204 Connexité. Exemples et applications.

Refs : [Gou2] Gourdon, Analyse [Que] Queffélec, Topologie [Hau] Hauchecorne, Les contre-exemples [Rou] Rouvière, petit guide du calcul diff [Rud1] Rudin, analyse réelle et cplxe [H2G2] Caldero Germoni, vol 1 [FGNAl3] Francinou, Alg 3

Dvt : Théo 63 (Brouwer)
Théo 60 (sujet de l'expo)
Théo 63 (simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$).

Cadre : On fixe (E,d) un espace métrique, et $A \subseteq E$ une partie, munie par défaut de la distance induite.

I. Espaces connexes.

1) Définitions.

[Gou2] 38-39

Déf. Prop 1 Les assertions suivantes sont équivalentes :
- il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides
- il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides
- les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E.

Si E vérifie une de ces assertions, il est dit connexe.

Rq 2 : La notion de connexité est une notion topologique.

Ex 3 : $\mathbb{R}$ est connexe, $\{0,1\}$ muni de la topologie discrète n'est pas connexe : $\{0\}$ est ouvert fermé.

Prop 4 A est connexe pour la topologie induite équivaut à
(i) Si $A \subseteq O_1 \cup O_2$ des ouverts tels que $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ alors
$(A \cap O_1 = \emptyset$ et $A \subseteq O_2)$ ou $(A \cap O_2 = \emptyset$ et $A \subseteq O_1)$

Ex 5 : $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ n'est pas connexe car pour $a \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$

[Que] 104

Prop 6. Toute partie connexe C de E qui rencontre l'intérieur et l'extérieur de A rencontre aussi son adhérence.

2) Propriétés.

[Gou2] 39-40

Théo 7 : Soit $f : (E,d) \to (E',d')$ une application continue, si E est connexe, alors $f(E)$ l'est également.

Cor 8 (Caractérisation des connexes) Un espace (E,d) est connexe si et seulement si toute application continue $E \to \{0,1\}$ muni de la distance discrète est constante.

Rq 9 : On peut remplacer $\{0,1\}$ par tout espace discret ayant plus de deux points, comme $\mathbb{Z}$ par exemple.

Prop 10 : Soit $A \subseteq E$ une partie connexe et $B \subseteq E$ vérifiant $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ alors B est connexe, en particulier $\bar{A}$ est connexe.

Cantor.

[Gou2] 40

Prop 11 : Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de connexes d'un espace métrique (E,d). Si : $\exists i_0 \in I \mid \forall i \in I$, $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$ Alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe Fig 1

Rq 12 Bien sûr une condition devait être appliquée, l'union de connexes n'est en général pas connexe : $[0,1] \cup [2,3]$.

Rq 13 : En particulier si $\bigcap C_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup C_i$ est connexe.

Prop 14 Une famille dénombrable de connexes ayant deux à deux des intersections non triviales admet une union connexe Fig 2.

Théo 15 : Soient $E_1, \dots, E_n$ des espaces métriques, $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est connexe si et seulement si les E_i le sont tous.

[Hau] 296

Ex 16 : Une intersection de connexes n'est pas toujours connexe $\mathbb{R} \cap \mathbb{S}^1 = \{\pm 1\}$ dans $\mathbb{C}$.

3) Composantes connexes.

[Que] 113-114

Déf 17 : On définit la relation $\sim$ sur E par
$$x \sim y \iff \exists C \subseteq E \text{ connexe tel que } x \in C \text{ et } y \in C.$$
Il s'agit d'une relation d'équivalence sur E, dont les classes sont appelées les composantes connexes de E.

Prop 18 : La composante connexe de $x \in E$ (notée $C(x)$) est l'union des connexes de E contenant x.
Les composantes connexes de E sont des ouverts deux à deux disjoints.

Ex 19 : L'hyperbole d'équation $xy = 1$ dans $\mathbb{R}^2$ a deux composantes connexes. E est connexe si et seulement si il admet une unique composante connexe.

Prop 20 Toute partition de E en ouverts connexes non vides est la partition de E en ses composantes connexes.

Prop 21 : Soit $f : E \to F$ un homéomorphisme, f induit une bijection entre les composantes connexes de E et de F

Appli 22 : $[0, 2\pi]$ et $\mathbb{S}^1$ ne sont pas homéomorphes.

Théo 23 (Jordan admis) Toute courbe continue fermée simple γ à val dans $\mathbb{C}$ d'image J est telle que J^c a deux composantes connexes, une bornée C_0 et une non bornée C_∞, avec
$$\partial C_0 = \partial C_\infty = J$$

4) Connexité par arcs.

[Que] p.109

Def24 : On appelle chemin de E toute application continue $\gamma : [0,1] \to E$. Son image $\gamma([0,1])$ est appelée un arc, $\gamma(0)$ son origine et $\gamma(1)$ son but, on dit que γ lie $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$.

Def25 : L'espace E est dit connexe par arc si pour tout $(a,b) \in E^2$, il existe un chemin liant a et b.

Théo26 : La connexité par arc entraîne la connexité.

Ex27 La réciproque est fausse : l'adhérence du graphe de $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ déf sur $\mathbb{R}_+^*$ est connexe non connexe par arc dans $\mathbb{R}^2$. (Fig 3)

Prop28 : Si $\Omega \subseteq E$ est un ouvert avec $(E, \|.\|)$ un evn, alors

$$\Omega \text{ connexe} \Rightarrow \Omega \text{ connexe par arc.}$$

Rq29 : La connexité par lignes brisées et la convexité sont des renforts de la connexité par arc dans le cas des Evn.

II Connexité d'applications.

1) Analyse réelle.

[Gou] 41

Prop30 : Les connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont ainsi les convexes de $\mathbb{R}$

Appli31 L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Théo40 : (Darboux) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

[Rou] 104-105

Théo41 : Soient E, F des K-evn ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $U \subseteq E$ un ouvert et $f : U \to F$ différentiable sur U. Soient $[a;b] \subseteq U$ et $k > 0$, si

$\forall x \in [a;b]$, $\|df_x\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq k$, alors $\|f(b) - f(a)\|_F \leq k\|b-a\|$

(Acc finis généralisés).

Cor42 : Si $U \subseteq E$ est un ouvert connexe et si $df_x = 0$ sur U, alors f est constante sur U.

Théo43 (Brouwer) En notant B^n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, toute appli continue $f : B^n \to B^n$ admet un point fixe. DVP

Théo44 : Unicité Globale CL. Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et loc lip en sa seconde variable. Pour $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et f_1, f_2 deux solutions sur I du problème $\begin{cases} f'(t) = F(t, f(t)) \\ f(t_0) = y_0 \end{cases}$ sont égales sur I.

2) Analyse complexe.

[Rud] 247 252

Def45 : Un domaine de $\mathbb{C}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ non vide, on fixe un tel Ω dans la suite.

On appelle lacet dans $\mathbb{C}$ un chemin C^1 par morceaux tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Théo46 : Soit γ un lacet d'image J. L'application $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{dz}{z-a}$ est bien définie sur J^c à valeurs entières et constante sur chaque composante connexe de J^c, et nulle sur C_∞.

Appli47 : Soit Ω un ouvert convexe, $p \in \Omega$, f continue sur Ω, $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. On a, pour tout lacet γ dans Ω,

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Théo48 : Soit γ un lacet d'un ouvert convexe Ω et soit $f \in H(\Omega)$, si $z \in \Omega$ n'est pas dans l'image de γ, alors

$$f(z)\, \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Cor49 : Si f et g sont des fonctions holomorphes sur un domaine Ω et si $f(z) = g(z)$ sur un ensemble admettant un point d'accumulation dans Ω, alors $f = g$ sur Ω.

Cor49 : Les zéros d'une fonction non identiquement nulle sur Ω forment un ensemble dénombrable sans points d'accumulation.

Théo50 (Principe du maximum) Soit f holomorphe sur un domaine Ω avec $B(a,r) \subseteq \Omega$ ($r > 0$) alors

$$|f(a)| \leq \max_{b \in \partial B(a,r)} |f(b)|$$

et l'égalité a lieu si et seulement si f est constante sur Ω.

Théo 51 : (Liouville) Toute fonction entière bornée est constante

Appl 52 : (D'Alembert-Gauss) $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

III. Cas des groupes topologiques et des groupes de matrices.

[H2G2] 267

Def 53 Soit G un groupe et T une topologie sur T, on dit que G forme un groupe topologique si les opérations de produit et de passage à l'inverse sont continues.

Prop 54 : Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, le groupe $Gl_n(K)$ muni de la topologie induite par la norme de $\mathcal{M}_n(K)$ est un groupe topologique. De même que $O_n(K)$, $Sl_n(K)$ et $SO_n(K)$.

Prop 55 : Par la prop 28 les ouverts connexes de $\mathcal{M}_n(K)$ sont connexes par arcs

Prop 56 : $Gl_n(K)$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(K)$, $Gl_n(\mathbb{C})$ est connexe, donc connexe par arc, $Gl_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Prop 57 : Soit $H \leq G$ un sous groupe d'un groupe topologique. Si H et G/H sont connexes, alors G l'est également.

Théo 58 : $Gl_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes : $Gl_n^{\pm}(\mathbb{R})$.

Prop 59 : L'ensemble des projecteurs de rang p de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe

Théo 60 : L'exponentielle de matrices $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective. DVP

Prop 61 : Les groupes $Sl_n(\mathbb{R})$ et $Sl_n(\mathbb{C})$ sont connexes.

Théo 62 : Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, le groupe $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes

DVP.

[FGNA3] 67

Théo 63 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

Fig1. Prop 11

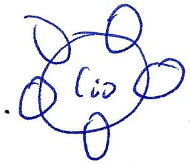

Fig3 ex27

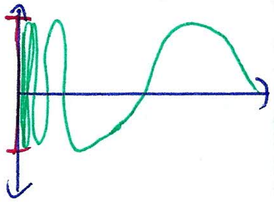

Fig2 Prop 14