162 : Systèmes d'équations linéaires, opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Refs : [Gri] Grifone, Algèbre linéaire. [Gou] Gourdon, Algèbre. [Perr] Perrin, Cours d'algèbre. [Qua] Quarteroni. Méthodes numériques pour le calcul scientifique.

Devts :
13 Générateurs GL(E) SL(E) [Perr]
23 Convergence méthodes itératives [Cia]
30 Gradient à pas optimal. [Cia]

I. Généralités sur les systèmes linéaires. k corps

1) Définitions.

[Gri] p37

Def 1 : On appelle système d'équations linéaire un système de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1q}x_q = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases} \quad (1)$$

où les (a_{ij}) et les (b_i) sont des éléments de k fixés. On appelle solution d'un tel système tout vecteur $X=(x_1 \dots x_q) \in k^q$ dont les coordonnées vérifient chacune des équations de (1).
Le système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

Ex 2 : $\begin{cases} x+y=1 \\ x=0 \end{cases}$ est compatible $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=0 \end{cases}$ ne l'est pas.

[Gri] 142 143

Expression matricielle. Dans l'expression (1), on pose $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{pq}(k)$ et $b=(b_1,\dots,b_p) \in k^p$. Un vecteur $X=(x_1,\dots,x_p)$ est solution du système (1) si et seulement si on a $AX=b$ dans k^p. On peut alors définir le rang du système comme le rang de la matrice A.

Prop 3 : En notant $(A_1,\dots,A_n)$ les colonnes de A, le système $AX=b$ est compatible si et seulement si $b \in \mathrm{Vect}(A_1,\dots,A_n)$.

Ex 4 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est compatible ; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est incompatible.

2) Système de Cramer.

Def 5 : On dit que le système $Ax=b$ est de Cramer si la matrice A est inversible. Un tel système admet une unique solution donnée par $A^{-1}b$.

Théo 6 : Un système de Cramer $AX=b$, où $A=(a_{ij})=(A_1 \dots A_n)$ $A_i \in k^n$, alors x_i est donné par $\dfrac{\det(A_1,\dots,A_{i-1},b,A_{i+1},\dots,A_n)}{\det A}$

Rq 7 : Cette méthode requiert $(n+2)!$ opérations, c'est tout à fait impraticable (120 opérations pour un 3x3, c'est juste trop). On sera amené à chercher des algorithmes plus efficaces pour trouver (ou approcher) la solution.

3) Cas général, théorème de Rouché Fontené.

On considère $A \in \mathcal{M}_{pn}(k)$, $b \in k^p$, A de rang r, quitte à faire des permutations lignes colonnes de A, on suppose que la sous matrice $(a_{ij})_{i,j \in [\![1,r]\!]}$ est inversible. On note δ le déterminant de cette sous matrice.

[Gri] 145 147

Théo 8 : Pour $A \in \mathcal{M}_{pn}(k)$, $b \in k^p$, A de rang r, telle que le mineur δ soit non nul.
1) Le système est compatible si et seulement si tous les déterminants caractéristiques

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} & b_s \end{vmatrix} = 0 \quad s=(r+1,\dots,m)$$

2) Si cette condition est réalisée, le système est équivalent au système des équations principales.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

il admet alors une infinité de solutions dépendant de $n-r$ paramètres. Les solutions se calculent en résolvant le système de Cramer obtenu en donnant aux variables libres $x_{r+1}\dots x_n$ des valeurs arbitraires.

Ex 9 : $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 8 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors $x=\dfrac{2\lambda+4}{11}$ $y=\dfrac{5\lambda-1}{11}$ $z=\lambda$.

[Gou] 128

Cor 10 : Equations d'un sous espace vectoriel) Si E est de dimension finie n.
- Soient p formes linéaires $\varphi_1,\dots,\varphi_p$ de E^* telles que $rg(\varphi_1 \dots \varphi_p)=r$. Le sous espace $F=\{x \in E \mid \varphi_i(x)=0 \ \forall i\}$ est de dimension r.
- Réciproquement si F est de dimension q, il existe $n-q$ formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-q}$ telles que $F=\{x \in E \mid \forall i \in [\![1,n-q]\!]\ \varphi_i(x)=0\}$.

II Systèmes échelonnés et résolution directe.

1) Réduction, transvection, dilatation.

[Perr] 96 97

Propdef 11 : Soit $H \subseteq E$ un hyperplan de E et $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H}=Id_H$. LASSE
- $\det u = \lambda \neq 1$ - $\exists \lambda \in \sigma(u)\setminus\{1\}$, u est diagonalisable et $D=E_\lambda$.
- On a $\mathrm{Im}(u-id) \not\subset H$ - Dans une base convenable, on a $\mathrm{Mat}\,u$ = Fig 1

On dit alors que u est une dilatation, de droite D, d'hyperplan H et de rapport λ. Si $\lambda=-1$ et car $k \neq 2$, on dit que u est une réflexion.

Propdef 12 : Soit $H \subseteq E$ un hyperplan, d'équation $f \in E^*\setminus\{0\}$. Soit $u \in GL(E)$, $u \neq Id$ tel que $u_{|H}=Id_H$. On a équivalence entre.

[Per] 99. 100

- on a $\det u = 1$ - u n'est pas diagonalisable - $D = \mathrm{Im}(u - Id) \subseteq H$
- le morphisme $\bar{u} : E/H \to E/H$ est l'identité - $\exists a \in H\setminus\{0\} \mid \forall x \in E, u(x) = x + f(x)a$.
- Dans une base convenable, la matrice de u a la forme (F:g2).

On dit alors que u est une transvection d'hyperplan H et de droite D, on pourra la noter $\tau(f,a)$.

Théo 13 : Les transvections engendrent $SL(E)$, les transvections et dilatations engendrent $GL(E)$. DVP

[H2G2] 130 131 Def 14 : Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(k)$, On appelle pivot d'une ligne non nulle le premier coefficient non nul sur la ligne. On dit que A est échelonnée en ligne si
- Si la ligne i est nulle, c'est aussi le cas de toutes les suivantes
- le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que le pivot des lignes précédentes.

On dira de plus que A est réduite si tous ses pivots sont égaux à 1.

On considère l'action de $GL_p(k)$ sur $\mathcal{M}_{p,n}(k)$ par multiplication à gauche, on cherche à obtenir des représentants agréables des orbites.

Théo 15 : Soient p, n deux entiers
- deux matrices A, A' de $\mathcal{M}_{p,n}(k)$ sont dans la même orbite sous l'action de $GL_p(k)$ si et seulement si elles ont même noyau
- Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée en ligne réduite.

Ce théorème est en fait obtenu par la méthode de Gauss : Pour étudier un système linéaire $Ax = b$, on peut préférer considérer le système $PAx = Pb$ où $P \in GL_n(k)$.
- Si P est de la forme 1 (dilatation), $PAx = Pb$ est le système initial où l'on a multiplié une ligne par $\lambda \neq 1$.
- Si P est une transvection, $PAX = Pb$ est le système initial où l'on a ajouté une ligne à une autre.

Par composition, on obtient immédiatement les opérations élémentaires du pivot de Gauss, et le théorème précédent nous montre que l'on peut se ramener à un système triangulaire. Que l'on peut résoudre par méthode de remontée. Le théorème 13 permet de conclure que tous les éléments de $GL(E)$ sont ainsi atteints.

[Gri] 80 Coût : La méthode de Gauss (et la remontée qui s'ensuit) demande $\frac{n^3}{3}$ additions $\frac{n^3}{3}$ multiplications $\frac{n^2}{2}$ divisions

Donc le coût total est en $O(n^3)$, nette amélioration depuis les factorielles.

Exemple 16 : $\begin{cases} 2x+y-4z=1 \\ 2x+2y-z=4 \\ 2x+3y+3z=5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y-4z=1 \\ y+3z=3 \\ 2y+7z=4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y-4z=1 \\ y+3z=3 \\ 13z=10 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{1}{2}(1+4z-y) \\ y=3-3z \\ z=\frac{10}{13} \end{cases}$

Appli 17 :
- Calcul du rang d'une matrice
- Calcul de l'inverse d'une matrice
- Recherche d'un système d'équations d'un sous espace vectoriel défini par une famille génératrice
- Recherche d'une base d'un sous espace vectoriel défini par un système d'équations.

2) Décomposition LU, Cholesky.

[Gri] 85 86 On peut, plus généralement chercher à décomposer dans le cas d'une matrice inversible A sous la forme LU, où L est triangulaire inférieure, et U triangulaire supérieure, on pourra alors résoudre $Ax=b$ en faisant $Ly=b$ puis $Ux=y$ par des algorithmes de descente et de remontée.

Théo 18 : Soit $A=(a_{ij})$ une matrice carrée de taille n telle que tous les mineurs principaux $\Delta_k = \det(a_{ij})_{i,j \in [1,k]}$ soient non nuls. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L=(l_{ij})$ avec $(l_{ii})=1$ $\forall i \in [1,n]$, et une matrice U triangulaire supérieure, telles que $A=LU$. De plus, une telle décomposition est unique.

[Qua] 79 Algorithme de calcul d'une factorisation LU : méthode de Doolittle. On se donne $A=(a_{ij})_{i,j \in [1,n]}$, Pour $k \in [1,\dots,n]$, on pose

$- u_{kj} = a_{kj} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{kr} u_{rj} \quad \forall j \in [k,n]$ $\quad - l_{ik} = \frac{1}{u_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} u_{rk}\right) \; i \in [k+1,n]$

Rq 19 : Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ n'a pas tous ses mineurs principaux non nuls, on peut se ramener au cas précédent en permutant certaines lignes et colonnes de A.

On suppose désormais $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, jusqu'à la fin de la planche.

Si A est hermitienne définie positive, la factorisation LU peut être obtenue plus rapidement avec la méthode de Cholesky.

Théo 20 : Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive, il existe une matrice réelle triangulaire inférieure S telle que $A = {}^tSS$. On peut de plus imposer que les coefficients diagonaux de la matrice S soient tous >0. La factorisation correspondante est alors unique.

[Cia] 88 89

Algorithme de calcul. on pose $b_{11} = \sqrt{a_{11}}$, et pour $i = 2, n$

$j = i \Rightarrow \quad b_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (b_{ik})^2\right)^{1/2}$ $\quad j > i \quad b_{j,i} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} b_{jk}}{b_{ii}}$

Rq 21 : Les calculs peuvent s'interpréter comme des produits scalaires.

Coût : La méthode de Cholesky comporte $\frac{n^3}{6}$ addition, $\frac{n^3}{6}$ multiplication $\frac{n^2}{2}$ division d'où un coût en $O(n^3)$.

Ex 22 : Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, on trouve. $S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

III Méthodes itératives de résolution

1) Méthodes itératives usuelles.

[Cia] 97,106

Une autre méthode pour résoudre un système $Ax = b$ est de construire une suite qui converge vers la solution. On compte étudier des suites de la forme $u_{k+1} = Bu_k + C$, où la solution de $Ax = b$ est point fixe de $x \mapsto Bx + C$: Si $(I - B)$ est inversible et si $u = Bu + C$ équivaut à $Au = b$.
On dit que B est la matrice de la méthode.

Théo 23 : On a équivalence entre

(1) La méthode itérative $u_{k+1} = Bu_k + C$ est convergente.

(2) $\rho(B) < 1$

(3) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|.\|$

DVP

En pratique, on cherchera à décomposer $A = M - N$ où M est inversible et facile à inverser (plus facile que A). On a alors $Au = b \Leftrightarrow Mu = Nu + b \Leftrightarrow u = M^{-1}Nu + M^{-1}b$. On remarque d'emblée que $I - B = M^{-1}A$ est inversible.

Notation : Pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on pose D la partie diagonale de A, $-E$ sa partie triangulaire inférieure stricte et $-F$ sa partie triangulaire supérieure stricte, de sorte que $A = D + E - F$.

Méthode de Jacobi : On prend $M = D$, la matrice d'itération est $J = D^{-1}(E + F)$

Méthode de Gauss Seidel : $M = D - E$, matrice d'itération $\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F$

Méthode de relaxation : On introduit un paramètre ω et on pose $M = \frac{D}{\omega} - E$.
d'où la matrice d'itération $\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F\right)$.

Théo 24 : Si A est hermitienne définie positive, la méthode de relaxation converge pour $\omega \in]0, 2[$. (en particulier, la méthode de Gauss Seidel converge). [Cia] 97/106

Théo 25 : On a l'inégalité $\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|$, pour $\omega \neq 0$. Ainsi la méthode de relaxation ne peut converger que pour $\omega \in]0, 2[$

Théo 26 : Si A est tridiagonale par blocs. On a $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(J)^2$: les méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel convergent simultanément, et si elles convergent, la méthode de Gauss Seidel converge plus rapidement.
Si A est de plus hermitienne définie positive. Alors le paramètre de relaxation optimal est $\omega = 2/(1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2})$ si $\rho(J) > 0$ et si $\rho(J) = 0$.

2) Méthodes d'optimisation.

[Cia] 189 192

On considère $J : X \mapsto J(X)$ une fonctionnelle, α-convexe (moralement une fonctionnelle quadratique $(X \mapsto \frac{1}{2}(AX, X) - bX)$) où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$)
On construit des méthodes de la forme $X^{n+1} = X^n + \rho^n d^n$ (ρ^n est le pas, d^n la direction).

Méthode de relaxation : On prend successivement les vecteurs de base canonique comme direction : Pour $X^n \in \mathbb{R}^n$ on construit X^{n+1} comme suit : $\forall i \in [\![1, n]\!]$ X_i^{n+1} est défini comme minimisant la fonctionnelle. $t \mapsto J(X_1^{n+1} \dots X_{i-1}^{n+1}, t, X_{i+1}^n, \dots, X_n^n)$

Théo 27 : Si J est une fonctionnelle elliptique, la méthode de relaxation converge.

Rq 28 : C'est en fait l'équivalent de Gauss Seidel ds le cas d'une fct quad.

On peut également prendre $-\nabla J(X^n)$ comme direction, ça donne les méthodes de gradient dont la liberté réside dans le choix du pas.
- Gradient à pas fixe : $\rho^n = \rho$ est constant.
- Gradient à pas optimal : ρ^n est choisi pour minimiser $\rho \mapsto J(X^n - \rho \nabla J(X^n))$

Théo 29 : Si J est α-convexe, ∇J est L lipschitzien, alors pour $\rho \in]0, \frac{2\alpha}{L^2}[$ la méthode du gradient à pas fixe converge.

Théo 30 : Si J est α-convexe, ∇J lipschitzien sur les bornés, alors le gradient optimal converge.

DVP

Rq 31 : L'encadrement du théorème 29 est large, même sans optimal pour une quadratique, l'opti est $2/_{\lambda_1 + \lambda_n}$ et le max est $2/_{\lambda_n}$.

Rq 32 : Le pas optimal est en général coûteux à calculer, mais pour une quadratique, il est explicite et donné par $\frac{\|r_k\|}{(Ar_k, r_k)}$ où $r_k = Ax_k - b$.

Fig 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in k^*, \lambda \neq 1$$

Fig 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$