201. Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Refs : [HL] Hirsch-Lacombe, anal fonc [ZQ] Zuily Queffélec Analyse pour l'agreg [Gou2] Gourdon analyse [DP] Briane, Pagès intégration. [Rud2] Rudin analyse fonctionnelle [Brez] Brézis. Analyse fonctionnelle. [Bon] Bony, distributions [El Am] El Amrani Suites et séries [MB] Chaoui, Mehtalia Queffélec [Dem] Demailly [All] A. Allaire

Devt : 36 Grothendieck 52 Polarisation
17 Weierstrass 49 Bergman

Cadre : $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Espaces de fonctions régulières.

1) Généralités.

[HL] 24.

Soit (X,d) un espace métrique, on pose $C(X,\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel formé des fonctions continues $X\to\mathbb{K}$.

Def 1 : On dit que $f:X\to\mathbb{K}$ est uniformément continue si :
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \mid d(x,y)<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Prop 1 : L'uniforme continuité entraîne la continuité, mais la réciproque est fausse.

Ex 2 : $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.

Ex 3 : Les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues.

Théo 4 (Heine) Si (X,d) est compact, alors tout élément de $C(X,\mathbb{K})$ est en fait uniformément continu.

Prop 5 : Soit $f\in C(X,\mathbb{K})$. Si X est compact, alors f est bornée et atteint ses bornes.

On suppose à présent que (X,d) est compact.

Def 6 : On munit $C(X,\mathbb{K})$ de la norme uniforme sur X, notée $\|.\|$ et définie par $\|f\|_\infty := \max_{x\in X}|f(x)|$ qui donne la topologie de la convergence uniforme.

Prop 7 : L'espace $(C(X,\mathbb{K}),\|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Prop 8 (Dini) Soit $(f_n)\in C(X,\mathbb{R})$ une suite croissante qui converge simplement vers $f\in C(X,\mathbb{R})$, alors elle converge uniformément.

2) Parties compactes.

[HL] 38

Def 9 : Soit $H\subseteq C(X,\mathbb{K})$, on dit que H est équicontinue en $x_0\in X$ si :
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \mid \forall x\in X,\ d(x,x_0)<\delta \Rightarrow (\forall f\in H,\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon).$$
On dit que H est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X. On dit que H est uniformément équicontinue si :
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \mid \forall x,y\in X,\ d(x,y)<\delta \Rightarrow (\forall f\in H,\ |f(x)-f(y)|<\varepsilon).$$

Prop 10 : Si X est compact, l'uniforme équicontinuité équivaut à l'équicontinuité.

Ex 11 : Les applications L-lipschitziennes forment une famille équicontinue

[HL] 39

Théo 12 (Ascoli) Une partie de $C(X,\mathbb{K})$ est relativement compacte dans $C(X,\mathbb{K})$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue

[ZQ] 359.

Appl 13 (Arzela Peano)

Soit $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un ouvert, $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $a,b\in\mathbb{R}_+$. On note $Q=\{(t,x)\mid |t-t_0|\leq a,\ |x-x_0|\leq b\}$. Soit f continue sur Q et $M>0$ tel que $\|f\|_{\infty,Q}\leq M$. Alors le problème $\begin{cases}\partial_t x(t)=f(t,x(t))\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ admet une solution (x,J) où $J=[t_0-T,t_0+T]$ avec $T=\min(a,b/M)$

3) Parties denses. X compacte

[H-L] 28 31.

Def 14 : Une partie H de $C(X,\mathbb{R})$ est dite séparante si pour tout $x_1\neq y\in X$ il existe $f\in C(X,\mathbb{R})$ telle que $f(x)\neq f(y)$. De plus, $C(X,\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Théo 15 : (Stone Weierstrass) Toute sous algèbre séparante de $C(X,\mathbb{R})$ contenant les fonctions constantes est dense dans $C(X,\mathbb{R})$.

Théo 16 (Stone Weierstrass complexe) Toute sous algèbre séparante de $C(X)$ contenant les fonctions constantes, et stable par conjugaison, est dense dans $C(X,\mathbb{C})$.

Théo 17 (Weierstrass) Soit $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ un segment, les polynômes sont denses dans $C([a,b],\mathbb{R})$ pour la norme uniforme. DVP

Rq 18 : Conséquence directe de Stone Weierstrass, mais on peut donner une preuve directe plus élémentaire.

Appl 19. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ continue telle que $\int_0^1 f(t)t^n\,dt=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors $f=0$.

[Gou2] 276, 401

Théo 20. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ dérivables nulle part est dense dans $(C([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_\infty)$.

II. Espaces L^p

1) Structure.

[B-P] 153 161

On fixe $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré.

Def 21 : Soit $p\in\mathbb{R}_+^*$, on définit $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu)=\{f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ mesurable avec $\int_X|f|^p d\mu<\infty\}$. Pour $p=\infty$, on pose, pour $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ mesurable $\|f\|_\infty=\mathrm{supess}(f):=\inf\{M\geq 0\mid \mu(|f|>M)=0\}\geq 0$ et $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ l'ensemble des applications mesurables avec $\mathrm{supess} f<\infty$.

Ex 22 : Si μ est la mesure de comptage, on notera $\ell^p(X)$ l'espace considéré.

[BP] 150 160

Dans la suite, $p,q \in \overline{\mathbb{R}}_+$ désignent des exposants conjugués : $p^{-1}+q^{-1}=1$ avec les conventions $0^{-1}=\infty$ et $\infty^{-1}=0$.

Théo 23 (Hölder) Soient $f,g : X \to K$ deux fonctions mesurables, $p,q \geq 1$, alors
$$\|fg\|_1 \leq \|g\|_q \|f\|_p.$$
En outre si $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ alors on a égalité si et seulement si $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ pour un bon couple α, β, μ pp.

Théo 24 (Minkowski) Si $p \in [1,\infty]$, alors pour $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, on a $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. En particulier $f+g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Rq 25 : Les espaces $\mathcal{L}^p(\mu)$ ne sont pas des espaces vectoriels normés par $\|.\|_p$: cette application n'est pas définie : $\|1_a\|=0$ alors que 1_a n'est pas identiquement nulle.

Def 26 : Pour $p \in [1,\infty]$ on définit $L^p(\mu)$ comme le quotient de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par le sous espace vectoriel des fonctions nulles presque partout. La fonction $\|.\|_p$ donne alors un espace vectoriel normé $(L^p(\mu), \|.\|_p)$.

Théo 27 (Riesz-Fischer) Pour tout $p \in [1,\infty]$, l'espace $(L^p(\mu), \|.\|_p)$ est un espace de Banach.

Cor 28 : Si $(f_n) \in L^p(\mu)$ est une suite convergente on peut extraire de (f_n) une sous suite qui converge presque partout. (Et inf à une $g \in L^p$)

Ex 29 : Si $p \neq \infty$, il faut extraire a priori. (cf Fig 1).

Théo 30 (Riesz) L'espace $(L^p(\mu))'$ s'identifie à $L^q(\mu)$: toute forme linéaire continue sur $L^p(\mu)$ se réalise comme $f \mapsto \int_X gf\,d\mu$ pour $g \in L^q(\mu)$ bien choisi pour $p \in]1,\infty[$.

Rq 31 : $(L^1(\mu))'$ s'id à $L^\infty(\mu)$, mais pas l'inverse.

Prop 32 Si $\mu(X) < \infty$, alors on a les inclusions $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$ pour tout $1 \leq q \leq p < \infty$ (pas forcément exposant conjugué).

Ex 33 : Ceci est faux dans le cas général : $1_{]0,1]}(x) \times \sqrt{x}^{-1}$ est dans $L^1(\mu)$ mais pas dans $L^2(\mu)$ et réciproquement $1_{[1,\infty[}\, x^{-1}$ est dans $L^2(\mu)$ mais pas L^1. Il n'y a aucune inclusion a priori.

[Rud2] 117

Théo 34 (Grothendieck) Soit $1 < p < \infty$, $\mu(X) < \infty$, $F \subseteq L^p(\mu)$ un sev fermé contenu dans $L^\infty(\mu)$, alors F est de dimension finie. DVP

[Brez] 61 70

2) Parties denses. On fixe désormais $X = \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$, pour la mesure de Lebesgue.

Théo 35 : L'espace $C_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact forme un sous espace dense de $L^p(\Omega)$, pour $p \in [1,\infty[$

Après soit $\Omega = \mathbb{R}^d$

Théo 36 : Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1,\infty]$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. On pose
$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$$
Alors $f*g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Prop 37 : Soient $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, alors $f*g \in C(\mathbb{R}^d)$. De plus pour $k \in \mathbb{N}$ si $f \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha(f*g) = \partial^\alpha f * g$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$.
"effet régularisant de la convolution".

Def 38 : On appelle suite régularisante une suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ telle que : $\rho_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n\,d\lambda = 1$, $supp(\rho_n) \subseteq B(0,r_n]$ $r_n \to 0$.

Rq 39 : Il existe de telles suites.

Prop 40 : Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$, alors $\rho_n * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Cor 41 : Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, l'espace $C^\infty_c(\Omega)$ est dense $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$

Rq 42 : Ceci est faux pour $L^\infty(\mathbb{R})$, limite uniforme de fonction continue est continue.

Ex 39 bis : Fixons une fonction $\rho \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ avec $Supp\,\rho \subseteq B[0,1]$, positive et d'intégrale non nulle, par exemple $\rho : x \mapsto \begin{cases} e^{-(1-|x|^2)^{-1}} & \text{pour } |x|<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on considère ensuite $\rho_n = Cn^d \rho(nx)$ où $C = (\int \rho)^{-1}$.

[Bon] 167

Un autre exemple est donné par la classe de Schwartz, espace utile pour la transformée de Fourier (et plus loin la théorie des distributions)

Def 40 : On dit que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si φ est infiniment dérivable, et si φ et ses dérivées sont à décroissance rapide autrement dit bornée contre tout polynôme :
$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \|x^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty < \infty.$$

[Bon] 168 169

Prop 41 L'espace $S(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation et multiplication par des polynômes. De plus, $S(\mathbb{R}^d)$ est constitué de fonctions de limites nulles en $\pm\infty$, et inclus dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p\in[1,+\infty]$.

Cor 42 : La classe de Schwartz est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p\in[1,\infty[$.

Théo 43 : Comme $S(\mathbb{R}^d)$ est constitué de fonctions L^1, on peut déf $\mathcal{F}$ sur $S(\mathbb{R}^d)$, on obtient un isomorphisme $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}^d)\to S(\mathbb{R}^d)$.

Cor 44 : La transformée de Fourier se prolonge en un unique opérateur $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)$.

III. Espaces de Hilbert.

1) Fonctions de carré intégrable

Prop 45 : Pour $(X,\mathcal{A},\mu)$ mesuré, l'espace $L^2(\mu)$ est muni d'une structure hilbertienne par $(f,g)=\int_X f\bar{g}\,d\mu$.

Rq 46 : Le théorème de rep de Riesz est le classique dans ce cas, l'inégalité de Hölder et Cauchy Schwarz.

Fixons $X=[0,2\pi]$.

[El Am] 410

Théo 47 (Fejér). Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique et continue. En notant $e_k: x\mapsto e^{ikx}$, $S_n(f)=\sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e_k$, $C_m=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} S_k$, $u_m=\sum_{k=-m}^{m} e_k$, $U_m=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} u_k$. Les fonctions C_m convergent uniformément vers f.

Cor 48 : La famille $(\frac{1}{2\pi}e_k)$ forme une base hilbertienne de $L^2([0,2\pi])$.

[MB] 174

Ex 49 : L'espace de Bergman $B^2(D)=\{\mathrm{Hol}(D)\cap L^2(D)\}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire usuel, et une base hilbertienne est donnée par $\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,z^n$. DVP

[Dem]

On peut aussi considérer le cas où $X=I\subseteq\mathbb{R}$ est un intervalle et μ est une mesure à densité :

Def 50 : On appelle fonction poids $\rho: I\to\mathbb{R}$ toute fonction mesurable strictement positive telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_I |x|^n\rho(x)\,dx<\infty$.

Prop 51 : Il existe une unique famille (P_n) de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux telle que $\deg P_n=n$. On appelle cette famille la famille des polynômes orthogonaux pour le poids ρ.

Théo 52 : Si il existe $\alpha>0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho\,dx<\infty$. Alors la famille (P_n) est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$. DVP

Ex 53 : $\rho=1$, $I=]-1,1[$, polynômes de Legendre. $I=\mathbb{R}$ e^{-x^2}, polynômes de Hermite.

2) Espaces de Sobolev Hilbertiens.

Soit $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ un ouvert, si $u\in L^2(\Omega)$, alors $u\in L^1_{loc}(\Omega)$, donc on peut considérer $\partial^\alpha u\in\mathcal{D}'(\Omega)$, a-t-on $\partial^\alpha u$ est une fonction ?

Def 54 : Soit $k\geq 1$, on déf $H^k(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions $u\in L^2(\Omega)$ telles que, pour $\alpha\in\mathbb{N}^d$ avec $|\alpha|\leq k$, $\partial^\alpha u\in L^2(\Omega)$. Le k-ème espace de Sobolev sur Ω, on le munit du prod scal. $(u,v)_k=\sum_{|\alpha|\leq k}\int_\Omega \partial^\alpha u\,\partial^\alpha v\,dx$.
On pose $H^k_0(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^k(\Omega)$.

Théo 55 : L'espace $H^k(\Omega)$ est toujours un espace de Hilbert

Théo 56 : Si $d=1$, toute fonction $u\in H^1(\Omega)$ admet un représentant continu.

Théo 57 (Inégalité de Poincaré) Si $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ est borné, alors $\|u\|_2\leq C_p\|\nabla u\|_2$ pour tout $u\in H^1_0(\Omega)$, et $C_p>0$ la constante de Poincaré.

Ainsi $H^1_0(\Omega)$ est dans ce cas un Hilbert pour $(u,v)=\int\nabla u\nabla v\,dx$.

[All] 212

Appli 58 : Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases}-\Delta u=f & \text{sur } \Omega\\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega\end{cases}$$

Si $u\in C^2(\Omega)$ est solution de ce problème, alors

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v\,dx=\int_\Omega f v\,dx$$

pour tout $v\in C_c^\infty(\Omega)$. L'unicité et l'existence d'une solution au problème ci-dessus peut être donnée par le théorème de Lax-Milgram. Mais celui-ci ne peut s'appliquer que dans un espace de Hilbert, on doit passer à l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$, soit $H^1_0(\Omega)$.

Fig 1