208 Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues. Exemples.

Refs [Gou2] Gourdon Analyse [Hau] Hauchecorne : Les c-ex en mathématiques
[Brez] Brezis Analyse fonctionnelle [OA] OMP, Objectif agrégation
[Rud] Rudin, Analyse fonctionnelle

Devts Ex28 (Riesz Fischer) Théo 62 (Grothendieck) ?
Appli 65 (Banach)

On fixe comme cadre $\mathbb{K}$ un corps ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I. Généralités.

1) Espace vectoriel normé, définition et premiers exemples

[Gou2] 47-48

Def 1 : On appelle norme sur E toute application $\|.\|: E \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (définie)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (homogène)
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

On note $(E, \|.\|)$ l'espace E muni d'une norme $\|.\|$, on parle d'espace vectoriel normé.

Ex 2 : Dans $\mathbb{R}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, on a les normes classiques
$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ $\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ $\quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

On fixe $\|.\|$ une norme sur E

Rq 3 : L'application $d : (x,y) \mapsto \|x-y\|$ est une distance sur E, pour laquelle la norme est continue, ainsi que la multip scal et l'addition.

Def 4 : Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont dites équivalentes si

Appl : Norme quotient

$$\exists a, b > 0 \mid \forall x \in E, \quad a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1.$$

Prop 5 : Deux normes équivalentes sur E définissent des distances équivalentes, donc topologiquement équivalentes

Ex 6 : Les normes de l'exemple 2 sont équivalentes.

[Hau] 321

Ex 7 : Sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$ les deux normes
$\|.\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$ et $\|.\|_\infty : f \mapsto \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$
ne sont pas équivalentes.

[Gou2] 48

Prop 8 : Si V est un sous espace vect de $(E, \|.\|)$, alors $\overline{V}$ est aussi un sous espace vectoriel de E. En particulier, un hyperplan de E est fermé ou dense.

2) Continuité des applications linéaires.

On fixe E et F deux espaces vectoriels, normés respectivement par $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$.

[Gou2] 48-49

Théo 9 Si $f : E \to F$ est linéaire, les assertions suivantes s'équivalent
(i) f continue sur E (ii) f continue en 0 (iii) f bornée sur $B_f(0,1)$
(iv) f bornée sur $S(0,1)$. (v) $\exists M > 0$ tel que $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ $\forall x \in E$.
(vi) f est Lipschitzienne (vii) f est uniformément continue sur E.

Def 10 : L'ensemble des applications linéaires continues $E \to F$, noté $\mathcal{L}(E,F)$, est naturellement muni d'une norme par
$$|||f||| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$$

Rq 11 : La norme de $|||f|||$ est son rapport de Lipschitz.

Def 12 : Si $F = \mathbb{K}$ (naturellement normé par le module), alors $\mathcal{L}(E,F)$ est noté E', il s'agit d'un sous espace de E^*, qu'on appelle le dual topologique de E.

Prop 13 : Pour $f \in E^*$, on a $f \in E'$ si et seulement si $\ker f$ est un hyperplan fermé de E.

[Hau] 323

Ex 14 : L'espace $(C([0,1]), \|.\|_1)$ de l'exemple 7. L'application $f \mapsto f(0)$ est une forme linéaire discontinue.

[Brez] 1-3.

Théo 15 (Hahn Banach analytique). Soit $p : E \to \mathbb{R}$ telle que
$\bullet \forall x \in E, \lambda > 0 \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \bullet \forall x, y \in E, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
Soit aussi $G \leq E$ un sous espace vectoriel et $g \in G^*$ telle que $g \leq p$ sur G.
Alors il existe $f \in E^*$ prolongeant g et telle que $f \leq p$ ~~sur~~ E.

Cor 16 : Si $G \leq E$ est un sous-espace vectoriel, et $g \in G'$, alors il existe $f \in E'$ prolongeant g et telle que $|||f||| = |||g|||$.

Cor 17 : Pour tout $x \in E$, on a $\|x\| = \sup_{f \in E', |||f||| \leq 1} |f(x)|$.

3) Cas de la dimension finie.

Ici, E est supposée de dimension finie n.

[Gou2] 50.

Théo 18 : Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Cor 19 : Si E est de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,F) = L(E,F)$ quelque soit F.

+ rajouter normes matricielles.

[Gou2] 50

Co 20 : Tout sous-espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé

Co 21 : (Heine Borel) Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont exactement ses fermés bornés.

Rq 22 : Nos exemples 7 et 14 montrent que ces résultats sont faux en dimension infinie, de plus

[Gou2] 50.

Théo 23 (Riesz) Un K-espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte, si et seulement si il est localement compact.

II Espaces de Banach.

1) Définitions et premières propriétés

[Gou2] 48-50

Def 24 : Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet

Rq 25 : Deux normes équivalentes munissent simultanément l'espace ambient d'une structure d'espace de Banach.

Prop 26 : Si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ l'est également, en particulier E' est toujours un espace de Banach.

Théo 27 : Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach

[Brez] 57

Ex 28 : C'est aussi possible en dimension finie : $\forall\, 1 \le p \le +\infty$, $L^p(\mathbb{R})$ est un espace de Banach (Riesz Fischer) DVP

[Gou2] 48-50

Théo 29 : On a équivalence entre : $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et toute série absolument convergente de E est convergente.

Prop 30 : Si E est un Banach et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|||u||| < 1$, alors il est inversible avec $(Id-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \in \mathcal{L}(E)$ (Lemme de Neumann)

Appli 31 : Théorème de Cayley Hamilton par l'analyse complexe.

Ex 32 $C[0,1]$ est complet pour $\|.\|_\infty$, mais pas pour $\|.\|_1$

2) Grands théorèmes et éléments d'analyse fonctionnelle dans les espaces de Banach.

Par défaut, on suppose $(E, \|.\|)$ Banach.

[Brez] 15

Théo 33 (Baire) Soit X un espace métrique complet, et soit (X_n) une suite de fermés d'intérieurs vides, alors leur union est toujours d'intérieur vide (ce n'est pas toujours un fermé).

[Gou2] 399

Appli 34 Un espace vectoriel normé à base infinie dénombrable n'est pas complet. $\mathbb{R}[X]$ n'est par exemple complet pour aucune norme

[Brez] 16-17

Théo 35 (Banach Steinhaus) Soient E, F deux espaces de Banach, et $(T_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose que. $\forall x \in E$, $\exists M_x > 0 \,|\, \|T_i x\| < M$ $\forall i \in I$

Alors $\exists M > 0 \,|\, \forall x \in E, i \in I$, $\|T_i x\| < M\|x\|$.

Co 36 : Si E et F sont des espaces de Banach, et (T_n) une suite de $\mathcal{L}(E,F)$ telle que la suite $(T_n x)$ converge pour tout $x \in E$, vers une limite Tx, alors.

(a) $\sup_n |||T_n||| < \infty$ (b) $T \in \mathcal{L}(E,F)$ (c) $|||T||| \le \underline{\lim}_{n\to\infty} |||T_n|||$

Appl 37 Il existe des fonctions continues 2π-périodiques qui diffèrent de leur série de Fourier.

[Brez] 18-20

Théo 38 (Application ouverte) Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ surjectif. Alors il existe $c > 0$ telle que

$$T(B(0,1)) \subset B(0,c).$$

en particulier T est une application ouverte

Co 39 : (Isomorphisme de Banach) Avec les notations précédentes, si T est bijectif alors T est un homéomorphisme

Théo 40 : (Graphe fermé). Soient E, F deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Si le graphe de T est fermé dans $E \times F$, alors T est continue.

[Han] 151

Ex 41 : L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)\frac{1}{x}$, alors le graphe de f est fermé, mais f n'est pas continue (f n'est pas linéaire).

[Rud?] 117 118

Théo 42 (Grothendieck) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité, et F un sous espace vectoriel fermé de $L^p(\mu)$ $1 \le p < \infty$ inclus dans $L^\infty(\mu)$, alors F est de dimension finie

DVP?

III. Espaces de Hilbert

1) Généralités

Def 43 : Un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (euclidien ou hermitien suivant $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dit pré-hilbertien, noté $(\cdot,\cdot)$

[Brez] 78-79

Prop 45 : Pour H pré-hilbertien, on a l'identité du parallélogramme

$$\|a+b\|^2+\|a-b\|^2=2(\|a\|^2+\|b\|^2)$$

Prop 44 : Si H est pré-hilbertien, on a l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\forall (x,y)\in H^2, \quad |(x,y)|\le (x,x)^{\frac12}(y,y)^{\frac12}$$

En particulier, l'application $x\longmapsto (x,x)^{\frac12}=:\|x\|$ est une norme sur H, la norme associée au produit scalaire

Def 46 L'espace pré-hilbertien H est dit de Hilbert s'il est complet pour la norme induite par son produit scalaire

Rq 47 : Tout espace pré hilbertien de dimension finie est de Hilbert.

Exemple 48 : Si $(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré, alors $L^2(\mu)$ est hilbertien pour le produit scalaire $(f,g):=\int_X f\bar{g}\,d\mu$. En particulier, l'espace $\ell^2(\mathbb{C})$ est hilbertien.

On fixe à présent H hilbertien

Def 49 : Soit $A\subseteq H$, on définit l'orthogonal de A comme $A^\perp=\{x\in H \mid (x,a)=0\ \forall a\in A\}$

[Gou2] 407

Prop 50 : Pour $A\subseteq H$, $A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de H.

Prop 51 : Si $V\subseteq H$ est un sev fermé, alors $V\oplus V^\perp=H$.

Prop 52. Si $V\subseteq H$ est un sev, alors $V^\perp=\{0\}$ ssi V est dense.

Prop 53 : Si $V\subseteq H$, alors $\overline{V}=V^{\perp\perp}$

2) Applications linéaires dans un espace de Hilbert

[OA] 95

Théo 54 Soit C un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x\in H$, il existe un unique élément de C, qui réalise la distance de x à C. Ce point est appelé la projection de x sur C, noté $p_C(x)$. Il est caractérisé par

$$p_C(x)\in C \text{ et } \mathrm{Re}\left((x-p_C(x),y-p_C(x))\right)\le 0 \quad \forall y\in C.$$

Cor 55 : Si $V\subseteq H$ est un sous espace vectoriel fermé, alors F est convexe, et la projection $P_F(x)$ est caractérisée, pour $x\in H$ par

$$P_F(x)\in F \qquad x-P_F(x)\in F^\perp$$

(on parle de projection orthogonale)

[OA] 95-106

Prop 56 Si $C\subseteq H$ est un convexe fermé, l'opérateur de projection sur C est une application 1-lipschitzienne donc continue, et linéaire si C est un sous espace vectoriel de H.

Théo 57 (Représentation de Riesz) Si $\varphi\in H'$, il existe un unique $y\in H$ tel que $\varphi(x)=(x,y)$ pour tout $x\in H$ et de plus $\|\varphi\|_{H'}=\|y\|_H$. Donc $H\simeq H'$ (isométrie).

Rq 58 : Le point y peut être défini comme le minimum de la fonctionnelle $x\mapsto\frac12\|x\|^2-\mathrm{Re}(\varphi(x))$

Def 59 : Soit $u\in\mathcal{L}(H)$ ..., il existe $u^*\in\mathcal{L}(H)$ avec la propriété

$$(u(x),y)=(x,u^*(y)) \qquad \forall x,y\in H$$

c'est l'adjoint de u, si $u=u^*$, on dit que u est autoadjoint.

Appli 60 (Lax Milgram) Soit H un $\mathbb{R}$-hilbert et a une forme bilinéaire continue et coercive sur H. Alors pour tout $\varphi\in H'$, il existe un unique $x\in H$ tel que $a(x,y)=\varphi(y)$. Cet élément est caractérisé comme minimum de la fonctionnelle $y\mapsto\frac12 a(y,y)-\varphi(y)$.

3) Bases hilbertiennes.

Def 61 : On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne si elle est orthonormée ($(e_i,e_j)=\delta_{ij}$) et si son espace vectoriel engendré est dense.

[OA] 107-110

Théo 62 Un espace de Hilbert est séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne dénombrable.

Ex 63 : La famille $(e^{int})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Théo 64 Les assertions suivantes s'équivalent

(i) $(e_n)_n$ est une base hilbertienne (ii) $\forall x\in H,\ x=\sum_{n=0}^{\infty}(x,e_n)e_n$

(iii) $\forall x\in H,\ \|x\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|(x,e_n)|^2$.

Appli 65 Etude de l'espace de Bergman

$$\left\{f\in\mathcal{H}(D) \;\middle|\; \int_D|f|^2\,d\lambda<\infty\right\}$$

DVP