203 Utilisation de la notion de compacité

Refs : [Gou2] Gourdon Analyse [Pom] Pommellet cours d'Analyse
[H-L] Hirsch Lacombe, Analyse fonctionnelle. [FGNAn2] Oraux X-ens Anal 2.
[ZQ] Zuily Queffélec, Analyse pour l'agrégation

Devts : John Loewner — Weierstrass convolution
Brouwer — Fejér ?

Cadre : On fixe (E,d) un espace métrique

I. Généralités sur la compacité

1) Définitions et caractérisations

[Gou2] 27-30

Def 1 : Un espace métrique (E,d) est dit compact si de tout recouvrement de E par des ouverts, on peut extraire un sous recouvrement fini (axiome de Borel Lebesgue)
On dit qu'une partie $A \subseteq E$ est compact si elle est compacte pour la topologie induite.

Rq 2 : Cette définition a un analogue en topologie générale mais on y adjoint une condition de séparation, toujours réalisée dans un espace métrique.

Ex 3 : Tout espace métrique fini est compact
- $\mathbb{R}$ n'est pas compact (le recouvrement $]-n,n[$ $(n\in\mathbb{N})$ est infini et irréductible.
- $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ est compact.

Prop 4 : Tout espace métrique compact est borné.

Prop 5 : (Complémentaire de Borel Lebesgue). (E,d) est compact si et seulement si de toute intersection vide de fermés de E, on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide

Prop 6 : Toute suite décroissante de fermés non vides d'un espace compact E admet une intersection non vide.

Ex 7 : Dans $\mathbb{R}$, $F_n = [n,+\infty[$ contredit cette conclusion.

Prop 8 : Une réunion finie de parties compactes est compacte
Une intersection quelconque de parties compactes est compacte.

Théo 9 (Bolzano Weierstrass) Un espace métrique (E,d) est compact si et seulement si de toute suite de points de (E,d), on peut extraire une sous suite convergente dans E.

Cor 10 : Un espace métrique E est compact si et seulement si toute partie infinie de E admet un point d'accumulation dans E. ⊛

Cor 11 Tout espace métrique compact est complet.
On a une réciproque partielle à ce résultat.

⊛ Cor 11.5 : Un fermé d'un compact est compact

[Gou2] 30

Def 12 : On dit que E est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement de E par une famille finie de boules ouvertes de rayon ε.

Théo 13 : Un espace métrique (E,d) est compact si et seulement si il est précompact et complet.

Cor 14 (Bolzano Weierstrass) Les segments de $\mathbb{R}$ sont des compacts

[Pom] ~60

Théo 15 : (Graphe fermé compact) Soit $f : E \to F$ une application avec F compact. Alors f est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $E\times F$

2) Procédé d'extraction diagonale.

Def 16 : Une partie $A \subseteq E$ est dite relativement compacte si son adhérence est compacte dans E

[H-L] 11-12

Théo 17 : Soit $(X_p, d_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une famille d'espaces métriques munis, pour tout $p\in\mathbb{N}$, d'une suite $(x_p^m)_{m\in\mathbb{N}} \in X_p^{\mathbb{N}}$. Si pour tout p, l'ensemble $\{x_p^m \mid m\in\mathbb{N}\}$ est relativement compact dans X_p, alors il existe $\phi : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que
$$\forall p\in\mathbb{N},\ (x_p^{\phi(m)})_{m\in\mathbb{N}} \text{ converge dans } X_p.$$

Rq 18 Sous l'hypothèse (X_p, d_p) compact pour tout $p\in\mathbb{N}$, la seconde hypothèse est automatiquement vérifiée

Cor 19 (Tychonov) Soit $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques, et $X = \prod_{p\in\mathbb{N}} X_p$ muni de la distance produit $d(x,y) = \sum_{p\geq 0} 2^{-p}\min(d_p(x_p,y_p),1)$
Alors X est compact si et seulement si tous les (X_p) sont compacts.

[FGN An2] 156

Théo 20 (Dini) Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ des f° continues qui convergent simplement vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
Si $f_n \leq f_{n+1}$, ~~ou si la fonction f_n sont croissantes~~, alors la convergence est uniforme.

II. Fonctions continues sur un compact.

1) Continuité et extremas.

[Gou2] 31

Prop 21 : Soit $f : E \to F$ continue avec E compact, alors $f(E)$ est compact.

Prop 22. Une bijection continue entre espaces compacts est un homéo.

[Gou2] 31

Cor 23: Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue avec E compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe $c, d \in E$ tels que

$$f(c) = \inf_{x \in E} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \sup_{x \in E} f(x).$$

[Gou2] 71

Appl 24: Rolle : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a,b[\mid f'(c) = 0$.

[Pom] 295-296

Prop 25 Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to \mathbb{R}$ continue et coercive, alors f admet un minimum sur E. John Lenn

Appli 26 (cvx) : (D'Alembert Gauss). Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Appli 27 : Soit E un espace métrique, $F \subseteq E$ cpt, $a \in E$ ..., il existe $x \in F$ tel que $d(a,F) = \inf_{y \in F} d(a,y) = d(a,x)$

Appli 28 Soit f continue : $[0,1] \to \mathbb{R}$, et $n \geq 1$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui réalise la distance de f à $\mathbb{R}_n[X]$, c'est le polynôme de meilleure approximation de f de degré n.

2) Théorème de Heine

[Pom] 265-69

Théo 30 (Heine) Toute application continue $f : E \to F$ où E est compact est uniformément continue.

Ex 31 : $x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, contrairement à $x \mapsto \sin(x)$.

Prop 32 Toute fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et périodique est uniformément continue.

Prop 33 Toute fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $\pm\infty$ est continue.

Appl 34 : Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $\int_0^1 f(x)\,dt = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

[FGN An2] 156

Théo 35 (Dini) Soit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues convergeant simplement vers $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Si les f_n sont croissantes, alors la convergence est uniforme.

3) Théorèmes de point fixes.

[Gou2] 34

Théo 36 Soit (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application continue telle que $\forall x, y \in E$ $x \neq y$, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Alors f admet un unique point fixe.

[Gou2] 34-35

Ex 37 Ceci est faux si E est seulement complet : $f : x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(x) + \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\left(x + \frac{1}{1+x}\right)$ ne possède pas de point fixe sur $\mathbb{R}$ (accroissements finis).

Prop 38 : Soit (E,d) compact et $f : E \to E$ continue vérifiant $\forall x,y \in E$ $d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$ alors f est une isométrie bijective.

Théo 39 (Brouwer). Toute application continue $f : B^n \to B^n$, où B^n est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$, admet un point fixe. DVP

À mettre en III.2

4) Théorème de Stone Weierstrass.

On fixe (E,d) compact et $C^K(X)$ les fonctions continues de E dans K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

[H-L] 27-33

Prop 40 $C^K(X)$ est un espace de Banach séparable (pom 11.11a)

Def 41 : Un sous espace vectoriel V de $C^K(X)$ est dit séparant si pour tout $(x,y) \in E^2$ avec $x \neq y$, il existe $h \in V$ tq $h(x) \neq h(y)$, et réticulé si stable par passage au sup et à l'inf de deux éléments.

Théo 42 Tout sous espace vectoriel réticulé séparant de $C^{\mathbb{R}}(X)$ contenant les fonctions constantes est dense dans $C^{\mathbb{R}}(X)$.

Ex 43 Les fonctions Lipschitziennes sont denses dans $C^{\mathbb{R}}(X)$.

Prop 44 : Toute sous algèbre de $C(X)$ est réticulée.

Théo 45 : (Stone Weierstrass Réel) Toute sous algèbre de $C^{\mathbb{R}}(X)$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C^{\mathbb{R}}(X)$.

Ex 46 : Si $X \subseteq \mathbb{R}^d$ est un compact, les fonctions polynomiales sont denses dans $C^{\mathbb{R}}(X)$. En particulier pour $d = 1$, on retrouve DVP

Théo 47 (Weierstrass) Les fonctions polynomiales sont denses dans $C([a,b], \mathbb{R})$

Théo 48 (Stone Weierstrass Complexe) Toute sous algèbre de $C^{\mathbb{C}}(X)$ séparante stable par conjugaison contenant les fonctions constantes est dense.

Ex 49 : Les polynômes complexes ne sont pas denses dans $C(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ car non autoconjugués (espace de Bergman)

Appli 50 (Fejér). Soit $f \in C_{2\pi\,per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on pose $D_n = \sum_{-n}^{n} e^{ikx}$ $K_n = \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{n-1} D_n(x)$

f est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques. DVP?

III. Compacité dans les evn

1) Cas de la dimension finie

On fixe $(E, \|.\|)$ un K evn.

[Gou2] 30 – 50

Prop 51 : Si E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes sur E.

Théo 52 : Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont ses parties fermées bornées.

Cor 53 : Toute application linéaire $E \to F$ où E est de dimension finie est continue.

Ex 54 : Munissons $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|.\|_\infty : \sum a_i X^i \mapsto \sup |a_i|$. L'application linéaire $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme associe son polynôme dérivé n'est pas continue : $f(X^n) = nX^{n-1}$ donc $\|f(X^n)\| = n$.

Théo 55 (Riesz) La boule unité fermée de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

2) Dimension infinie, espaces de fonctions, convergence faible

Retour II.4

[H-L] 37 – 39

Def 56 : Une partie H de $C(X)$ est dite équicontinue en $x_0 \in X$ si
$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0 \mid \forall x \in X,\ d(x,x_0)<\eta \Rightarrow |h(x)-h(x_0)|<\varepsilon \ \forall h \in H.$$
et équicontinue si équicontinue en tout point de X. H est dite uniformément équicontinue si :
$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0 \mid \forall x,y \in X,\ d(x,y)<\eta \Rightarrow |h(x)-h(y)|<\varepsilon.$$

Prop 57 Si X est compact, les notions d'uniforme équicontinuité et d'équicontinuité coïncident.

Ex 58 Si $C>0$, les fonctions C-Lipschitziennes de X dans K est une famille équicontinue.

Prop 59 : Soient $(f_n) \in C(X)$ une suite équicontinue, (X cpct) et $D \subseteq X$ dense. Si la suite (f_n) converge simplement sur D, alors la suite (f_n) converge uniformément sur X.

Théo 60 (Ascoli) Pour X compact, une partie de $C(X)$ est relativement compacte si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

[ZQ] 359

Théo 61 Cauchy Peano Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ C^0, alors $\forall (t_0,x_0) \in I \times \Omega$, il existe une solution à l'équation $\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Ex 62 Contrairement à Cauchy Lipschitz, on n'a pas unicité : $\begin{cases} x' = 3x^{2/3} \\ x(0)=0 \end{cases}$ admet $t \mapsto 0$ et $t \mapsto t^3$ comme solutions.

On se place à partir d'ici dans $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace de Hilbert sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

[H-L] 99 – 107

Def 63 On dit qu'une suite (x_n) de H converge faiblement vers $x \in H$ si : $\forall y \in H, \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$.
On dit que x est limite faible des (x_n) et on note $x_n \rightharpoonup x$.

Rq 64 : Cette définition est un cas particulier d'une définition plus générale sur les espaces vectoriels normés de dimension infinie, qui a pour but d'"affaiblir" la notion de convergence pour compenser le manque de compacité en dimension infinie.

Prop 65 Si elle existe, la limite faible d'une suite est unique. La convergence classique entraîne la convergence faible.

Ex 66 La réciproque est fausse, la suite $(x_n) = (1_{n})$ de $\ell^2(\mathbb{N})$ converge faiblement vers 0, mais pas fortement.

Théo 67 De toute suite bornée de H, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Application 68 : Soit $f : C \to \mathbb{R}$, où $C \subseteq H$ est non borné, convexe, une fonction continue, convexe et coercive. Alors f admet un minimum global sur C.