161
Distances et isométries d'un espace affine euclidien.
Exemples

Refs : [Aud] Audin, Géométrie ; [Com] Combes, Algèbre et géométrie
[Per] Perrin, Cours d'algèbre ; [Mer] Mérin, géométrie
[H2G2] Caldero Germoni ; [FGN3]
Devt
25 $SO_3(\mathbb{R})$ simple [Per]
26 quaternions et SO_3

Cadre : On fixe (E,V) un espace affine euclidien de dimension $n\geq 1$, de produit scalaire $\langle\,;\,\rangle$

I. Généralités.

1) Définitions.

[Aud] 43 45.

Def 1 : Si V et W sont des espaces vectoriels euclidiens, on dit que $f: V\to W$ est une isométrie vectorielle si elle conserve la norme : $\|f(v)\|=\|v\|$.
On dit que $\varphi:(E,V)\to(F,W)$ est une isométrie affine si elle est une application affine qui conserve la distance : $\varphi(M)\varphi(N)=MN\ \forall M,N\in E$.
Rq 2 : Une application affine est une isométrie si et seulement si l'application linéaire sous-jacente $L(\varphi)$ est une isométrie vectorielle.
Prop 3 : L'ensemble $O(V)$ (resp $Is(E)$) des isométries vectorielles de V (resp affines de E) est un groupe pour la composition des applications.
Ex 4 : Les translations sont des isométries. Une homothétie est une isométrie si et seulement si son rapport est égal à 1 en valeur absolue (autrement dit 1 ou -1).

[Aud] 49.

Def 5 : On pose $Is^+(E)$ (resp $Is^-(E)$) l'ensemble des isométries affines de E dont la partie linéaire est dans $SO(V)$ (resp pas dans $SO(E)$). On remarque que $Is^+(E)$ est un sous groupe distingué de E.
Prop 6 : Si $M\in E$, l'ensemble $Is_M(E)$ des isométries fixant M est un sous groupe de $Is(E)$, isomorphe à $O(E)$.

[Per] 141

Prop 7 : La classe d'isomorphie de $Is(E)$ et $O(E)$ ne dépend que de la dimension de E ; pour tout repère cartésien de E, on a un isomorphisme $Isom\,E\simeq Isom(\mathbb{R}^n)$ et $O(V)\simeq O_n(\mathbb{R})$, le groupe des matrices orthogonales.

2) Exemples et propriétés

Prop 8 : Il y a une suite exacte courte scindée
$$V\hookrightarrow Isom\,E\twoheadrightarrow O(V).$$
Donc $Isom\,E\simeq V\rtimes O(V)$, en particulier, toute isométrie affine s'écrit de manière unique comme composée d'une translation et d'une isométrie ayant un point fixe.

[Com] 156 159.

Def 9 : Soit $F\subseteq V$, on appelle symétrie orthogonale par rapport à F l'application $s_{F}\in O(V)$ identité sur F et $=-Id$ sur $F^\perp$.
Soit $F\subseteq E$ un sous espace affine on appelle symétrie affine orthogonale σ_F l'application affine ayant F pour points fixes, et s_W comme application linéaire sous jacente, (W sev dir F).
Prop 10 : Les symétries sont exactement les involutions de $O(V)$.
Def 11 : Une symétrie par rapport à un hyperplan est une réflexion, par rapport à un espace de codimension 2, un renversement.
Prop/Def 12 : Soit $f\in Isom(E)$, si $f^2=Id$, on dit que f est une symétrie glissée, il existe t une translation telle que f t est une symétrie.
Théo 13 : Le groupe $Is(E)$ agit simplement transitivement sur les repères orthonormés de E.
Cor 14 : Deux triangles sont isométriques si et seulement si il existe une bijection entre les longueurs de leurs côtés.

II Étude du groupe orthogonal

1) Réduction et générateurs.

On a vu que $O(E)\simeq O_n(\mathbb{R})$, avec $SO(E)=SO_n(\mathbb{R})$, on peut ainsi déduire des choses sur tout groupe orthogonal à partir de la seule étude de $O_n\mathbb{R}$

[Per] 142

Prop 15 : Le centre de $O(E)$ est $Z=\{\pm Id\}$, en particulier pour $n\geq 2$, $O(E)$ n'est pas abélien. Le centre de $SO(V)$, pour $n\geq 3$, est $Z\cap SO(V)=\{Id\}$ si n est impair et $\{\pm Id\}$ si n est pair.
Prop 16 : Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est abélien (il est en fait isomorphe au groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

[Perr] 142 147

Théo 17 : Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales, plus précisément, tout élément de $O_n(\mathbb{R})$ est produit d'au plus n réflexions.

Prop 18 : Si $n \geq 3$, tout produit de deux réflexions orthogonales peut également s'écrire comme produit de deux renversements.

Théo 19 : Pour $n \geq 3$, le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les renversements, plus précisément, tout élément de $SO_n(\mathbb{R})$ est produit d'au plus n renversements.

Prop 20 : $SO_n(\mathbb{R})$ agit transitivement sur les sous-espaces de V de même dimension.

Prop 21 : Soit v_1, v_2 deux symétries orthogonales de même nature (autre des espaces de même dimensions) alors il existe $u \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $u v_1 u^{-1} = v_2$, ainsi, $SO_n(\mathbb{R})$ agit transitivement sur les symétries orthogonales sur des espaces de même dimension (transport par conjugaison).

Théo 22 : Soit $u \in O_n(\mathbb{R})$, il existe une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe orthogonale $\mathbb{R}^n = V \oplus W \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_r$. Où $r \geq 0$ et où V, W, P_i sont stables par u. Avec $u_{|V} = Id_V$, $u_{|W} = -Id_W$, $u_{|P_i}$ a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ dans une base de P_i.

2) Propriétés topologiques.

Prop 23 : Le sous groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$ pour la topologie usuelle.

Prop 24 : Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes (par arcs) : $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$, ainsi $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe.

[FGN] Théo 25 : Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple DVP

[Perr] 164 Théo 26 : Soit G le sous groupe de l'algèbre $\mathbb{H}$ formée des quaternions de norme 1, on a une suite exacte courte $\pm 1 \to G \to SO_3(\mathbb{R})$, en particulier $SO_3(\mathbb{R}) \simeq G/\{\pm 1\}$. Canonique hom DVP

Cor 27 : On a un isomorphisme $SU_2(\mathbb{C})/\{\pm Id\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.

[H2G2] 349 351 Prop 28 : On a un homéomorphisme $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq Gl_n(\mathbb{R})$, donné par la multiplication des matrices

Cor 29 : Tout sous groupe compact de $Gl_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$ lui est égal.

Prop 30 : Voyant $M_n(\mathbb{R})$ comme un $\mathbb{R}$-espace affine euclidien, l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour la norme euclidienne.

III. Classification des isométries du plan et de l'espace.

1) En dimension 2

[Aud] 87

Théo 31 : Toute isométrie de E peut s'écrire comme produit d'au plus $n+1$ réflexions.

Def 32 : Pour $f \in Is(E)$, on pose $Inv f$ l'ensemble des points de E invariants par f. Pour classifier les éléments de $Is(E)$ on peut se ramener à l'étude des isométries ayant un point fixe en post composant par une translation, on peut alors discuter sur la nature des isométries à point fixe.

Soit $f \in Is(E)$ ayant un point fixe, on identifie f et $L(f)$ sa partie linéaire. $L(f)$ est le produit d'au plus deux réflexion, d'où la classification ($f \neq Id$).

f	Translation	Rotation	Réflexion	Symétrie glissée
$L(f)$ (réduite)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$Inv(f)$	$\emptyset$	un point (centre).	une droite	$\emptyset$

(cf Annexe pour dessin)

2) En dimension 3.

[Aud] 107

On raisonne comme précédemment, sur la forme réduite de la matrice de $L(f)$, on obtient

f	Déplacements		Anti déplacement	
$\dim Ker(Lf - Id)$	3	1	2	0
$Inv f = \emptyset$	translation	vissage	Symétrie glissée	
$Inv f \neq \emptyset$	Id_E	rotation axiale	symétrie planes	Rotation symétrie

(cf Annexe pour les dessins) [Can] 167.

décomposition canonique $\begin{cases} \text{pt fixe} \Rightarrow \text{réduc } O(\mathbb{C}) \text{ longer} \\ \text{pas pt fixe} \end{cases}$

IV. Groupes d'isométries préservant une partie du plan ou de l'espace.

[Mer] 277

<u>Def 33</u> : Pour $P \subset E$, on note $Is(P)$ (resp $Is^+(P)$ et $Is^-(P)$) l'ensemble des isométries affines (resp de déplacement, antidéplacements) de E telles que $f(P) = P$.

<u>Prop 34</u> : Pour $P \subseteq E$, $Is\,P$ et $Is^+(P)$ sont des sous groupes de $Is(E)$. $Is^+(P)$ est un sous groupe de $Is(P)$.

1) Polygones réguliers (dimension 2).

[Mer] 286 291

<u>Théo 35</u> : Soit $n \geq 3$, $P_n = A_0, \dots, A_{n-1}$ un polygône à n sommets, distincts deux à deux. On a équivalence entre

a) P_n est inscrit dans un cercle C et $A_kA_{k+1} = A_0A_1$ $\forall k$. convention $A_n = A_0$.

b) $\exists r$ une rotation telle que $r(A_k) = A_{k+1}$

<u>Def 36</u> : Un polygone vérifiant ces conditions est dit régulier (à n sommets).

De plus P_n est convexe si l'angle de la rotation r est $\pm \frac{2\pi}{n} [2\pi]$.

<u>Théo 37</u> : ~~En identifiant E et~~ $\mathbb{C}$, cyclique d'ordre n engendré par la rotation r.

<u>Théo 38</u> Il y a exactement n réflexions laissant P_n globalement invariant, ce sont les réflexions ayant pour axe (OA_k) ou les médiatrices d'axes $[A_kA_{k+1}]$.

<u>Théo 39</u> : Le groupe $Is(P_n)$ est engendré par r et une symétrie s, avec les relation $r^n = Id$, $rs = sr^{-1}$, $s^2 = Id$, c'est le groupe diédral D_n.

<u>Rq 40</u> : L'action de D_n sur le n gone donne toujours une représentation de D_n toujours irréductible.

2) Polyèdres réguliers.

Groupe du Cube.

[Mer] 297 302

On considère K $ABCDA'B'C'D'$ un cube régulier (que l'on peut supposer centré)

<u>Prop 41</u> : L'image d'un sommet, d'une arête, d'une face de K par un élément de $Isom(K)$ est un sommet, une arête, une face de K.

<u>Théo 42</u> : Les grandes diagonales de K sont globalement stables sous l'action de $Isom\,K$, on en déduit un morphisme $\varphi : Is(K) \to \mathfrak{S}_4$. Ce morphisme induit une suite exacte courte scindée

$$\{\pm Id\} \hookrightarrow Is(K) \twoheadrightarrow \mathfrak{S}_4$$

On a $Is^+(K) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $Is(K) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

<u>Cor 43</u> : Il y a 24 déplacements, (resp antidéplacements) laissant K invariant.

<u>Rq 45</u> : L'action de $\mathfrak{S}_4 \simeq Isom^+(K)$ induit une représentation de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathbb{C}$ de degré 3 irréductible.

<u>Rq 46</u> : Les 3-sylow de $\mathfrak{S}_4 \simeq Isom^+(K)$ se lisent comme fixateurs des grandes diagonales, les 2-sylow de $\mathfrak{S}_4$ se lisent comme stabilisateurs des axes passant par le centre de K et les sommets des faces opposées.

Groupe du tétraèdre.

Mer 302 305

On considère $T = ABCD$ un tétraèdre régulier de E, le groupe $Is(T)$ agit comme précédemment sur les sommets de T. D'où un morphisme $Is(T) \to \mathfrak{S}_4$, qui est en fait un isomorphisme.

Ici aussi, les 3-sylow se lisent comme stabilisateurs d'un sommet sous l'action de $\mathfrak{S}_4 \simeq Is(T)$. On a $Is^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$.

Fig 1 : Isometries affines en dimension 2.

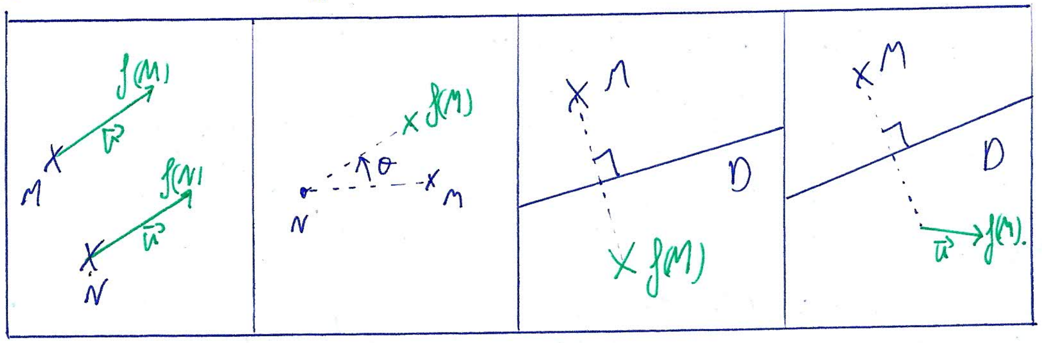

Fig 2 : Isometries affines en dimension 3