205 : Espaces complets. Exemples et applications.

Ref : [Que] Queffélec : Topologie [Gou] Gourdon, Analyse
[Bre] Brézis, Analyse fonctionnelle. [Rou] Rouvière, Petit guide de calcul diff.
[Pom] Pommellet, Cours d'Analyse.

Dev : 39 + 40 (pcf + Riesz). 61 (Grothendieck).
44 Baguenam (Cauchy Lipschitz)
51

Cadre : (M,d) un espace métrique, $(E, \|.\|)$ un K espace vectoriel normé ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

I. Généralités sur les espaces complets.

1) Suites de Cauchy, complétude

[Que] 155 156

Déf 1 : Une suite (x_n) de (M,d) est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 \mid \forall n \geq N, p > 0, \; d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$

Prop 2 : Toute suite convergente est de Cauchy.

Rq 3 : La réciproque à cette propriété est fausse, dans $\mathbb{Q}$, la suite (x_n) définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}$ converge vers $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$, elle est donc de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ sans converger (méthode d'Héron)

Déf 4 : Si toute suite de Cauchy de M converge dans M, on dit que M est complet

Prop 5 : Soit (ε_n) une série convergente de réels > 0.
a) Si $d(x_{k+1}, x_k) < \varepsilon_k \; \forall k$, la suite (x_n) est de Cauchy
b) Si (x_n) est de Cauchy, on peut extraire (y_n) telle que
$$d(y_{k+1}, y_k) < \varepsilon \quad \forall k$$

[Gou] 20

Prop 6 : Toute suite de Cauchy est bornée dans M.

Ex 7 : $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet, mais pas $(\mathbb{Q}, |.|)$ par l'exemple 3.

Prop 7 : Deux distances d et d' sur M sont équivalentes si et seulement si les applications $Id : (M,d) \to (M,d')$ et $Id' : (M,d') \to (M,d)$ sont uniformément continues.

[Que] 155

Rq 8 : La complétude (et même la notion de suite de Cauchy) n'est pas une notion topologique : sur $\mathbb{R}$ la distance $d(x,y) = |\mathrm{Arctan}\, x - \mathrm{Arctan}\, y|$ définie la même topologie que la distance usuelle pourtant la suite des entiers naturels est de Cauchy pour la $1^{ère}$ pas pour la 2^{nde}.

Prop 9 : Soient (M,d), (M',d') deux espaces métriques, $f : M \to M'$ un homéomorphisme UC de récip UC, alors les espaces M et M' sont simultanément complets.

Cor 10 : Deux dist équiv sur M le munisse simult d'une struct d'esp Cplet

Prop 11 : Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence alors elle converge vers cette valeur (cor prop 5).

Cor 12 : Tout espace métrique compact est complet.

Rq 13 : La réciproque est fausse ($(\mathbb{R}, |.|)$) : il faut demander précompact pour avoir l'équivalence.

2) Propriétés générales des espaces complets.

[Gou] 220

Prop 14 : Soit $N \subseteq M$ avec M complet, on a l'équivalence

$$(N,d) \text{ est complet} \iff (N,d) \text{ est fermé dans } M.$$

Prop 15 : Soient $(M_1, d_1) \ldots (M_m, d_m)$ des espaces métriques, on munit le produit de la distance $d = \sup_{i=1,m} d_i$. Alors l'espace produit $\prod M_i$ est complet pour la distance produit si et seulement si tous les M_i le sont.

Ex 16 : $\mathbb{R}^1$ est complet, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}$ sont complets. Tout K espace vectoriel normé de dimension finie est complet ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Appli 17 : Un sev de dim finie d'un evn E est fermé.

Prop 18 On a équivalence entre :
(M,d) est complet. Toute suite décroissante de fermés non vide dont le diamètre tend vers 0 à une intersection non vide (donc réduite à un pt).

Théo 19 : Soit (M,d) un em, il existe un espace complet (M',d') et une injection $M \to M'$ la distance d' prolongeant d. On dit que M' est le complété de M.

Ex 20 : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Appli 21 : Si (F,δ) est un em, (M,d) complet et $f : M \to F$ continue, si (E_n) est une suite de fermés emboîtés de M de diamètre tendant vers 0, alors on a

$$f(\cap E_n) = \cap f(E_n).$$

II Exemples : Espaces de Banach.

On rappelle que E est dit de Banach s'il est complet pour la norme $\|.\|$.

Théo 22 : E est de Banach si et seulement si toute série absolument convergente de E est convergente.

1) Espaces de fonctions.

Prop 24 : L'ensemble des fonctions bornées $M \to E$ muni de la norme uniforme est un espace de Banach.

Cor 25 : L'ensemble des fonctions continues bornées $M \to E$ muni de la même norme est un espace de Banach.

Si K est compact, les fonctions continues $K \to E$ forment un Banach.

Cours L3 Gourbet

Prop 25 : L'espace $\mathcal{C}^k([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|.\| = \sum_{i=0}^{k} \|.^{(i)}\|_\infty$$

est un espace de Banach, contrairement à si on le munit de la norme $\|.\|_\infty$.

2) Applications linéaires continues.

[Gonz] 48-49

Théo 26 : Si F est un espace de Banach alors l'ensemble des applications continues linéaires $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach pour la norme d'opérateur.

Cor 27 : Le dual topologique E' est toujours un esp de Banach.

Prop 28 (Von Neumann). Soit E un Banach, $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $|||u||| < 1$. Alors $Id - u$ est inversible et son inverse est $\sum_{n=0}^{\infty} u^n \in \mathcal{L}(E)$.

Appli 29 Théorème de Cayley Hamilton via formule de Cauchy.

Appli 30 : L'ensemble $GL_c(E)$ des automorphismes continus de E est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

3) Espaces de Lebesgue.

[Brez] 54

On se place sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, muni de la mesure de Lebesgue. On considèrera par défaut des fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$.

[Brez] 54-57

Def 31 : Soit $1 \le p < \infty$, on pose $\mathcal{L}^p_{(\Omega)} = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid |f|^p \text{ est intégrable sur } \Omega\}$ et $\mathcal{L}^\infty_{(\Omega)} = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ est essentiellement bornée sur } \Omega\}$. Pour $1 \le p \le \infty$, on pose $L^p(\Omega)$ le quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par la relation d'égalité presque partout. On pose $\|f\|_p = (\int_\Omega |f|^p d\lambda)^{1/p}$ et $\|f\|_\infty$ le sup essentiel de f.

Notation 32 : Pour $1 \le p \le \infty$, posons p' l'exposant conjugué de p, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Prop 33 (Hölder). Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurables, et p, p' des exposants conjugués ($1 \le p \le \infty$) alors $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$. En particulier, si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$.

Cor 34 (Minkowski)

$\forall 1 \le p \le \infty$, $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

Cor 35 L'espace vectoriel $(L^p, \|.\|_p)$ est un evn.

Théo 36 (Riesz Fischer) $\forall 1 \le p \le \infty$, $(L^p, \|.\|_p)$ est complet.

Rq 37 Ces résultats sont aussi vrais en remplaçant Ω par $\mathbb{N}$ (les ℓ^p).

4) Espaces de Hilbert.

Rappelons qu'un espace préhilbertien $(H, \langle , \rangle)$ est dit de Hilbert s'il est complet pour la norme induite par son produit scalaire.

[Gonz] 407-408

Ex 38 En étendant la définition de la partie préc à (X, Σ, μ) un espace mesuré on obtient que $L^2(X)$ est un espace de Hilbert pour

$$(f,g) = \int_X f \bar{g} \, d\mu.$$

Théo 39 (Proj sur un convexe fermé) Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé et $x \in H$, il existe un unique élément $p_C(x) \in C$ qui réalise la distance de x à C, il est caractérisé par $\forall y \in C \ (y - p_C(x), x - p_C(x)) \le 0$. (Fig 1). DEV

Appli 40 (Représentation de Riesz) Pour $\varphi \in H'$, il existe un unique $a \in H$ tel que $\varphi(x) = (x, a)$ pour tout $x \in H$, et $|||\varphi||| = \|a\|$.

Appli 41 Soit F un sev fermé de H, alors $F \oplus F^\perp = H$

Appli 42 Soit $u \in \mathcal{L}(H)$, il existe ! $u^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$(u(x), y) = (x, u^*(y)) \quad \forall x, y \in H$. Ac $\|u\| = \|u^*\|$, c'est l'adjoint

Prop° : Un sev F de H est dense ssi $F^{\perp}=\{0\}$

Appli 44 : Étude de l'espace de Bergman du disque unité. DVP

III. Applications, Théorèmes sur la complétude.

1) Prolongement de fonctions

Théo 45 (Hahn Banach Hilbertien). Soit H un hilbert, $F \subset H$ un sev, $f \in F'$, alors il existe $g \in H'$ qui prolonge f et telle que $\|g\| = \|f\|$

Rq 46 La démo ne fait pas appel au choix contrairement au cas classique.

[Pom] p52.

Théo 47 : Soit A une partie dense de M métrique, N métrique complet, et $f : A \to Y$ uniformément continue, Alors

a) Il existe un unique prolongement C^0 de f à M.

b) Ce prolongement est UC.

Cor 48 Soit F un evn, G un sev dense de F, toute application linéaire C^0 $G \to E$ à but dans un banach se prolonge de manière unique en une appli linéaire continue $F \to E$

Appli 49 : Construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.

2) Théorème du Point fixe de Banach et applications.

[Queff] 161.

Théo 50 (Pt fixe avec param). Soit (M,d) complet, X topologique, $f : M \times X \to M$ continue et uniformément contractante : $\exists k \in]0,1[$ $| \forall y \in X, x, x' \in M$, $d(f(x,y), f(x',y)) \leq k\, d(x,x')$.

Alors pour $x \in X$ fixé, il existe un unique point fixe m_x à l'appli $m \mapsto f(m,x)$. L'application $x \mapsto m_x$ est de plus continue.

Appli 51. (Cauchy Lipschitz)

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ continue localement lipschitzienne en sa 2nd var, Alors $\forall (t_0, u_0) \in U^2$, $\exists I$ intervalle contenant t_0 et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\begin{cases} \forall t \in I, & f'(t) = \varphi(t, f(t)). \\ f(t_0) = u_0 \end{cases}$ DVP

[Rou]

Appli 52 : TIL

Appli 53 : TFI.

3) Théorème de Baire et applications.

[Brez] 15-20

Théo 54 (Baire) Soit M un em complet, (F_n) une suite de fermés d'intérieur vide, de M, alors $\bigcup F_n$ est encore d'intérieur vide.

Co 55 Dans un em complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Ex 56 : Un $\mathbb{R}$-evn à base infinie dénombrable n'est jamais complet ($\mathbb{R}[X]$).

Appli 57 L'ensemble des fonctions $[0,1] \to \mathbb{R}$ continues nulle part dérivable est dense dans $(C[0,1], \|.\|_\infty)$

Théo 55 (Banach Steinhaus) Soient E, F deux espaces de Banach (sur $\mathbb{R}$), et (T_i) une famille d'opérateurs continus $E \to F$. Si :

$$\forall x \in E,\ \exists R > 0 \mid \forall i \in I, \|T_i(x)\| < R$$

alors $$\exists R' > 0 \mid \forall x \in E, i \in I,\ \|T_i(x)\| < R\|x\|.$$

Appli 56 Il existe des fonctions continues qui diffèrent de leur série de Fourier

Théo 57 (Appli ouverte) Un opérateur linéaire continu surjectif entre deux espaces de Banach est une application ouverte.

Cor 58 (Isomorphisme de Banach). Toute bijection linéaire continue entre deux espaces de Banach est un isomorphisme + homéomorphisme.

Théo 59 (Graphe fermé) Soient E, F deux Banach, $T : E \to F$ un opérateur linéaire. Si le graphe de T est fermé dans $E \times F$, alors T est continue.

Ex 60 : L'appli $x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)(1/x)$ est de graphe fermé mais non continue car non linéaire.

[Rud 2]

Appli 61 (Grothendieck) Soient (X, Π, μ) un espace probabilisé et F un sev fermé de $L^p(\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$ contenu dans $L^\infty(\mu)$. Alors F est de dimension finie.