191 Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

Refs : [Com] Combes, Algèbre et géométrie. [Perr] Perrin, Cours d'algèbre. [Sam] Samuel, géométrie projective. [Aud] Audin, Géométrie. [Per2] Perrin, Géométrie algébrique.

Devs : 18 Groupe des isométries du cube et du tétraèdre. 38. Isomorphismes exceptionnels. 27 Quaternions et $SO_3(\mathbb{R})$.

Cadre : On fixe k un corps, et V un k-espace vectoriel, a priori de dimension n.

I. Géométrie affine, géométrie Euclidienne.

1) Géométrie affine, groupe affine.

[Com] 105 – 121

Def 1 On appelle k-espace affine un ensemble E muni d'une action à droite libre et transitive d'un k-espace vectoriel V appelé direction de E. On appelle dimension de E la dimension de V.

Rq 2 : Pour $A, B \in E$, on note $\vec{AB}$ l'unique élément de V tel que $B = A + \vec{AB}$

Ex 3 : Les solutions d'un système différentiel linéaire forment un $\mathbb{R}$-espace affine, dont la direction est constituée des solutions de l'équation homogène associée.

On fixe E un k-espace affine de direction V.

Def 4 : Soient E, E' deux k-espaces affines de directions respectives V et V'. On dit que $f : E \to E'$ est une application affine s'il existe $\vec{f} \in \mathcal{L}(V, V')$ telle que $\forall A, v \in E \times V$, $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v)$. On notera $A(E, E')$ l'ensemble des applications affines de E dans E'.

Prop 5 : Soient $E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E''$ deux applications affines, on a $g \circ f \in A(E, E'')$ et $\vec{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$.

Ex 6 : Pour $v \in V$, l'application $x \mapsto x + v$ de E dans E est affine, on la note t_v, on note $T(E)$ l'ensemble des telles applications (translations). Les homothéties ($x \mapsto M + \lambda \vec{Mx}$ pour M, λ fixés) sont affines, de directions les homothéties vectorielles.

Prop 7 : Soit $f \in A(E, E')$, on a équivalence entre : – f est bijective – $\vec{f}$ est un isomorphisme – f admet une réciproque affine. On dit alors que f est un isomorphisme affine, on note $GA(E)$ le groupe des automorphismes affines de E, appelé groupe affine de E.

Prop 8 : Tout k-espace affine de dimension n est isomorphe à k^n vu comme k-espace affine.

Théo 9 : Considérant l'application $GA(E) \xrightarrow{L} GL(E)$, qui à f associe $\vec{f}$, on a une suite exacte courte scindée à droite $T(E) \hookrightarrow GA(E) \xrightarrow{L} GL(E)$ et donc un produit semi-direct $GA(E) \simeq T(E) \rtimes GL(E) \simeq k^n \rtimes GL_n(k)$.

Prop 10. Les homothéties affines sont exactement les applications affines envoyant toute droite de E sur une droite parallèle.

On rappelle qu'on peut munir les bases de V d'une relation d'équivalence donnant la notion de base directe et indirecte. Cette même relation se transporte aux repères cartésiens dans E.

2) Géométrie euclidienne, groupes d'isométries. Ici, $k = \mathbb{R}$.

[Com] 153 – 174

Def 11 On appelle espace (affine) euclidien de dimension n, un espace affine E sur un espace vectoriel euclidien de dimension n. Un tel espace est naturellement muni d'une distance par $AB := \|\vec{AB}\|$.

On suppose désormais E euclidien.

Prop-def 12 Soit E, E' des espaces euclidiens de même dimension sur V et V' (respectivement) et $f \in A(E, E')$. On a équivalence entre : – f est isométrique – $\vec{f}$ est orthogonale. On dit alors que f est une isométrie affine, on note $\mathrm{Isom}(E)$ ces isométries et $\mathrm{Isom}^+(E)$ les directes.

Prop 15 Avec les notations du Théo 9, on a une suite exacte courte $T(E) \hookrightarrow \mathrm{Isom}(E) \twoheadrightarrow O(E)$ et $T E \rtimes O(E) \simeq \mathrm{Isom}(E)$, de plus $\mathrm{Isom}^+(E) \simeq T(E) \rtimes SO(E)$.

Prop-def 16 On appelle symétrie hyperplane de E toute isométrie f telle que $\vec{f}$ soit une réflexion. Tout élément de $\mathrm{Isom}(E)$ est produit d'au plus n symétries hyperplanes, avec un nombre pair de facteurs exactement pour les éléments de $\mathrm{Isom}^+(E)$.

Rq 17 : Ceci est utile pour la classification des isométries en dimension 2 et 3 par exemple.

Ex 18. On peut étudier les sous-groupes de $\mathrm{Isom}^{(+)}(E)$ conservant une partie de E, ainsi pour $T \subseteq \mathbb{R}^3$ et $C \subseteq \mathbb{R}^3$ un tétraèdre régulier et un cube régulier, on a $\mathrm{Isom}(T) = \mathfrak{S}_4$ $\mathrm{Isom}^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$ $\mathrm{Isom}(C) = \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\mathrm{Isom}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$ DVP

3) Similitudes et liens avec les nombres complexes. Toujours $k = \mathbb{R}$.

Def 19 : On appelle similitude de E les applications $f : E \to E$ telles que $\exists k_f \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall M N \in E$, $f(M)f(N) = k_f MN$. On note $\mathrm{Sim}(E)$ les similitudes de E.

Prop 20 : En notant H les homothéties et translations de E, on a
(a) $\mathrm{Sim}(E) \leq GA(E)$, avec $T(E)$, $H(E)$ et $\mathrm{Isom}(E)$ des sous-groupes distingués de $\mathrm{Sim}(E)$
(b) Pour $f \in \mathrm{Sim}(E)$, $k_f \neq 1 \Rightarrow f$ admet un unique point fixe.
(c) $\mathrm{Sim}(E)$ est isomorphe au produit semi-direct $I \rtimes \mathbb{R}_+^*$, en peut une similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie

En identifiant $E = \mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$, les similitudes de E sont exactement les applications $z \mapsto \alpha z + \beta$ ou $\alpha \bar{z} + \beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. ~~Les similitudes~~ directes sont les $z \mapsto \alpha z + \beta$.

Cor 21 : Les isométries de $E = \mathbb{C}$ sont exactement les $z \mapsto e^{i\theta} z + \beta$ où $\beta \in \mathbb{C}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

Cor 22 : On a un isomorphisme entre $SO_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1.

4) Apport des quaternions.

[Perr] 161

On peut chercher à généraliser le lien entre $\mathbb{C}$ et $SO_2(\mathbb{R})$ pour modéliser $SO_3(\mathbb{R})$ ou encore $SU_2(\mathbb{C})$, et ce à l'aide des quaternions.

[Perr] 161 167 **Def 23** : On appelle algèbre des quaternions (notée $\mathbb{H}$) l'algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, munie d'une base $1, i, j, k$, telle que.
- L'élément $1 \in \mathbb{H}$ est l'élément neutre
- On a les formules $i^2 = j^2 = ijk = k^2 = -1$ $\quad ij = k = -ji \quad jk = -kj = i \quad ki = j = -ik$

Le corps $\mathbb{R}$ est isomorphe à la sous algèbre $\{a.1 \mid a \in \mathbb{R}\}$ avec laquelle on l'identifie.
Un quaternion q s'écrit alors $q = a + bi + cj + dk$, $a\, b\, c\, d \in \mathbb{R}$.

Def 24 : Pour $q = a+bi+cj+dk \in \mathbb{H}$, on pose $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ le conjugué de q, et $N(q)$ sa norme est définie par $N(q) = q\bar{q} = a^2+b^2+c^2+d^2 \in \mathbb{R}_+$.

Prop 25 : La conjugaison dans $\mathbb{H}$ est un anti automorphisme (i.e $\mathbb{R}$ linéaire et vérifiant $\overline{qq'} = \bar{q'}\,\bar{q}$.

Théo 26 : L'algèbre $\mathbb{H}$ est un corps gauche, de centre égal à $\mathbb{R}$. Et la norme $N : \mathbb{H}^* \to \mathbb{R}_+^*$ est un morphisme de groupes, dont on note G le noyau (les quaternions de norme 1)

Théo 27 : L'action de $\mathbb{H}^*$ sur $\mathbb{H}$ par automorphisme intérieurs induit une suite exacte courte non scindée $\{\pm 1\} \hookrightarrow G \twoheadrightarrow SO_3(\mathbb{R})$ DVP

Rq 28 : Comme dans le cas complexe on peut ainsi ramener le calcul de l'image d'un point de $\mathbb{R}^3$ par une rotation à une multiplication dans $\mathbb{H}$.
En voyant $\mathbb{C}$ comme sous algèbre de $\mathbb{H}$, on peut également montrer

Théo 29 : On a $SU_2(\mathbb{C}) \simeq G$, et donc $SU_2(\mathbb{C})/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

II Géométrie projective.

1) Espaces projectifs, homographies

On suppose ici V de dimension $n+1$.

[Sam] 13 16 **Def 30** : On considère l'action de k^* sur $V \setminus \{0\}$ par multiplication scalaire. On note $P(V)$ l'ensemble des orbites sous cette action, l'espace projectif associé à V. On pose n la dimension de $P(V)$, et p la projection $V \twoheadrightarrow P(V)$.

Rq 31 : $P(V)$ est l'ensemble des droites vectorielles de V.

Not 32 : On notera $P^n(k)$ au lieu de $P(k^{n+1})$.

Def 33 : Pour $F \subseteq V$ un sous espace vectoriel de dimension ≥ 1, on appelle $p(F) \subseteq P(V)$ un sous espace projectif de dimension $\dim F - 1$.

Rq 34 On peut ainsi parler de droite projective dans un plan projectif. Ou d'hyperplan proj

Def 35 : Etant donnée une base $\mathcal{B}$ $(e_0 \dots e_n)$ de V, on peut associer à $A \in P(V)$ les coord d'un vecteur de $p^{-1}(A)$ dans la base $\mathcal{B}$. Par définition de $P(V)$, ces coordonnées sont définies à scalaire près.

[Aud] **Def 36** : Soient V, V' deux k-espaces vectoriels, on dit que $g : P(V) \to P(V')$ est une homographie s'il existe $f : V \to V'$ un isomorphisme faisant commuter le diagramme ci-contre.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ P(V) & \xrightarrow{g} & P(V') \end{array}$$

[Aud] **Prop 37** : L'ensemble des endohomographies de $P(V)$ forme un groupe, dit groupe projectif sur $P(V)$, et noté $PGL(V)$. On a $PGL(V) \simeq GL(V)/Z(GL(V))$.

Théo 38 (Isomorphismes exceptionnels) On a les isomorphismes de groupe suivants. [Perr]
- $GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PGL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$
- $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ $\quad$ - $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$
- $PGL_2(\mathbb{F}_4) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$
- $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$ $\quad PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$.

DVP

Prop 39 : Soit $F \subseteq V$ un hyperplan, posons $H = p(F) \subseteq P(V)$ un hyperplan projectif. [Sam] 22, 23
Alors $P(V) \setminus H$ est un espace affine de dimension n, de direction l'ensemble des homographies de $P(V)$ fixant H ponctuellement.

Def 40 : On a une sorte de réciproque : Pour E un k-espace affine de direction V, On appelle clôture projective de E l'espace $\hat{E} = P(V \times k)$. Pour $A \in E$, on a une injection $j_A : M \mapsto P(\vec{AM}, 1)$, et E s'identifie au complémentaire de $P(V \times 0)$. Ceci est utile pour les problèmes d'intersections de droites : deux droites projectives sont toujours sécantes.

Prop 41 : On a un monomorphisme $GA(E) \hookrightarrow PGL(\hat{E})$: $GA(E)$ s'identifie aux homographies laissant $P(V \times 0)$ globalement invariant.

Théo 42 (Pappus) Soit P un plan projectif, D, D' deux droites de P. A, B, C (resp A', B', C') trois points de D (resp de D'). On pose $\alpha = (B'C) \cap (BC')$ $\beta = (AC') \cap (A'C)$ $\gamma = (AB') \cap (A'B)$. [Aud] 184 185
Alors α, β, γ sont alignés.

Théo 43 (Desargues) Dans un plan projectif P. Soient ABC $A'B'C'$ deux triangles α, β, γ définis comme au théorème précédent. Alors α, β, γ sont alignés si et seulement si (AA') (BB') (CC') sont concourantes.

2) Cas de la droite projective complexe.

[Aud] 200 203 Dans le cas où $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut munir $P^n(\mathbb{R})$ et $P^n(\mathbb{C})$ d'une topologie comme quotient de la topologie euclidienne (ou hermitienne) sur les espaces vectoriels de dimension finie.

Théo 44 : On a $P^1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1$, $P^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{S}^2$. Plus généralement, $P^n(k)$ est une compactification de k^n.

Prop 45 : Le groupe $PGL_2(\mathbb{C})$ est constitué des transformations $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ où $ad - bc \neq 0$ Avec la convention de prolonger $\frac{1}{z}$ par ∞ en 0 et 0 en ∞, en voyant $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Ex 46 : Les similitudes directes sont des homographies

Prop 47 Le groupe $PGL_2(\mathbb{C})$ est engendré par les similitudes directes et la fonction inverse.

[Aud] 196 203

Prop 48: Les homographies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont 3-transitives : Pour tout triplet de points distincts (u,v,w), (u',w',w') dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, il existe une unique homographie f telle que $f(u)=u'$ $f(v)=v'$, $f(w)=w'$.

Rq 49: On a ainsi une unique homographie envoyant u sur 0, v sur 1 et w sur ∞.

Def 50: Pour $a,b,c,d \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ distincts. On définit le birapport $[a,b,c,d]$ de ces points comme l'image de d par l'homographie envoyant a sur 0, b sur 1 et c sur ∞.

Prop 51: Pour $a,b,c,d \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ distincts, on a $[a,b,c,d] = \frac{d-a}{d-c}\,\frac{b-c}{b-a}$.

Ex 52: On a $[1,i,-i,-1] = 2$.

Théo 53: Soit $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une bijection, f est une homographie si et seulement si elle préserve les birapports.

Prop 54: Pour que quatre points de $\mathbb{C}$ ou cocycliques. Il faut et il suffit que leur birapport soit réel.

Cor 55: Toute homographie de la droite projective complexe transforme un cercle ou une droite de $\mathbb{C}$ en un cercle ou une droite de $\mathbb{C}$.

Prop 56: Par projection stéréographique, les cercles et droites de $\mathbb{C}$ correspondent en fait aux cercles de S^2. (Fig 1)

IV Prologue à la géométrie algébrique.

[Perr2] 9 11

On considère $n>0$ un entier et on se place dans k^n. Pour $x=(x_1 \dots x_n) \in k^n$ et si $P(X_1 \dots X_n) \in k[X_1 \dots X_n]$ on pose $P(x) = P(x_1 \dots x_n)$.

Def 57: Soit $S \subseteq k[X_1 \dots X_n]$ une partie quelconque. On pose

$$V(S) = \{x \in k^n \mid \forall P \in S,\ P(x)=0\}.$$

On dit que $V(S)$ est l'ensemble algébrique affine défini par S. On notera souvent $V(F_1,\dots,F_n)$ au lieu de $V(\{F_1,\dots,F_n\})$ si $S=\{F_1 \dots F_n\}$ est un ensemble fini.

Ex 58: - $V(1)=\emptyset$ et $V(0)=k^n$: ceux ci sont des ensembles algébriques affines.
- Si $n=1$, et $S \neq \{0\}$, alors $V(S)$ est fini : les ensembles algébriques affines non triviaux de la droite sont les ensembles finis

Prop 59: L'application V est décroissante : Si $S \subseteq S' \subseteq k[X_1 \dots X_n]$, alors $V(S') \subseteq V(S)$.
- Si $\langle S \rangle$ désigne l'idéal de $k[X_1,\dots,X_n]$ engendré par S, alors $V(\langle S \rangle) = V(S)$.
- Tout ensemble $V(S)$ peut s'écrire comme $V(f_1,\dots,f_r) = V(f_1) \cap \dots V(f_r)$ (car $k[X_1 \dots X_n]$ est noethérien). (il est réalisé par un nombre fini d'annulations).

Théo 60: Les ensembles de la forme $V(S)$ pour $S \subseteq k[X_1 \dots X_n]$ forment les fermés d'une topologie, dite de Zariski, sur k^n.

Rq 61: Cette topologie est bien différente de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: tous les ouverts sont denses, elle n'est pas séparée.

Rq 62: Pour $f \in k[X_1 \dots X_n]$, on pose $D(f) = k^n \setminus V(f)$, un tel ouvert est dit standard, tout ouvert de Zariski est réunion finie d'ouverts standards

Def 63: Soit $V \subseteq k^n$. On appelle idéal de V l'ensemble

$$I(V) = \{f \in k[X_1 \dots X_n] \mid f_{|V} = 0\} \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$$

il s'agit d'un idéal de $k[X_1 \dots X_n]$. On pose alors $\Gamma(V) = k[X_1 \dots X_n]/I(V)$.

[Perr2] 11 19

Prop 64: L'application $V \mapsto I(V)$ est elle aussi décroissante.
- On a $I(\emptyset) = k[X_1 \dots X_n]$ et $I(k^n) = \{0\}$ si k est infini

Prop déf 65: Soit $X \neq \emptyset$ un espace topologique. On a équivalence entre.
- $X = F \cup G$ ou F, G fermés $\Rightarrow X=F$ ou $X=G$
- Si deux ouverts sont d'intersection vide alors l'un au moins est vide.

On dit alors que X est irréductible

Rq 66 Inutile dans le cas 'usuel' : Un espace topologique séparé non réduit à un point n'est jamais irréductible.

Théo 67: Soit V un ensemble algébrique affine muni de sa topologie de Zariski, on a equiv entre : - V est irréductible - $I(V)$ est premier - $\Gamma(V)$ intègre.

On suppose à partir d'ici k-algébriquement clos.

Théo 68 (Nullstellensatz Faible) Si $I \subseteq k[X_1 \dots X_n]$ est un idéal propre de $k[X_1 \dots X_n]$. Alors $V(I)$ est non vide.

Théo 69 (Nullstellensatz) Si $I \subseteq k[X_1 \dots X_n]$ est un idéal, alors $I(V(I)) = \mathrm{rad}(I)$
$= \{f \in k[X_1 \dots X_n] \mid (\exists r \geq 1)\ f^r \in I\}$

Def 70: On dit qu'un idéal I d'un anneau est radical si $I = \mathrm{rad}(I)$.

Théo 71 On a deux bijections décroissantes réciproques I et V entre les ensembles algébriques affines de k^n et les idéaux radicaux de $k[X_1 \dots X_n]$.
De plus, pour $W \subseteq k^n$ un eaa, on a
- W irréductible $\Leftrightarrow I(W)$ premier $\Leftrightarrow \Gamma(W)$ intègre
- W est un singleton $\Leftrightarrow I(W)$ est maximal $\Leftrightarrow \Gamma(W) = k$.

Prop 72 Sous les mêmes notations W est fini $\Leftrightarrow \Gamma(W)$ est de dim finie sur k.

Fig 1