209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

Ref : [Gou2] Gourdon, Analyse. [HL] Hirsch Lacombe Analyse fonctionnelle.
[Dem] Demailly Analyse numérique. [BP] Briane Pagès Théorie de l'intégration.
[OA] Beck Malick Peyré Objectif Agreg. [ElAm] El Amrani Suites et séries.

Dvlpt : 7 Weierstrass [HL] ; 17 Brouwer [Gou2] ; 46 Fejér [ElAm].

I. Approximation des fonctions régulières.

1) Approximation locale des fonctions régulières

[Gou2] 74 77

Théo 1 : (Formule de Taylor Young) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur I. Si $a \in I$ est tel que $f^{(n+1)}(a)$ existe, alors quand $h \to 0$, on a
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}).$$

Appli 2 : La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ $1_{\mathbb{R}^*}x$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue.

Théo 2 : (Formule de Taylor reste intégral) Avec les notations précédentes, si f est de classe C^{n+1} sur I, alors
$$f(a+h) = f(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} h^n f^{(n+1)}(a+th)\,dt$$

Appli 3 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞, avec $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k \in [\![0, n]\!]$, alors $\frac{f(x)}{x^n}$ définit une fonction C^∞.

Ex 4 : La fonction $f(x) = 1_{\mathbb{R}_+^*} e^{-\frac{1}{x}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Appli 5 : Il existe sur $\mathbb{R}^d$ des fonctions non nulles de classe C^∞ à support compact.

2) Approximation uniforme sur un compact.

[HL] 28 29

On se place sur (E,d) un espace métrique compact non vide. On pose $C(E,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues $E \to \mathbb{R}$.

Théo 6 (Stone Weierstrass) Toute sous-algèbre de $C(E,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C(E,\mathbb{R})$.

En particulier, on peut déduire de ce théorème le résultat suivant, que l'on démontre également à l'aide d'arguments de convolution

Théo 7 (Weierstrass) Soit $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un segment, pour toute fonction continue $f : I \to \mathbb{R}$, il existe une suite de polynômes P_n qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. DVP

Ex 8 : Les fonctions lipschitziennes sur E sont denses dans les fonctions continues sur E.

[HL] 30

Rq 9 : Dans le cas complexe du Théorème de Stone Weierstrass, on impose en plus à la sous-algèbre étudiée d'être auto-conjuguée.

Ex 18 : L'adhérence des polynômes sur $B(0,1)$ dans $\mathbb{C}$ n'est pas l'ensemble des fonctions continues.

[Gou2] 256

Appli 19 : Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) t^n \,dt = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $f = 0$

[Dem] 40

Prop 20 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue (I est compact). Pour $n \geq 1$ fixé il existe un unique polynôme $p_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - p_n\|_\infty$ soit minimale, on appelle p_n le polynôme de meilleure approximation de f de degré $\leq n$

[Gou2] 227

Rq 16 : Une limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$ est encore un polynôme.

Appli 17 (Théorème de Brouwer) Pour $n \geq 1$, toute application continue $f : B \to B$ de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ dans elle même admet un point fixe. DVP

II. Approximation des fonctions intégrables.

1) Convolution et régularisation.

[BP] 261 269

Def 18 : Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables, quand l'intégrale suivante est définie dans $\mathbb{R}$. $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y)\,dy$. On l'appelle produit de convolution de f et g.

Théo 19. Si $p, q \in [1,\infty]$ sont exposants conjugués, alors si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$ on a $f * g$ est bien définie en tout point, uniformément continue, et bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$.

Théo 20 : Pour $p \in [1,\infty]$, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, on a $f * g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$. En particulier, $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d), *)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

Prop 21 : L'algèbre $(L^1(\mathbb{R}^d), *)$ est sans unité.

Def 22 : Une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{R}^d)$ est dite approximation de l'unité si elle vérifie

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n \,d\lambda = 1$
- $\exists C > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| \,d\lambda < C$
- $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \alpha_n \,d\lambda = 0$.

[BP] 270 279

Rq23: Une telle suite converge vers δ_0 au sens des distributions, mais la réciproque est fausse : $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x}$ sur $\mathbb{R}$.

Ex24 : Si $\alpha \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\alpha_n : x \mapsto n^d \alpha(nx)$ est une approximation de l'unité.

Pour le reste de cette section (α_n) désigne une approx. mation de l'unité.

Théo25 : Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a $f * \alpha_n \to f$ dans L^p. $p \in [1, \infty[$

Théo26 : Pour $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a.
- Si f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on a $f * \alpha_n(x_0) \to f(x_0)$
- Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, alors $f * \alpha_n \to f$ dans L^∞.
- Si f est continue sur un compact K, alors $f * \alpha_n \to f$ unif sur K.

Théo27 : Pour $m \in \overline{\mathbb{N}}$, $\varphi \in C_c^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $f * \varphi$ est définie en tout point de $\mathbb{R}^d$ et pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, d'ordre $\leq m$, on a $\partial^\alpha (f * \varphi) = f * \partial^\alpha \varphi$.

Def28 : Une approximation de l'unité (α_n) est dite suite régularisante si ses éléments sont de classe C^∞ à support compact.

Théo29 : $\forall p \in [1, \infty[$, l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Rq30 Ceci reste vrai en remplaçant $\mathbb{R}^d$ par $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et c'est totalement faux pour L^∞ (f cste égale à 1).

App31 : Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{\|\xi\| \to \infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$.

App32 : Inversion de Fourier : Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{\hat{f}} = 2\pi \check{f}$.

2) Espace L^2 à poids et polynômes orthogonaux.

[OA] 120

Def33 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, on appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) dx < \infty$ autrement dit les polynômes sont dans $L^1(I, \rho)$.

On munit l'espace $L^2(I, \rho)$ du produit scalaire usuel

$$\langle f, g \rangle := \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx.$$

Par construction, les polynômes sont dans $L^2(I, \rho)$. En appliquant le procédé de Gram Schmidt à la famille $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient une famille (P_n) dite des polynômes orthogonaux pour le poids ρ.

Théo34 : Si il existe $\alpha > 0$ un réel tel que $x \mapsto e^{\alpha |x|}$ soit dans $L^1(I, \rho)$, alors la famille (P_n) forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$. [OA] 140.

Ex35 : Pour $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$ les (P_n) sont les polynômes de Hermite.

Pour $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = 1$, les (P_n) sont les polynômes de Legendre

III. Approximation des fonctions périodiques.

On étudie des fonctions périodiques, par défaut de période 2π. De telles fonctions s'identifient naturellement aux fonctions $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} =: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

1) Définitions et premières propriétés

Def36 : On pose $CM(\mathbb{T})$, (resp $C(\mathbb{T})$) l'espace des fonctions continues par morceaux (resp. continues) de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}$. [Gou2] 258 299 et [El Am] 287 307

Rq37 On a $C(\mathbb{T}) \subseteq CM(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T})$.

Def38 : Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, on définit le k-ème coefficient de Fourier de f par $c_k(f) = (f, e_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$. $k \in \mathbb{Z}$.

Def39 : On note $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions de $CM(\mathbb{T})$ telles que $\forall x \in \mathbb{T}$, $f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

En particulier $C(\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{T})$.

Prop40 : Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$ est telle que $c_k(f) = 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}$, alors $f \equiv 0$

Def41 : On appelle série de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{T})$ la série de fonctions $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k$.

2) Convergence simple et uniforme.

Théo42 (Dirichlet) Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{T}$ vers la fonction $\tilde{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$ définie par $\forall x \in \mathbb{T}$, $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ [El Am] 314 315

Théo43 : Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 par morceaux et continue, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{T}$ avec pour somme la fonction f.

Ces théorèmes se montrent en utilisant le noyau de Dirichlet, défini comme $D_n(t) = \sum_{m} e^{int}$, il n'a pas les propriétés d'une approximation de l'unité, il existe ainsi des fonctions vers lesquelles la série de Fourier ne conv

[ElAm] 409

Théo 44 (Fejér) Soit $f \in C(\mathbb{T})$, on introduit $S_n = \sum_{-n}^{n} c_n(f) e_n$, $C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k$, $u_k = \sum_{-n}^{n} e_k$ et $U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_n$.

On a $u_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}$, $U_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin t/2}\right)^2$. Et la suite de fonction DVP

C_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{T}$.

Co 45: Tout élément de $C(\mathbb{T})$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

3) Convergence dans $L^2(\mathbb{T})$.

[Gou2] et [ElAm]

Théo 46 (Inégalité de Bessel) Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, avec $\|c_n(f)\|_2 \le \|f\|_2$ (la norme de f est normalisée par 2π !).

Théo 47 (Parseval) Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a $\|c_n(f)\|_2 = \|f\|_2$. La famille (e_n) est une base hilbertienne de l'espace $L^2(\mathbb{T})$.

Appli 48: On a $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Appli 49: En considérant la série de Fourier $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n}$, en dérivant dans $D'(\mathbb{R})$ on trouve une formule sommatoire de Poisson.

Appli 50: Résolution de l'équation de la chaleur sur le cercle.

IV. Interpolation polynomiale.

1) Interpolation de Lagrange.

[Dem]

Def 51: Soient $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ distincts, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit qu'un polynôme P interpole f aux points $b_1, \dots, b_n$ si $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(b_i) = P(b_i)$.

Théo 52: Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un unique polynôme d'interpolation de degré $\leq n$ pour $n+1$ points fixés, ce polynôme est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de f.

Si f est interpolée aux points $x_0, \dots, x_n$, on pose

$$\forall i \in [\![0,n]\!] \quad l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(X - X_i)}{(X_j - X_i)}$$

Le PIL est alors donné par $\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$.

Ce n'est pas un procédé d'approximation, mais on obtient des résultats de contrôle de l'erreur utiles pour des calculs numériques. [Dem]

Théo 53: Si f est $n+1$ fois dérivable sur $[a,b]$, alors il existe pour tout $x \in [a,b]$ un point $\xi_x \in]x_i; x[$ tel que $f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x)$

où $\pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$

2) Convergence et choix des points d'interpolation

On souhaite savoir si, en augmentant le nombre de points d'interpolation (sur un intervalle $[a,b]$ fixé) on a convergence de P_n vers f uniformément. [Dem] 30 39

Théo 54: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est analytique sur un disque centré en $a+b/2$, alors pour tout choix de points d'interpolation, la suite p_n converge uniformément vers f pourvu que $R > b-a$ (rayon de convergence de f).

Phénomène de Runge: Pour $f(x) = \frac{1}{x^2+d^2}$ sur $[-1,1]$, on n'a pas convergence pour les points équidistants.

Prop: Les polynômes de Tchebychev admettant n zéros (car $\deg = n$) sur $[a,b]$, prendre ces points comme points d'interpolation minimise l'erreur.