cas d'une sous variété, les caractérisations du théorème 44 donnent des formulations différentes de l'espace tangent. En reprenant les mêmes notations, on a.

(ii) $T_Va = \mathrm{Ker}\, df_a$. (iii) $T_Va = \mathrm{Im}\, d\varphi_0$ (iv) Le graphe de $dg_{a_1 \dots a_d}$.

Ex 49: On retrouve en particulier la définition de vecteur tangent à un arc paramétré régulier.

Appl 50: Le théorème des extrema liés assure que l'espace tangent en a à Γ est $\mathrm{Ker}\, df_a$, et que df_a s'annule sur l'espace tangent en a à Γ. (c'est une preuve sur de tels arguments que nous proposons en dev).

3) Exemples de sous variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

[Rou] 274 +[MT]

Prop 51: $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1.

L'espace tangent à $X \in SL_n(\mathbb{R})$ est

$$\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(X^{-1}H) = 0\}.$$

(lien avec la différentielle du déterminant)

Prop 52: $O_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ avec

$$T_{O_n(\mathbb{R})}(X) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t(X^{-1}H) = -X^{-1}H\}.$$

Fig 1 (Exemple 25)

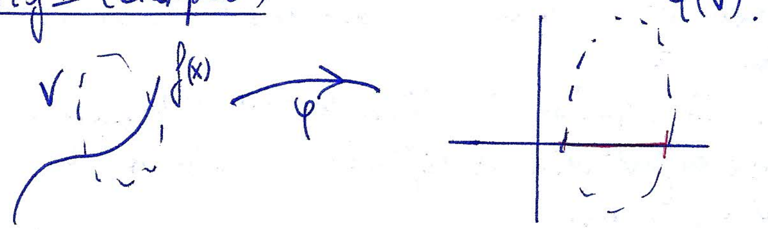


Fig 2 (Rq 34)

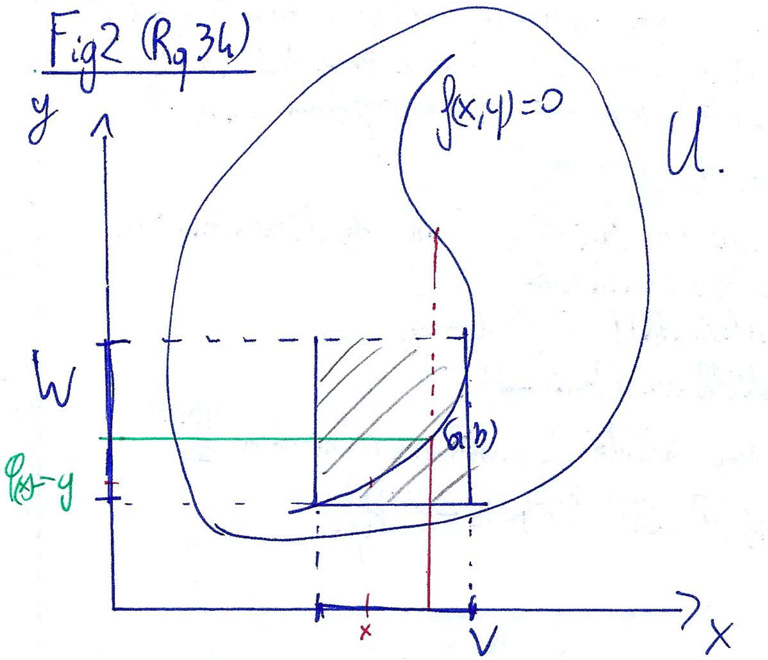
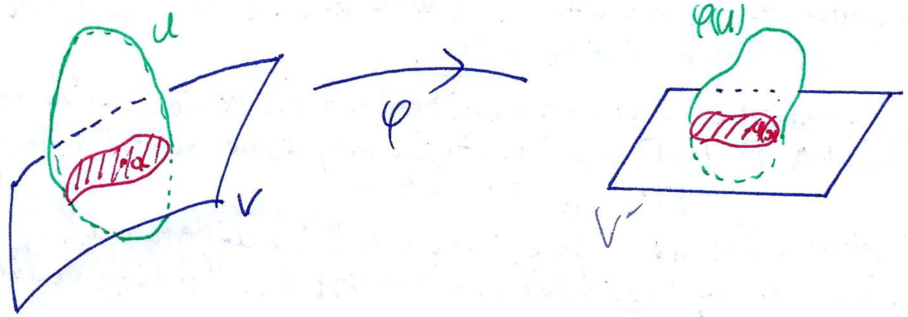


Fig 3 : def 42.



(Fig 4 (def 47) :