⚠ Convention Rudin

207 Prolongement de fonctions, Exemples et applications

[Gou2] Gourdon, Analyse
[Pom] Pommellet, Cours d'Analyse
[Rud] Rudin, Analyse Fonctionnelle
[ZQ] Zuily Queffélec Analyse pour l'agrégation
[OA] Beck,... Objectif Agrégation

Devts : Abel Angulaire & Taubérien faible
Polynômes orthogonaux
Fonction Γ d'Euler.

Def 1 : Soient X, E deux espaces topologiques, $Y \subseteq X$ et $f : Y \to E$ une application continue. On dit qu'une application $g : X \to E$ prolonge f si l'on a $g|_Y = f$.

I. Prolongement et continuité

1) Prolongement ponctuel

Soient E, F des espaces métriques, $f : D \subseteq E \to F$ continue, non définie en $a \in \bar{D} \setminus D$.

[Gou2] p16

Prop 2 : La fonction f se prolonge continûment à $D \cup \{a\}$ si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell$ existe, on prolonge alors f par ℓ en a.

La fonction $g : D \cup \{a\} \to F$ est le prolongement par continuité de f en a.

[Pom] ?

Ex 3 : $x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ se prolonge par continuité en 0

Ex 4 : $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ ——— 0

2) Prolongement par densité

[Pom] 60, 68-69

Théo 5 : Soient E un espace topologique et F un espace vectoriel normé, $f, g : E \to F$ deux applications continues. Si f et g coïncident sur une partie dense de E, alors elles sont égales sur E entier.

Théo 6 : Soient E et F deux espaces métriques avec F complet, $A \subseteq E$ une partie dense et $f : A \to F$ uniformément continue. Il existe un unique prolongement continu de f à E, qui est de plus uniformément continu.

Application 7 : Définition de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées sur les segments (limite uniforme de fonctions en escalier).

[Rud] 189

Appl 8 : Théorème de Plancherel :
La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ s'étend de manière unique à L^2. Avec $\|\hat{f}\|_2 = 2\pi^{d} \|f\|_2$

3) Prolongement Global

[ZQ] 202 221

Théo 9 (Tietze-Urysohn)
Soient X métrique, $Y \subseteq X$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ continue. Alors g admet un prolongement continu $f : X \to \mathbb{R}$.

Appl 10 : Si toute application continue de X dans $\mathbb{R}$ est bornée alors X est compact.

4) Prolongement des formes linéaires

[Rud] 57

Théo 11 (Hahn Banach Analytique)
Soit X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, M un sous espace de X, $p : X \to \mathbb{R}$ tel que
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{et} \quad p(tx) = tp(x)$$
pour $x, y \in X$, $t \geq 0$, et $f \in M^*$ telle que $f \leq p$ sur M.
Il existe alors un prolongement de f $g : X \to \mathbb{R}$ tel que
$$-p(-x) \leq g(x) \leq p(x) \quad \text{pour } x \in X.$$

Cor 12 (Hahn Banach)
Soit X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, M un sous-espace de X, $f \in M'$. Il existe $g \in X'$ prolongeant f et telle que
$$|||g||| = |||f|||$$

Cor 13. Avec les notations précédentes, pour $x \in X$, on a
$$\|x\| = \max_{\ell \in E' \setminus \{0\}} \left| \frac{\ell(x)}{\|\ell\|} \right|$$

[Pom] p67

Appl 14 : Soit F sous espace de E, alors F est dense si et seulement si toute forme linéaire continue qui s'annule sur F est nulle sur E tout entier.

[Pom]

II. Prolongement et différentiabilité.

1) Prolongement et régularité.

Théo 15 : Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to E$ une fonction continue d'un intervalle dans un EVN, et soit $a \in I$. Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si la limite de f' en a existe (on la note ℓ), alors f est dérivable en a, avec $f'(a) = \ell$

Rq 16 : L'hypothèse de continuité est nécessaire : $x \mapsto x \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x) + (x+1)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ en $a = 0$.

Exemple 17 La fonction $x \mapsto \exp(\frac{-1}{x^2})$ définie sur $\mathbb{R}^*$ s'étend à $\mathbb{R}$ en une application de classe C^∞, de dérivées nulles en 0

Appl 18 (Fonctions plateaux)
Soit $[a,b]$ un segment réel, et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, constante égale à 1 sur $[a,b]$ et nulle en dehors de $]a-\varepsilon, b+\varepsilon[$.

[RQ] 29C

Prop 19 Borel : Pour toute suite $(a_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que
$$\forall k \geq 0, \quad f^{(k)}(x_0) = a_k$$

2) Cas des solutions d'équations différentielles

[RQ] 353

On fixe $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On s'intéresse à l'équation différentielle.

$$(E) \quad \frac{\partial x}{\partial t}(t) = f(t, x(t)), \quad x \in C^1(J, \Omega). \quad J \subseteq I$$

Def 20 : Une solution (x, J) est dite globale si $J = I$.
Soient (x_1, J_1) et (x_2, J_2) deux solutions, on dit que (x_2, J_2) prolonge (x_1, J_1) si $J_1 \subseteq J_2$ et x_2 prolonge x_1 à J_2.
Une solution est dite maximale si aucune solution ne la prolonge.

371

Théo 21. Si f est continue, alors par tout point de $I \times \Omega$ passe une solution maximale (x, J) où J est un intervalle ouvert $]T_*, T^*[$
Si de plus f est localement Lipschitzienne en sa seconde variable, cette solution est unique.

Théo 22 : Alternative d'explosion

[RQ] 353 371

Si f est continue et définie sur $]a,b[\times \mathbb{R}^m$, et (x, J) est une solution maximale avec $J =]T_*, T^*[$, Alors

- Si $T^* < b$, alors $\lim\limits_{t \to T^*} |x(t)| = +\infty$
- Si $T_* > a$, alors $\lim\limits_{t \to T_*} |x(t)| = +\infty$

Cor : 23 (Critère de prolongement)
Si f est continue et définie sur $]a,b[\times \mathbb{R}^m$, et $(x,]\alpha, \beta[)$ est une solution.
S'il existe $\delta > 0$ et $A > 0$ tel que $|x(t)| \leq A$ sur $[\beta - \delta, \beta[$ (resp sur $]\alpha, \alpha + \delta]$) alors x se prolonge au delà de β (resp au delà de α) en une solution de (E)

Ex 24 : Si $f :]a,b[\times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est continue et bornée, alors toute solution de (E) est globale. Par exemple, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x^2(t)}{1 + x^2(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

il existe une unique solution, définie sur $\mathbb{R}$.

III. Prolongement analytique.

1) Comportement d'une série entière au bord de son disque de convergence.

[RQ] p50.

Dans cette partie, on fixe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon 1.
On pose $D = D(0,1)$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, on note $S = \partial D = \mathbb{U}$.

Def 25 : Un point $a \in S$ est dit régulier si il existe D_a un disque centré en a tel que f se prolonge analytiquement à $D \cup D_a$. Dans le cas contraire, a est dit singulier. On pose A_R l'ensemble des points réguliers et A_S l'ensemble des points singuliers.

[ZQ] 51

Rq 26 : Si $A_S = \emptyset$ alors par compacité de S, on a $R > 1$.

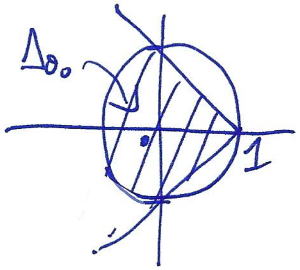
Ex 27 : Pour $\frac{1}{1-z} = \sum_0^{\infty} z^n$, on a évidemment $A_z = \Pi \setminus \{1\}$ et $A_S = \{1\}$.

[Gou2] 253-259 DEV

Théo 28 (Théorème d'Abel Angulaire)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ et telle que $\sum a_n$ converge. Soit f la somme de cette série sur D. On fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in D \mid \exists \rho > 0, \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \mid z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$$ Voir figure

Alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$



Théo 29 : (Théorème Taubérien faible)
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$, et f sa somme sur D. On suppose que la limite

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x)$$

existe et vaut $S \in \mathbb{C}$, alors si $a_n = o(\frac{1}{n})$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

2) Fonctions holomorphes.

[OA] 53 54

Théo 30 : (Zéros Isolés) Si f est une fonction analytique dans un ouvert connexe U, si f est non identiquement nulle, alors l'ensemble des zéros de f est sans points d'accumulation dans U.

[OA] 53-54

Théo 31 (Prolongement analytique)
Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble $D \subseteq U$ ayant un point d'accumulation dans U, alors elles sont égales sur U.

[OA] 110-140 DEV

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle

Def 32 : On appelle fonction poids une fonction mesurable $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) dx < \infty$. On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à λ, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_I f \bar{g} \rho \, d\lambda$, il s'agit d'un espace de Hilbert

Il existe une unique famille de polynômes unitaires orthogonale telle que $d^\circ P_n = n$

Théo 33 : Si $\exists \alpha > 0 \mid \int_I e^{\alpha|x|} \rho(x) dx < \infty$, alors (P_n) est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$

[ZQ] 20

Ex 34 (Fonction ζ de Riemann)
Pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe. Elle se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{ s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, s > 0 \} \setminus \{1\}$

313 DEV

Ex 35 (Fonction Γ d'Euler)
Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. La fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ sans zéros, admettant des pôles simples en les $-n$, $n \in \mathbb{N}$