170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie.

Refs : [Gri] Grifone, Algèbre linéaire. [Per] Perrin, Cours d'algèbre
[Gou2] Gourdon, Analyse

Dev :
(45 46) John Loewner [FGN3]
(55 56) Morse [Rom]

Cadre : On se place dans k un corps de caractéristique différente de 2. Et E un k-espace vectoriel de dimension finie n.

I. Généralités.

1) Formes bilinéaires symétriques. Formes quadratiques

Def 1 : On appelle forme bilinéaire sur E toute application $f : E\times E \to k$ telle que
$\forall x\in E$, $f(x,\cdot)$ et $f(\cdot,x)$ sont linéaires.
On dit que forme bilinéaire est symétrique si $f(x,y)=f(y,x)$ quelque soient $x,y\in E$.

Def 2 : Si $f : E\times E\to k$ est une forme bilinéaire symétrique, l'application $q : E\to k$ envoyant x sur $q(x)=f(x,x)$ est appelée forme quadratique (associée à f).

[Gri] 223, 300

Prop 3 Pour car $k\neq 2$, si q est une forme quadratique, elle est associée à une unique forme bilinéaire symétrique, dite polaire, donnée par
$$f(x,y)=\frac{1}{2}\big(q(x+y)-q(x)-q(y)\big)$$

Ex 4 : En caractéristique 2, on a par exemple $f : \mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_2\to\mathbb{F}_2$ envoyant (x,y) sur $x+y$. La forme quadratique associée est nulle.

Ex 5 : Si $q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ envoie M sur $\mathrm{tr}({}^tMM)$, alors la forme polaire de q est $f(A,B)=\mathrm{tr}({}^tAB)$.

2) Expression matricielle

[Gri] 223

Si $B=(e_1\dots e_n)$ est une base de E, pour $x,y\in E$, on écrit $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ et $y=\sum_{j=1}^n y_je_j$, on a alors, pour $f : E\times E\to k$ bilinéaire symétrique
$$f(x,y)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jf(e_i,e_j).$$
En notant $X=(x_1\dots x_n)$, $Y=(y_1,\dots,y_n)$ et $A=\big(f(e_i,e_j)\big)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$, on a
$$f(x,y)={}^tXAY={}^tYAX.$$
On pose alors $A=\mathrm{Mat}_B(f)$ la matrice de f dans la base A. Il s'agit d'une matrice symétrique.

[Gri] 299

Prop 6 : Dans une base fixée, les formes quadratiques sur E sont en bijection avec les polynômes homogènes de degré 2 sur E.

Prop 7 (Réduction de Gauss) : Toute forme quadratique sur E s'écrit comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires sur E. 224, 225

Ex 8 : $q(x)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+5x_3^2$
$=(x_1+x_2)^2+x_2^2+5x_3^2$ En particulier, cette forme quadratique est à valeurs positives et ne s'annule qu'en 0.
La forme polaire de q a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}=A$.

Théo 9 : (Changement de bases) Soient B, B' deux bases de E, P la matrice de passage de B vers B'. Alors pour f bilinéaire symétrique sur E, on a $\mathrm{Mat}_{B}(f)={}^tP\,\mathrm{Mat}_{B'}(f)\,P$. 296

Rq 10 : On fera l'analogie entre la matrice de f et celle de sa forme quadratique associée.

3) Rang et noyau d'une forme quadratique.

On fixe à présent $f : E\times E\to k$ bilinéaire symétrique et $q : E\to k$ sa forme quadratique associée.
Par définition, f induit une application $\tilde{f} : E\to E^*$, envoyant x sur $f(\cdot,x)$, et cette application est linéaire.

Def 11 : On appelle rang de f le rang de l'application $\tilde{f}$. On appelle noyau de f, noté $N(f)$, le noyau de $\tilde{f}$. On dit enfin que f est non dégénérée si $N(f)=0$, autrement dit si $\tilde{f}$ est injective :
$$\forall y\in E,\ y\neq 0\Rightarrow \exists x\in E \mid f(x,y)\neq 0.$$

Rq 12 : Ces définitions s'exportent directement aux formes quadratiques.

Prop 13 : Si B est une base de E, alors le noyau de $\mathrm{Mat}_B(f)$ est $N(f)$, de même pour le rang. Le déterminant de $\mathrm{Mat}_B(f)$ est appelé un discriminant de f.

Rq 14 : Le discriminant n'est défini qu'à multiplication par un carré non nul de k près. On conserve cependant le critère $N(f)=0 \iff \det \mathrm{Mat}_B(f)\neq 0$ pour une base B.

Def 15 : Si $k=\mathbb{R}$, on dit que q est définie si $q(x)=0\Rightarrow x=0$ et positive si $q(x)\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Prop16. Une forme quadratique définie est non dégénérée.

[Nou] 81 Ex17. La réciproque est fausse : $q(x)=x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2$ sur $\mathbb{R}^4$ n'est pas définie, mais non dégénérée.

II Orthogonalité et isotropie.

1) Orthogonalité.

[Gri] 311 312 Def18 : Soit x, y dans E, on dit que x et y sont orthogonaux (pour f) si $f(x,y)=0$. On note alors $x \perp y$. De même, pour $A, B \subseteq E$, on dit que A et B sont orthogonales si $\forall x \in A, y \in B, x \perp y$.

Pour $A \subseteq E$, définissons $A^\perp$ l'orthogonal de A par $A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, x \perp a\}$.

Prop19 : On a $A \perp B \iff A \subseteq B^\perp$. L'orthogonal de A est un sous espace vectoriel de E même si A ne l'est pas. On a aussi $N(q) \subseteq A^\perp$ pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$.

Ex20 : On a $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = N(q)$.

Prop21 : Soit $F \leq E$ un sous espace vectoriel de E, on a
$\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap N(q))$. et $F^{\perp\perp} = F + N$.
En particulier, si q est non dégénérée, $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Ex22 : Sur $\mathbb{R}^2$, $q(x,y)=x^2-y^2$, pour $F=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, on a $F=F^\perp$, q est non dégénérée mais on n'a pas $E=F+F^\perp$.

2) Isotropie.

[Gri] 302 303 312 Def23. Un vecteur $x \in E$ est dit isotrope (pour q) si $q(x)=0$. On appelle cône isotrope (pour q) l'ensemble $I(q)$ des vecteurs isotropes pour q.

Rq24. $I(q)$ n'est pas un sous espace vectoriel de E, mais bien un cône, au sens où $x \in I(q) \Rightarrow \forall \lambda \in k, \lambda x \in I(q)$.

Ex25 : Pour $q(x,y)=x^2-y^2$ sur $\mathbb{R}^2$, $I(q)=\{(x,\pm x) \in \mathbb{R}^2\}$ Voir annexe.
Pour $q(x)=x^2+y^2-z^2$ sur $\mathbb{R}^3$, $I(q)=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\}$

Prop26 : On a $N(q) \subset I(q)$, mais l'inclusion réciproque est en général fausse (voir exemple précédent).

Def27. On dit qu'un sous espace F de E est isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$, il existe un vecteur de F orthogonal à tous les autres. Autrement dit, $f_{|F \times F}$ est dégénérée.

Prop28 : Il existe des sous espaces isotropes si et seulement si $I(q) \neq 0$.

Prop29 : Si $F \leq E$, alors $E = F \oplus F^\perp$ si et seulement si F est non isotrope.

Ex30 : Si $q(x)=x^2+2y^2+2xy-2yz-2yt+4zt$. Tout hyperplan d'équation $ax+y+bz+t=0$ est isotrope.

Ex31 : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de det. $F=\mathrm{Ker}\,\mathrm{tr}$, on a $F^\perp = (\lambda I_2 \mid \lambda \in \mathbb{R})$, F est non isotrope et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus F^\perp$.

3) Groupe orthogonal.

[Gri] 316 317 Prop def 32. Si q est non dégénérée, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre
(i) $q(u(x)) = q(x)$ $\forall x \in E$ (ii) $f(u(x),u(y)) = f(x,y)$ $\forall x,y \in E$.
On dit alors que u est orthogonal (relativement à q).

Prop def 33 : Si q est non dégénérée, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x,y \in E$, $f(u(x),y) = f(x,u(y))$. On l'appelle adjoint de u pour f.

Prop34 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement si $u^* = u^{-1}$. L'ensemble $O(q)$ des endomorphismes orthogonaux est un groupe, dit groupe orthogonal associé à q. On en note $SO(q)$ le sous groupe donné par le noyau du déterminant, le groupe spécial orthogonal.

Prop35 : Soit B une base de E, $A=\mathrm{Mat}_B(q)$ et $M=\mathrm{Mat}_B(u)$ pour un $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \in O(q) \iff {}^tMAM = A$.

Ex36 : En particulier s'il existe une base orthonormale pour q, $O(q) \simeq O_n(\mathbb{R})$.

[Perr] 125 190 Prop37. Pour $u \in GL(E)$, si $u^2 = Id$, alors il existe E^+ et E^- en somme directe avec $u_{|E^+} = Id_{E^+}$ et $u_{|E^-} = -Id_{E^-}$. Si $\dim E^- = 1$ (resp 2), on dit que u est une réflexion (resp un renversement).

Théo38 (Cartan Dieudonné) Tout élément de $O(q)$ est produit d'au plus n réflexions. Si $n \geq 3$, tout élément de $O^+(q)$ est produit d'au plus n renversements.

Ex39 : Si $q(x,y) = 2xy$, alors $O(q) = \left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix}0 & 1/\lambda\\ \lambda & 0\end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\right\}$.

4) Base orthogonale et réduction simultanée.

[Gri] 304 305 Def40. Une base $B=(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de E est dite orthogonale si les vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux, elle est dite orthonormale si $f(e_i,e_j) = \delta_{ij}$ pour $i,j \in [\![1,n]\!]$.

Rq41 : Dire qu'une base est orthogonale revient à dire que la matrice de q dans cette base est diagonale, et égale à I_n si la base est orthonormée.

[Gri] Théo 42 : Si $E \neq 0$. Il existe sur E des bases orthogonales pour q. Le nombre de coefficients non nuls de la matrice de q dans une telle base est égal au rang de q.

Rq 43 : On peut construire de telles bases par un algorithme de Gram Schmidt, ou utiliser la réduction de Gauss :
Pour l'exemple 8 : une base orthogonale est donnée par $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Théo 44 : Si $(E,\langle .,.\rangle)$ est un espace euclidien et q une forme quadratique sur E, il existe une base orthonormée pour $\langle .,.\rangle$ et orthogonale pour q.

[FGN3] 222 229
Appli 45 : Soient $A, B \in S_n^{++}$, $\alpha\beta \in \mathbb{R}$ tq $\alpha+\beta = 1$. Alors $\det(\alpha A+\beta B) \geq \det A^{\alpha} \det B^{\beta}$.

Appli 46 : (Ellipsoïde de John Loewner) Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact d'intérieur non vide. Il existe une unique forme quadratique q tel que l'ellipsoïde $\{q(x) \leq 1\}$ contienne K et soit de volume minimal. DVP

III. Classification des formes quadratiques.

[Perr] 127 129
Def 47 : Deux formes bilinéaires symétriques sont dites équivalentes s'il existe $u \in GL(E)$ tel que l'on ait $\forall x, y \in E$, $f(u(x), u(y)) = f'(x,y)$.

Rq 48 : Si A et A' sont les matrices de f et f' dans une même base, cela revient à dire qu'il existe $P \in GL_n(k)$ tel que $A' = {}^tPAP$.
On notera $f \sim f'$ pour f et f' sont équivalentes.

1) Si k est algébriquement clos.

Toutes les formes quadratiques non dégénérées sont équivalentes : Si $rg\, q = r$ il existe une base de E dans laquelle la matrice de q est de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cor 49 : Dans un corps algébriquement clos, une forme quadratique q admet une base orthonormée si et seulement si elle est non dégénérée.

2) Si $k = \mathbb{R}$.

Théo 50 Sylvester : Il y a n+1 classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur E. Dans une bonne base, q a pour matrice $\begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{p'} \end{pmatrix}$

On appelle alors (p, p') la signature de q. On a q non dégénérée si et seulement si $p + p' = n$. Et q définie positive si et seulement si elle est de signature $(n, 0)$.

3) Si $k = \mathbb{F}_q$ (avec q impair).

Théo 51 : Soit $\alpha \notin \mathbb{F}_q^{*2}$, il y a deux classes de formes quadratiques non dégénérées sur E de matrices respectives (I_n) et $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Une forme quadratique est de l'un ou l'autre de ces types selon si son discriminant est un carré dans $\mathbb{F}_q^*$. [Perr] 130

IV Application à la géométrie différentielle

Théo 52 : Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, avec pour un $a \in U$, $df_a = 0$. [Gou2] 316 317
Par la formule de Taylor Young, on a alors $f(x) = f(a) + \frac{Q_a(h)}{2} + o(\|h\|^2)$. Où $Q_a = d^2 f_a$ est une forme quadratique. Alors
- Si f admet un min (max) local en a, alors Q_a est positive (resp négative)
- Si Q_a est définie positive (resp définie négative) alors f admet un maximum (min) local isolé en a.

Rq 53 : Ces conditions ne couvrent pas tous les cas ex : x^3 sur $\mathbb{R}$.

Ex 54 : En dimension 2, on pose $r = (\partial_x)^2 f(a)$, $s = \partial_x \partial_y f(a)$, $t = (\partial_y)^2 f(a)$ de sorte que la Hessienne de f soit $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$
- Si $rt - s^2 > 0$ (resp < 0), f admet un minimum (resp maximum) local en a.
- Si $rt - s^2 < 0$ f n'a pas d'extremum en a
- Si $rt = s^2$ on ne peut pas conclure

Théo 55 : Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$, $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tMA_0M$. Il existe $V \subseteq S_n$ voisinage de A_0 et $\psi : V \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que $\forall A \in V$, $A = {}^t\psi(A) A_0 \psi(A)$. [Rou] 344
Toute forme quadratique "assez proche" d'une forme non dégénérée lui est équivalente.

Appli 56 (Lemme de Morse)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3, U ouvert contenant 0. Si $df_0 = 0$ et $d^2 f_0$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Il existe un C^1 difféo $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = u$ entre deux voisinages de l'origine tel que $\varphi(0) = 0$ et
$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$
sur ce voisinage.

Fig 1: