181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications

Refs : [TauG] Tauvel, Géométrie ; [Mer] Merlin, Cours de Géométrie ; [Tru] Truffault Géométrie élémentaire. [H2G2] [FGN3]

Dev.
- 27 (groupe cube).
- 32 (Gauss-Lucas).
- 383 (Carathéodory)

Cadre : On fixe E un espace affine réel de dimension $d<\infty$ et V la direction de E

I. Barycentres.

1) Définitions et premières propriétés.

[TauG] 17-19 ou [Mer] 34-36

Def 1 : On appelle système de points pondérés la donnée de n couples (A_i, α_i) de $E\times\mathbb{R}$. À ce système on associe la fonction de Leibniz $f : M \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

Rq 2 : Pour tout $O\in E$, $f(M) = \left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right]\overrightarrow{MO} + f(O)$ donc si $\sum\alpha_i = 0$ f est constante et si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$, f est bijective.

Def 3 : On appelle barycentre des $((A_i,\alpha_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$, où $\sum\alpha_i\neq 0$, l'unique point $G\in E$ tel que $f(G)=\vec{0}$, ou de façon équivalente, $\overrightarrow{OG} = (\sum\alpha_i)^{-1}\sum\alpha_i\overrightarrow{OA_i}$ où $O\in E$ est quelconque.

Prop 4 : Soit G le barycentre des $((A_i,\alpha_i))$, on a
- Homogénéité : $\forall\lambda\in\mathbb{R}^*$, $G = \mathrm{bar}(A_i,\lambda\alpha_i)$.
- Commutativité, $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n$, $G = \mathrm{bar}(A_{\sigma(i)},\alpha_{\sigma(i)})$.
- Associativité, soit $J\subseteq[\![1,n]\!]$, $s=\sum_{i\in J}\alpha_i$; si $s\neq 0$, alors G est le barycentre de $(A_i,\alpha_i)_{i\notin J}$ et de $(g,s) = \mathrm{bar}(A_i,\alpha_i)_{i\in J}$.

Def 5. On appelle isobarycentre de n points $A_1,\dots,A_n$ de E le barycentre des points $(A_i,\frac{1}{n})$. Si $n=2$, on parle de milieu du segnet $[A_1,A_2]$.

Appl 6 :
- Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G, l'isobarycentre de ses sommets, situé au tiers de la base de chaque médiane
- L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le milieu des diagonales et appartient aux droites passant par les milieux des côtés opposés.
- L'isobarycentre des sommets d'un tétraèdre régulia est situé au quart de la base de chacun des segments joignant un sommet avec l'isobarycentre des trois autres. Il coïncide avec le milieux des segments joignants les milieux de deux arêtes opposées.

2) Lien avec la structure affine.

[TauG] 20-25

Théo 7 Soit $A\subseteq E$ une partie non vide, le sous-espace affine de E engendré par A est donné à l'ensemble des barycentres de points de A.

Ex 8 : Pour $A\neq B$ deux points, on obtient la droite (AB). Pour ABC trois points non alignés, on obtient le plan (ABC).

Théo 9 Une partie $F\subseteq E$ non vide est un sous-espace affine si et seulement si elle stable par barycentration, si et seulement si elle est stable par barycentration de deux points.

Def 10 : Soient E, E' des espaces affines, V et V' leurs directions, une application $f : E\to E'$ est dite affine si il existe $\vec{f} : V\to V'$ linéaire telle que $\forall M\in E, \forall \vec{u}\in V$, $f(M+\vec{u}) = f(M)+\vec{f}(\vec{u})$.

Prop 11 : Une application $f : E\to E'$ est affine si et seulement si elle préserve les barycentres : $f(\mathrm{bar}(A_i,\alpha_i)) = \mathrm{bar}(f(A_i),\alpha_i)$

App 12 : Si $A\subseteq E$ est non vide et $f : E\to E'$ est affine, l'image par f du sea engendré par A est le sea engendré par $f(A)$.

3) Repérage.

[TauG] 29-30

Théo 13. Soit $A_0\dots A_n\in E$, on a équivalence entre :

i) $\forall j\in[\![0,n]\!]$, la famille $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\neq i}$ est libre

ii) $\forall j\in[\![0,n]\!]$, A_j n'est pas dans le sea engendré par les $(A_i)_{i\neq j}$

iii) $\exists j\in[\![0,n]\!]$ tel que la famille $(\overrightarrow{A_iA_j})_{i\neq j}$ est libre.

Def 14 : Une famille $A_0\dots A_n$ est dite affinement libre si elle vérifie l'une des conditions ci-dessus.

Def 15 : On appelle repère affine la donnée de $n+1$ points affinement libres de E.

Rq 16. Cela signifie que $(A_0\dots A_n)$ forme un repère affine si et seulement si $(\overrightarrow{A_0A_i})$ forme une base de $\vec{V}$.

Def 17 : Soit $R = (A_0\dots A_n)$ un repère affine de E et $M\in E$. On appelle système de coordonnées barycentrique de M dans R tout n-uplet $(\alpha_0\dots\alpha_n)$ de $\mathbb{R}$ tel que $M = \mathrm{bar}(A_i,\alpha_i)$.

Le système est dit normalisé si $\sum\alpha_i = 1$.

[TauG] 30

Théo 19 Deux systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point sont proportionnels. Le système de coordonnée barycentrique normalisé d'un point est unique.

Ex 18 : Il faut que R soit un repère. Si A_0 est le milieu de $[A_1, A_2]$, alors $A_0 = \mathrm{bar}(A_0, 1)(A_1, 0)(A_2, 0) = \mathrm{bar}(A_0, 0)(A_1, 1)(A_2, 1)$, cependant $(1\,0\,0)$ et $(0\,1\,1)$ ne sont pas proportionnels.

4) Interprétation en terme d'aires.

[Tru] 47

Dans cette section ABC désigne un triangle non plat et M désigne un point du plan (ABC) tel que $M \notin (AB) \cup (BC) \cup (AC)$

Def 20 : L'aire algébrique du triangle MBC est son aire géométrique affectée d'un signe $+$ s'il a la même orientation que ABC et du signe $-$ sinon. (Fig 1)

Prop 21 : Dans le repère (A, B, C), les aires algébriques des triangles MBC, MCA et MAB forment un système de coordonnées barycentriques de M.

5) Application des barycentres dans un plan affine.

Appl 22 : Soit ABC un triangle, on pose $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.
- Le centre du cercle inscrit dans ABC a pour coordonnées barycentriques (a, b, c) dans le repère (A, B, C)
- Le centre du cercle circonscrit à ABC a pour coordonnées barycentriques $(\sin 2\hat{A}, \sin 2\hat{B}, \sin 2\hat{C})$ dans le repère (A, B, C).
- $(\tan \hat{A}, \tan \hat{B}, \tan \hat{C})$ est un système de coordonnées barycentriques pour l'orthocentre de ABC.

[TauG] 23 24

Théo 23 (Menelaüs) Soit un triangle ABC et trois points A', B', C' situés respectivement sur $(BC), (AC), (AB)$, tous distincts des sommets. Alors A', B', C' sont alignés si et seulement si : $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$

Théo 24 (Ceva) Avec les mêmes hypothèses, on a (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

6) Groupes d'isométries.

[H2G2]

Def 25 : Soit E_3 un $\mathbb{R}$-espace affine euclidien de dimension 3 et $\emptyset \neq X \subseteq E$, On note

$\mathrm{Isom}\, X = \{ f \in O(E) \mid f(X) = X \}$

$\mathrm{Isom}^+ X = \{ f \in SO(E) \mid f(X) = X \}$.

Ce sont des sous groupes du groupe affine de E.

Considérons C_6 un cube régulier et Δ_4 un tétraèdre régulier.

Prop 26 Les groupes $\mathrm{Isom}^{(+)} C_6$ et $\mathrm{Isom}^{(+)}(\Delta_4)$ agissent sur les sommets respectifs

Prop 27 : On a $\mathrm{Isom}^{(+)}(\Delta_4) \simeq \mathfrak{S}_4$, $\mathrm{Isom}^+ \Delta_4 = \mathfrak{A}_4$ **DVP**

$\mathrm{Isom}^+(C_6) = \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Isom}(C_6) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

II. Convexité :

1) Définitions et premières propriétés

[TauG] 69-70

Def 28 : Soient $A, B \in E$, L'ensemble $[AB] = \{ M \in E \mid \exists t \in [0,1] \mid \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \}$. est appelé segment d'extrémités A et B.

Def 29 : Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de points de E, et $B \in E$, On dit que B est une combinaison convexe des $(A_i)_{i \in I}$ s'il existe $(\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulle et positive telle que $\sum \lambda_i = 1$ et $B = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)$.

Def 30 : Une partie $A \subseteq E$ est dite étoilée en $M \in A$ si : $\forall N \in A$, $[MN] \subseteq A$.
A est dit convexe si A est étoilée en chacun de ses points.

Ex 31 : Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, ce sont aussi des convexes
Les sous espaces et les boules de E sont convexes
- L'intersection de convexes est convexe
- L'image directe/réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.
- L'adhérence d'un convexe est convexe
- Si A, B sont convexes, alors $A+B$ aussi

[FGN3] 229

Appl 32 : (Ellipsoïde de John Loewner) Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K. **DVP**

2) Enveloppe convexe

[Tauv] 71 72

Déf 33 : Soit $\emptyset \neq A \subseteq E$. L'intersection de tous les convexes contenant A est le plus petit convexe contenant A. On l'appelle l'enveloppe convexe de A et on la note conv(A).

Théo 34 : L'enveloppe convexe de A est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A.

Prop 35 (Lucas) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P.

Prop 36 : Soit $A \neq \emptyset$ une partie de E.
1) L'intersection des convexes fermés contenant A est $\overline{\mathrm{conv}(A)}$.
2) Si A est convexe compact, alors $A = \mathrm{conv}(\partial A)$.
3) Si A est ouvert, conv(A) aussi.

Rq 37 : Si $A = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid xy \geq 1\}$ alors $\mathrm{conv}(A) = \{(0,0)\} \cup (\mathbb{R}_+^*)^2$, donc l'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas toujours fermée.

Théo 38 (Carathéodory) Soit $A \subseteq E$, tout élément de conv(A) s'écrit comme combinaison convexe de k points de A, avec $k \leq 1+d$. **DVP**

Cor 39 Soit $\emptyset \neq A \subseteq E$.
1) Si A est compact, alors conv(A) aussi
2) Si A est bornée, alors conv(A) aussi et $\delta(A) = \delta(\mathrm{conv}(A))$ où $\delta(A)$ est le diam. de A

3) Points extrémaux.

[Tauv] 82 83.

Déf 40 : Soit $A \subseteq E$ convexe, $M \in A$. On dit que M est extrémal si $\forall P, Q \in A$, $\forall t \in]0,1[$, $M = tP + (1-t)Q$ entraîne $M = P$ ou $M = Q$. L'ensemble des points extrémaux de A est noté Extr(A).

Ex 41 : Si $O \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\mathrm{Extr}(B[O,r]) = S(O,r)$.

[Tauv] 82 83

Prop 42 : Soit $A \subseteq E$ convexe et $M \in A$, on a équivalence entre
- $M \in \mathrm{Extr}\,A$
- $A \setminus \{M\}$ est convexe
- Si M est combinaison convexe d'éléments de A, M est égal à un de ces éléments.

Théo 43 (Krein Milman) Pour tout $\emptyset \neq A \subseteq E$ convexe compact, on a $A = \mathrm{conv}(\mathrm{Extr}\,A)$.

[FGN3] 130

Appl 44 : Soit E euclidien. $B = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \|u\| \leq 1\}$, alors $\mathrm{Extr}(B) = O(E)$.

4) Résultats de séparation.

[Tauv] 79

Théo 45 (Hahn Banach) Soient $\emptyset \neq A$ ouvert convexe et $L \subseteq E$ tel que $A \cap L = \emptyset$. Alors il existe un hyperplan H de E tel que $L \subseteq H$ et $A \cap H = \emptyset$.

Ex 46 : Si $E = \mathbb{R}^2$, $L = \{(2,0)\}$, $A = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \cup ([0,1] \times \{0\})$ (car A non ouvert).

Déf 47 : Soient $A, B \subseteq E$. $H \subseteq E$ hyperplan
1) H sépare A et B si A est contenu dans l'un et B dans l'autre des demi-espaces fermés déterminés par H.
2) H sépare strictement A et B si A est contenu dans l'un et B dans l'autre des demi-espaces ouverts déterminés par H.

Théo 48 : Soient $\emptyset \neq A, B$ convexes de E tels que $A \cap B = \emptyset$.
1) Si A est ouvert, il existe un hyperplan séparant A et B.
2) Si A et B ouverts ———— strictement A, B.
3) Si A compact B fermé ————
4) Si A, B fermés, ———— pas strictement.

Fig 1 : Signes des aires algébriques des triangles MBC, MCA et MAB