213 Espaces de Hilbert. Bases Hilbertiennes. Exemples et Applications.

Références : [H-L] Hirsch-Lacombe Éléments d'Analyse fonctionnelle
[All] Allaire Analyse numérique [FGNA(3)] Francinou Gianella Nicolas
[Dem] Demailly Analyse numérique Oraux X-ENS Algèbre 3
[Gou] Gourdon Analyse. [OA] BTP Objectif agrégation
Devts :

Cadre : E un $\mathbb{K}$-ev avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Généralités sur les espaces de Hilbert

1) Produit scalaire, espace pré-hilbertien

[H-L] p 84 87

Déf 1 : On appelle produit scalaire sur E toute application $(\cdot|\cdot) : E\times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que
- $\forall y\in E$, l'application $x\longmapsto (x|y)$ est une forme linéaire
- $\forall y,x\in E$, on a $(x|y)=\overline{(y|x)}$ (hermitienne, ou symétrique dans le cas réel).
- $\forall x\in E$, $(x|x)\in\mathbb{R}^+$ (définie positive), $\forall x\in E$, $(x|x)=0 \Rightarrow x=0$ (définie)

L'espace E muni d'un produit scalaire est dit préhilbertien. Dans la suite, on fixe par défaut un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur E.

Rq 2 : Pour $x,y\in E$, on a $(x+y|x+y)=(x|x)+(y|y)+2\mathrm{Re}(x|y)$

Ex 3 : Soit $E=\mathbb{C}^d$, on fixe, pour $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$$(x|y)=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$$

le produit scalaire canonique (il se restreint naturellement à $\mathbb{R}^d$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel)

2) Soit $(X,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré, l'espace $L^2(\mu)$ est pré-hilbertien pour $(f|g):=\int_X f\,\overline{g}\,d\mu$

Prop 3 (Cauchy Schwarz). Soit E muni d'un produit scalaire non nécessairement défini. Pour $x,y\in E$, on a

$$|(x|y)|\leq (x|x)(y|y)$$

Si $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire, on a de plus égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Cor 4 : La relation $\|x\|:=\sqrt{(x|x)}$ définit une norme sur E, la norme associée au produit scalaire

Ex 5 : Dans le cas $\mathbb{C}^d$, on retrouve la norme hermitienne usuelle.
Dans $L^2(\mu)$, on retrouve la norme $\|.\|_2$.

[H-L] 87 93

Prop 6 : (Identité du parallélogramme) Soient $x,y\in E$, on a

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) \quad \text{(voir Fig 1)}.$$

Réciproquement, une norme sur E provient d'un produit scalaire si et seulement si elle satisfait cette identité. On a alors
- $(x|y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right)$ $\mathbb{K}=\mathbb{C}$
- $(x|y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$ $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

Déf 7 : Deux éléments x et y de E sont dits orthogonaux, noté $x\perp y$ si $(x|y)=0$. Pour $A\in E$, on définit $A^\perp$ l'orthogonal de A par
$$A^\perp=\{x\in E \mid \forall a\in A, (x|a)=0\}.$$
il s'agit d'un sous espace vectoriel fermé de A.

Prop 8 (Pythagore) Si $x,y\in E$ sont orthogonaux, alors $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$

Rq 9 : La réciproque n'est vraie que si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: dans $\mathbb{C}^2$
$\|x+ix\|^2=\|x\|^2+\|ix\|^2$ or $(x,ix)=-i\|x\|^2$.

Déf 10 On dit que E est de Hilbert s'il est complet pour la norme induite par son produit scalaire

Ex 11 : Tout espace pré-hilbertien de dimension finie est de Hilbert
L'espace $L^2(\mu)$ de l'ex 3 est un espace de Hilbert
Un sous espace vectoriel non fermé d'un espace de Hilbert est pré-hilbertien non complet.

2) Théorème de projection sur un convexe fermé.

On fixe $(E,(\cdot|\cdot))$ Hilbert

Théo 12 (Projection sur un convexe fermé)
Soit $C\subseteq E$ une partie convexe fermée non vide de E. Alors pour tout $x\in E$, il existe un unique point $p_C(x)$ de C réalisant la distance de x à C. Il est caractérisé par

$$\forall z\in C,\ \mathrm{Re}(x-p_C(x)|z-p_C(x))\leq 0. \quad \text{(voir Fig 2)}.$$

Prop 13 Sous les hypothèses précédentes, l'application $x\mapsto p_C(x)$ est 1-lipschitzienne.

Prop 14 : Soit $F\subseteq E$ un sous espace vectoriel fermé, alors $P_F\in\mathcal{L}(E)$ et pour $x\in E$, $P_F(x)$ est l'unique élément tel que
$$P_F(x)\in F \qquad P_F(x)-x\in F^\perp.$$
De plus on a $E=F\oplus F^\perp$ et le projecteur sur F pour cette décomposition est P_F.

[H-L] 93 101

Cor 15 : Si $F \leq E$ est un sous espace quelconque, alors $E = \bar{F} \oplus F^\perp$, en particulier F est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Ex 16 : Soit $E = L^2(\mathbb{N}) = \ell^2(\mathbb{N})$ et $F = \{$suites presque nulles$\}$. F n'est pas fermé et on n'a pas $E = F \oplus F^\perp$, en revanche F est dense.

Cor 17 : Si $F \leq E$ est un sous espace vectoriel quelconque, alors $F^{\perp\perp} = \bar{F}$.

II. Dualité, applications.

1) Premiers résultats.

Théo 18 (Riesz) L'application $E \to E'$ définie par $y \mapsto \varphi_y = (\cdot|y)$ est une isométrie surjective. Autrement dit pour tout $f \in E'$, il existe un unique $y \in E$ tel que $f = (\cdot|y)$, on a de plus $\|y\| = \|f\|$.

Cor 19 : Pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(E)$ satisfaisant la propriété
$$\forall x, y \in E, \quad (Tx|y) = (x|T^*y)$$
avec $\|T^*\| = \|T\|$. On appelle T^* l'opérateur adjoint de T. On dit que T est autoadjoint si $T = T^*$

Prop 20 : Pour $T, S \in \mathcal{L}(E)$, on a $T^{**} = T$, $(TS)^* = S^*T^*$, $Id^* = Id$

Ex 21 : Dans le cas de la dimension finie, les notions d'opérateurs adjoints sont traduites par les notions de matrices transposées ou transconjuguées selon $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Appli 22 : Théorème de Hahn Banach dans les espaces de Hilbert, sans appel à l'axiome du choix.

2) Convergence faible dans un espace de Hilbert

Def 23 On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge faiblement vers $x \in E$ si :
$$\forall y \in E, \quad \lim_{n\to\infty} (x_n, y) = (x, y)$$
On notera $x_n \rightharpoonup x$.

Rq 24 : Ceci est en réalité une caractérisation d'une définition plus générale. La convergence classique entraine la convergence faible mais la réciproque est fausse (voir $x_n = \mathbb{1}_n$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$).

Prop 25 : Soit $(x_n) \rightharpoonup x$ dans E, on a $\underline{\lim} \|x_n\| \geq \|x\|$, et on a équivalence entre
- (x_n) converge vers x
- $\overline{\lim} \|x_n\| \leq \|x\|$
- $\lim \|x_n\| = \|x\|$.

Théo 26 De toute suite bornée de E, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.

176 **Prop 27** Le rayon spectral d'un opérateur autoadjoint sur E est égal à sa norme.

Appli 28 : (Optimisation) Soit E un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert, $J : E \to \mathbb{R}$ convexe, continue et coercive, alors J admet un minimum sur E.

3) Formulations variationnelles.

On suppose $K = \mathbb{R}$

Théo 29 (Lax Milgram) Soit $L \in E'$, et $a : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue avec $a(x,x) \geq \nu \|x\|^2$ pour un certain $\nu > 0$. Il existe alors un unique $u \in V$ tel que $a(u, \cdot) = L$. Cette solution dépend continument du paramètre L. [All] 71 78

Cor 30 : Si a est de plus symétrique, alors u est réalisé comme minimum de la fonctionnelle quadratique $J : x \mapsto \frac{1}{2} a(x,x) - L(x)$.

Appli 31 : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert, en posant $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, d\lambda$ et $L(v) = \int_\Omega f v \, d\lambda$ on trouve la formule variationnelle du problème du Laplacien (avec condition de Dirichlet au bord). Cette formulation trouve d'après le théorème de Lax Milgram une solution dans $H_0^1(\Omega)$.

III. Bases Hilbertiennes.

1) Définition et premières propriétés.

Def 32 : Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace pré-hilbertien E sera dite orthogonale si ses éléments sont deux à deux orthogonaux, et orthonormale si tous ses éléments sont de normes 1 [H-L] 107 113

Prop 33 Toute famille orthonormale est libre.

Def 34 : Une famille orthonormale est appelée Base hilbertienne si son espace vectoriel engendré est dense dans E.

Prop 35 (Orthonormalisation de Gram Schmidt) Soit $N \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $(f_n)_{n\in[0,N[}$ une famille libre dénombrable. Il existe une famille orthonormale $(e_n)_{0\leq n<N}$ de E telle que $\forall n < N$, $\mathrm{Vect}(e_0 \ldots e_n) = \mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n)$.
Les e_n sont construits récursivement par $e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}$, $x_{n+1} = f_{n+1} - P_n f_{n+1}$ et $e_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|}$ où P_n est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n)$.

Ex 36 : Les suites $\mathbb{1}_n$ sont une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$, mais pas une base algébrique. Les applications $e_n : t \mapsto e^{int}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ (voir partie suivante).

Cor 37 Un espace de Hilbert est séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne dénombrable. Si il est de plus de dimension infinie, ceci est équivalent à avoir E isomorphe isométriquement à $\ell^2(\mathbb{N})$.

Prop 38 : Soit $e_0 \ldots e_n$ une famille orthonormée finie de E, et F l'espace vectoriel engendré par cette famille. La projection orthogonale P_F est donnée par

$$\forall x\in E,\ P_F(x)=\sum_{k=0}^{n}(x|e_k)e_k.$$

En conséquence $\|x\|^2=\|x-P_F(x)\|^2+\sum_{k=0}^{n}|(x|e_k)|$

[H-L] 109

Prop 39 (Bessel). Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée de E. Pour tout $x\in E$, on a
$$\sum_{i\in I}|(x|e_i)|^2\le\|x\|^2.$$

En particulier, $((x|e_i))_I$ est un élément de $\ell^2(I)$.

Théo 40 (Caractérisation des bases Hilbertiennes) Soit (e_i) une famille orthonormale de E. Equivalents sont : - $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne

- $\forall x\in E,\ \|x\|^2=\sum_{i\in I}|(x|e_i)|^2$ (égalité de Bessel).
- $\forall x,y\in E\ \ (x|y)=\sum_{i\in I}(x|e_i)(e_i|y)$ (formule de Parseval).

[FGNAl3]

Ex 41 Calcul de $\inf_{(a,b,c)}\int_0^{\infty}(x^3-ax^2-bx-c)^2e^{-x}dx$.

DVP

Appli 42 : Etude et Base hilbertienne de l'espace de Bergmann du disque unité

2) Polynômes orthogonaux.

On fixe $I=]a,b[$ un intervalle ouvert non nécessairement borné de $\mathbb{R}$

[Pem] 51

Def 43 : On appelle fonction poids sur I toute fonction continue $\omega:I\to\mathbb{R}^+$ telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ \int_a^b|x|^n w(x)dx<\infty$.

Def 44 : On note $L^2(I,\omega)$ l'espace des fonctions de carré intégrable par la mesure de densité ω par rapport à la mesure de Lebesgue. muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle=\int_a^b f\bar{g}\,\omega d\lambda$.

Def 45 : Par hypothèse, les fonctions polynomiales sur I appartiennent à $L^2(I,\omega)$. On orthonormalise la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dite des polynômes orthogonaux pour le poids ω. On a $\deg P_n=n$.

[OA] 112

Théo 46 : Avec les notations précédentes, on suppose qu'il existe $\alpha>0$ tel que
$$\int_I e^{\alpha|x|}w(x)dx<\infty$$
Alors la famille des polynômes orthogonaux est une base hilbertienne de $L^2(I,\omega)$.

[Pem]

Ex 45 : Pour $\omega(x)=e^{-x^2}$, $I=\mathbb{R}$. polynômes de Hermite

Pour $I=[-1,1]$, $w(x)=1$: polynômes de Legendre.

Appl 46 (Quadrature de Gauss) On considère une méthode de quadrature du type
$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx=\sum_{j=0}^{\ell}\lambda_j f(x_j)\qquad x_j\in I.$$
Il existe un unique choix des x_j et λ_j telle que la méthode obtenue soit exacte à l'ordre $2\ell+1$. Les points x_j sont donnés par les racines du polynôme orthogonal $P_{\ell+1}$. [Pem] 73.

3) Séries de Fourier

Def 47 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle coefficient de Fourier de f les nombres complexes définis par [Gou] 258 259
$$c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}dt.\qquad (\text{On pose } e_n: x\mapsto e^{-inx})$$

La série de Fourier associée à f est la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)e_{-n}$

Prop 48 (Riemann Lebesgue). Si f est continue par morceaux et 2π-périodique. On a $\lim_{|n|\to\infty}c_n(f)=0$

Théo 49 La famille (e_n) est une base hilbertienne de l'espace des fonctions 2π périodiques de carré intégrable sur $[0,2\pi]$. On retrouve en particulier [H L] 108
$$\frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)$$

Ex 50 : Attention la convergence n'est pas nécessairement simple : Il existe des fonctions C^0 différentes de leurs séries de Fourier : [Gou] 405
$$f(x)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}\sin\left((2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right).\qquad\forall x\in[0,\pi].$$

Prop 51 : Si f est 2π périodique et C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisation de f donnée par [Gou] 258 265.
$$\tilde{f}(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\qquad\forall x\in\mathbb{R}.$$

Rq 52 : L'hypothèse C^1 par morceaux est nécessaire.

Théo 53 : Si f est 2π-périodique et C^1 par morceaux et continue alors la série de Fourier de f converge normalement vers f

Appli 54 : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Fig1

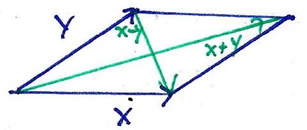

Fig2