171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications

Réfs : [Gou1] Gourdon, algèbre [Gou1] Gourdon, analyse.
[Gri] Grifone, algèbre linéaire. [Aud] Audin, géométrie

Dév : (49 50) John Loewner [FGN3].
(65) lemme de Morse [Rou]

Cadre : E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel

I. Formes quadratiques réelles.

1) Définitions et généralités.

[Gou1] 279, 319

Def 1 : On dit que $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique s'il existe $\varphi : E\times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique telle que $q(x) = \varphi(x,x)$.

Ex 2 : L'application $q : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par $q(P) = \int_0^1 PP'' d\lambda$ est une forme quadratique.

Prop 3 : Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur E telle que $\varphi(x,x) = q(x)$. On l'appelle forme polaire de q. Elle est donnée par

$$\forall (x,y)\in E,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right)$$

Ex 4 : Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est une forme bilinéaire symétrique qui donne $\|.\|^2$ comme forme quadratique.

2) Écriture matricielle d'une forme quadratique.

[Gou1] 278 229

Supposons que $\dim E = n < \infty$, et fixons $(e_1, \dots, e_n) = \mathcal{B}$ une base de E. Alors pour $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i \in E$, si φ est bilinéaire symétrique, on a $\varphi(x,y) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)$

On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n}$, on a $\varphi(x,y) = {}^tXMY$.

Def 5 : On appelle M la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$. Il s'agit d'une matrice symétrique.

Prop 6 : L'application qui à φ associe sa matrice est un isomorphisme entre les formes bilinéaires sur E et les matrices symétriques sur $\mathbb{R}$ (notées $S_n(\mathbb{R})$).

Ex 7 : Si $q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 4xz$, alors la matrice de q dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[Gri] 296

Def 8 : On appelle rang de q le rang de sa matrice dans une base quelconque (ça ne dépend pas de la base). On dit que q est non dégénérée si son rang est maximal.

Ex 9 : Dans l'exemple 7, le rang est égal à 3 et q est non dégénérée.

[Gri] 295 302

Prop 10 : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P \in GL_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, si $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$, alors on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = {}^tPMP.$$

En particulier, le rang est bien défini. On peut définir d'autres quantités relatives aux formes quadratiques par leurs matrices.

Def 11 : Soit $q : E \to \mathbb{R}$ et φ sa forme polaire. On appelle noyau de q le noyau de l'application $y \mapsto \varphi(\cdot, y) \in E^*$, noté $N(q)$.

Prop 12 : Le noyau de q est également celui de l'application linéaire que représente $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$. On a $n = \mathrm{rg}(q) + \dim N(q)$.

Prop 13 : Si $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$, alors $\det M = 0$ ssi q est non dégénérée, mais $\det M$ dépend de la base choisie, seul son signe est bien défini (dans le cas $K = \mathbb{R}$). On l'appelle discriminant de q.

3) Formes quadratiques (définies) positives.

[Gri] 302

Def 14 : On dit que q est définie si $q(x) = 0 \iff x = 0$, et positive si q à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et définie positive si les deux.

Rq 15 : Ces propriétés se transportent aux matrices donnant $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ les matrices symétriques (définies) positives.

[Gou1] 234 235

Rq 16 : Une forme quadratique définie est non dégénérée, mais la réciproque est fausse. ($q(x,y) = x^2 - y^2$)

Prop 17 : Si q est positive, et φ sa forme polaire, alors $\varphi(x,y)^2 \le q(x)q(y)$ (inégalité de Schwarz). De plus si q est définie, on a égalité ssi x et y sont liés.

Cor 18 : Si q est positive, on a $\sqrt{q(x+y)} \le \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$. (Minkowski)

Rq 19 : Ainsi, si q est une forme quadratique définie positive, alors $x \mapsto \sqrt{q(x)}$ définit une norme sur E, dite norme euclidienne, et sa forme polaire est un produit scalaire qui munit E d'une structure d'espace Hilbertien.

II. Orthogonalité, isotropie.

1) Orthogonalité, bases orthogonales.

On fixe q une forme quadratique, et φ sa forme polaire.

[Gou] 226 **Def20:** On dit que $x, y\in E$ sont orthogonaux si $\varphi(x,y)=0$. Pour $A\in E$, on appelle orthogonal de A pour φ (ou q) l'ensemble $A^\perp=\{x\in E \mid \forall a\in A, \varphi(x,a)=0\}$.
On dit enfin que $A\subseteq E$, $B\subseteq E$ sont orthogonaux si $\forall a\in A, b\in B$, $\varphi(a,b)=0$. On note alors $A\perp B$.

Rq21: Si $A\subseteq E$, $A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.

Prop22: Si $A\subseteq E$, et $B\subseteq E^*$ est défini par $\{\varphi(a,\cdot)\mid a\in A\}$, alors $B^\circ=A^\perp$ (orthogonal pour la dualité et pour φ).

[Gri] 311 **Prop23:** Pour $A\subseteq E$, on a les propriétés suivantes
$A\subseteq A^{\perp\perp}$, $E^\perp=N(q)$, $N(q)\subseteq A^\perp$, si $B\subseteq A\subseteq E$, $A^\perp\subseteq B^\perp$.

Prop24: Si E est de dimension finie et $F\leq E$ est un sous espace, alors
$\dim E=\dim F+\dim F^\perp+\dim(F\cap N)$ et $F^{\perp\perp}=F+N$.
En particulier, si q est non dégénérée, on a $\dim E=\dim F+\dim F^\perp$ et $F^{\perp\perp}=F$.

[Gri] 304 305 **Def25:** Une base $B=(e_1,\dots,e_n)$ de E (dim finie) est dite orthogonale pour q si ses éléments sont deux à deux orthogonaux. Et orthonormale si orthogonale avec $q(e_i)=1\ \forall i$.

Rq26: Une base B est orthogonale (orthonormée) ssi la matrice de q dans cette base est diagonale (égale à I_n).
L'existence d'une base orthonormale pour q équivaut à dire que q est définie positive (sur $\mathbb{R}$).

Théo27: Soit (E,q) un espace vectoriel de dimension finie $n\geq 1$. Il existe sur E des bases orthogonales pour q. En d'autres termes des bases (e_i) telles que $q(\sum x_ie_i)=a_1x_1^2+\dots+a_rx_r^2$ où $r=rg(q)$.

2) Groupe orthogonal.
On suppose $\dim E<\infty$ et q non dégénérée.

[Gri] 315 **Def28:** Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre
- $q(f(x))=q(x)\ \forall x\in E$
- $\varphi(f(x),f(y))=\varphi(x,y)\ \forall x,y\in E$
- $f^*f=Id$
- $ff^*=Id$

On dit alors que f est orthogonal pour q, on note $O(q)$ les endo orthogonaux.

Rq29: f^* désigne l'adjoint de f, unique et bien défini si q est non dégénérée.

Prop30: L'ensemble $O(q)$ est un groupe inclus dans $\mathcal{L}(E)$, dit groupe orthogonal pour la forme quadratique q.

Prop31: Soit B base de E, $S=Mat_B(q)$, $A=Mat_B(f)$ ($f\in\mathcal{L}(E)$). On a
$$f\in O(q)\iff {}^tASA=S.$$

Rq32: Si q est déf pos, alors dans une base orthonormée, on obtient la relation ${}^tAA=I_n$ qui donne un iso $O(q)$ et $O_n(\mathbb{R})$.

Ex33. Si $q\binom{x}{y}=2xy$ sur $\mathbb{R}^2$, alors $\binom{1}{1}\binom{1}{-1}$ est une base orthog, et $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in O(q)$ ssi $a^2-c^2=1$, $d^2-b^2=2$, $ab-cd=0$.

3) Isotropie

Def34: On appelle cône isotrope de q l'ensemble $I(q)=\{x\in E\mid q(x)=0\}$. [Gri] 302 303
Ce n'est pas un sous espace vectoriel de E, mais bien un cône (stable par multiplication scalaire).

Ex35: Si $E=\mathbb{R}^2$ et $q(x,y)=x^2-y^2$, alors $I(q)=\{(x,y)\mid x=\pm y\}$ (Fig 1)
Si $E=\mathbb{R}^3$, $q(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$, alors $I(q)=\{(x,y,z)\mid z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\}$.

Prop36: On a $N(q)\subseteq I(q)$ mais la réciproque est fausse!
On a pu trouver une forme non définie mais non dégénérée ex 16.

Def37: On dit que $F\leq E$ est isotrope si $F\cap F^\perp\neq\{0\}$, il revient au même de dire que $q_{|F}$ est dégénérée. On dit que F est totalement isotrope si $F\subseteq F^\perp$, ou $q_{|F}=0$. [Gri] 321 [Per] 122 123

Def38: On appelle indice de q la dimension maximale d'un sous espace totalement isotrope (SETIM), on le note $\nu(q)$ si q est non dégénérée.

Rq39: On a $\nu(q)\leq\frac{n}{2}$ car $\dim F^\perp=n-\dim F$ si q est non dégénérée.

Ex40: Sur $\mathbb{R}^2$, $q\binom{x}{y}=x^2-y^2$, $F=\{x=y\}$ est totalement isotrope et non inclus dans $N(q)$.

III. Réduction des formes quadratiques.

1) Théorème d'inertie de Sylvester

On a déjà vu qu'il existe pour toute forme quadratique en dimension finie, des bases orthogonales, mais comment en construire en pratique.

Théo41 (Réduction de Gauss) pour toute forme quadratique q, il existe $l_1,\dots,l_r\in E^*$ linéairement indépendantes telles que $q=\sum^r a_il_i^2$, $a_i\in\mathbb{R}$, où $r=rg(q)$. [Gri] 306 310
On peut alors considérer une base antéduale d'une base complétée $l_1\dots l_n$ qui sera orthogonale pour q.
On utilise l'identité: $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ et $xy=\frac{1}{4}((x+y)^2-(x-y)^2)$ pour l'obtenir.

Ex42 $q(x,y,z)=x^2+4xy+2yz=(x+2y)^2-4y^2+2yz=(x+2y)^2-4(y-\frac{1}{4}z)^2+\frac{1}{4}z^2$.

Rq43: La réduction de Gauss n'est pas unique: on choisit la variable par laquelle on factorise dans l'algorithme.

Théo44 (Sylvester). Si q est une forme quadratique sur E de dimension n. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est donnée par $\begin{pmatrix}I_p&0&0\\0&-I_{p'}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Les entiers p et p' ne dépendent que de q et sont appelés signature de q. On a de plus $p+p'=rg(q)$.
Ainsi, q est non dégénérée si et seulement si $p+p'=n$.

Rq45 La signature est donnée par les signes des coefficients de la réduction de Gauss, ainsi dans l'exemple (42), $Sgn=(2,-1)$.

[Gri] 310.

Cor46 : Soit q forme quad sur E, on a les équivalences

q déf pos $\iff$ $\mathrm{sgn}(q) = (n,0)$ $\iff$ $\exists$ bases orthonormées pour q

q déf neg $\iff$ $\mathrm{sgn}(q) = (0,n)$ où $n = \dim E$.

q non dégén $\iff$ $\mathrm{sgn}(q) = (p, n-p)$ $p \in [0,n]$.

Appl47 : Il y a $n+1$ classes d'équiv de formes quad non dégén sur E.

2) Réduction sur un espace euclidien.

Théo48 (Spectral) Toute matrice symétrique réelle se diagonalise avec une matrice de passage orthogonale. I.e. si q est une forme quadratique sur un espace euclidien, alors $\exists$ base orthog pour q et orthonormée.

Matriciellement, $\forall A,B \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ | ${}^tPAP = I_n$, ${}^tPBP = D$ et diago.

[FGN3] Appl49 : Soient $A,B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\alpha,\beta \geq 0$ | $\alpha+\beta = 1$ Alors $\det(\alpha A+\beta B) \geq \det A^{\alpha} \det B^{\beta}$.

Appl50 (Ellipsoïde de John Loewner) Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Alors il existe une unique forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ telle que $q(K) \leq 1$, et $\{q(x) \leq 1\}$ soit de volume minimal. DVP

III Applications à la géométrie.

1) Coniques du plan euclidien

On se place dans l'espace affine (E,V) (⚠ E est maintenant un espace affine). $\dim V = 2$.

[Aud] 171 173.

Def51 : Les coniques de E sont définies comme des fonctions $f(M) = q(\vec{OM}) + L(\vec{OM}) + c$ où O est un point arbitraire de E, $q : V \to E$ est quadratique, L est linéaire et c une constante.

Def52 : La forme homogénéisée de q est la forme Q définie sur $V \times \mathbb{R}$ par $Q(u,z) = q(u) + L(u)z + cz^2$. On dit que f est propre si Q est non dégénérée.

Rq53 : Changer de point O revient à remplacer Q par $Q' : u,z \mapsto Q(u + z\vec{OO'}, z)$, donc la propriété est bien définie.

Prop54 : Soit D une droite de E passant par A et dirigée par u. On peut écrire l'équation de toute conique sous la forme $q(\vec{AM}) + L_A(\vec{AM}) + c_A = 0$.

Ainsi, un point $M = A + \lambda u \in D$ est dans la conique ssi $\lambda^2 q(u) + \lambda L_A(u) + c_A = 0$. L'intersection de D et C est donnée par

- D si $q(u) = L_A(u) = c_A = 0$
- Deux points si $L_A(u)^2 - 4q(u)c_A > 0$
- un point double si $L_A(u)^2 - 4q(u)c_A = 0$.
- 0 points sinon.

Si c'est 1 point, la droite est dite tangente à la conique.

Rq55 : C'est la bonne notion de tangente au sens de la géométrie différentielle.

Def56 : Si $\Omega \in E$ est tel que $L_\Omega \equiv 0$, on dit que Ω est un centre pour la conique C. On dit que C est à centre si elle admet un unique centre. [Aud] 174 176

Théo57 : Pour qu'une conique soit à centre, il faut et il suffit que q soit non dégénérée.

Classification euclidienne des coniques.

On suppose E euclidien.

Théo58 Une conique propre à centre (d'image non vide) s'écrit, dans un repère orthonormé d'origine le centre,

- Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Ellipse). - Soit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Hyperbole).

Pour deux réels positifs a et b ($0 < b \leq a$ pour une ellipse).

Prop59 : Une conique propre (d'image non vide) qui n'a pas de centre de symétrie s'écrit dans un repère orthonormé $y^2 = 2px$ $p \geq 0$ $\to$ parabole.

[FGN3] Prop60 : L'ensemble des points où passent deux tangentes orthogonales à une ellipse est un cercle. (Fig 2).

2) Géométrie différentielle.

[Gou2] 315 316

Def61 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable (U ouvert de $\mathbb{R}^n$). Si $a \in U$ est un extremum relatif alors $df_a = 0$.

Rq62 : La récip est fausse évidemment ($x \mapsto x^3$).

Théo63 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2, d^2f_a est une forme quadratique. Si $f(a) = df_a = 0$ par la formule de Taylor Young, on a $f(a+h) = d^2f_a(h,h) + o(\|h\|^2)$.

(i) Si f admet un minimum (maximum) local en a, d^2f_a est positive (négative).

(ii) Si d^2f_a est définie positive (négative), alors a est un minimum local isolé (max).

Rq64 : $x \mapsto x^3$ ne rentre dans aucun des cas.

[Rou] 344

Théo65 (Lemme de Morse). Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, U contenant 0, si $f(0) = df_0 = 0$, et d^2f_0 est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors il existe $\varphi : U \to \varphi(U)$ envoyant u à x, $\varphi(0) = 0$, un C^1-difféo avec

$$f(h) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

DVP

Fig1:
Ex35:

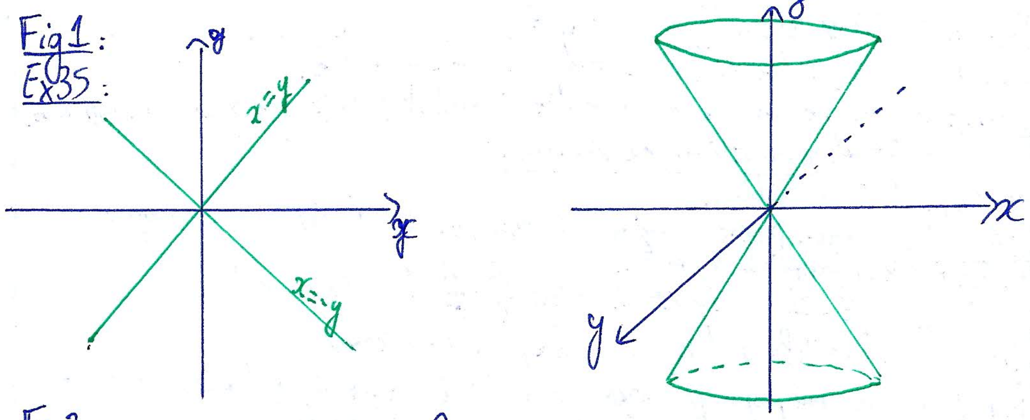

Fig2
Prop60