160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Refs : [Gou] Gourdon Algèbre [Gri] Grifone, algèbre linéaire [FGN3] Francinou Gianella Nicolas Oraux X Ens 3. [Per] Perrin Cours d'algèbre [MT] Mneimné Testard, Groupes de Lie Classiques

Devs :
24 Réduction des normaux [Gou]
37 Quaternions et $SO_3(\mathbb{R})$ [Per]
42 Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$ [FGN3]

Cadre : On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n finie. $f \in \mathcal{L}(E)$, $B = (e_i)_{i \in I}$ une base orthonormée de E et $A = \mathrm{Mat}_B(f)$.

I. Endomorphisme adjoint.

1) Définitions et propriétés.

[Gou] 240
Def 1 : Il existe un unique endomorphisme g de E tel que
$$\forall x, y \in E, \ (f(x), y) = (x, g(y)).$$
On l'appelle l'adjoint de f et on le note f^*.

[Gri] 238, 258
Prop 2 : L'isomorphisme canonique $E \simeq E^*$ donné par le théorème de Riesz induit un isomorphisme $\mathcal{L}(E^*) \simeq \mathcal{L}(E)$, dans lequel ${}^tf$ est associé à f^*. On en déduit en particulier

Prop 3 : L'application $\mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ associant f^* à f est une application linéaire, et involutive. Il ne s'agit cependant pas d'un morphisme d'algèbre, car $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
On a également $\mathrm{rg}\, f^* = \mathrm{rg}\, f$ et $\det f = \det f^*$

Prop 4 La matrice de f^* dans la base B est ${}^tM$. Ceci devient faux quand la base B n'est pas orthonormée.

Ex 5 : Dans la base $\binom{1}{0}, \binom{1}{1}$ de $\mathbb{R}^2$, si $\mathrm{Mat}\, f = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Mat}\, f^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Prop 6 : On a $(\mathrm{Ker}\, f)^\perp = \mathrm{Im}(f^*)$ et $(\mathrm{Im}\, f)^\perp = \mathrm{Ker}(f^*)$.

Appli 7 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie ${}^tAA = 0$, alors $A = 0$. (*)

2) Vocabulaire

[Gou] 240 241
Def 8 : L'endomorphisme f est dit normal si f commute à son adjoint. Matriciellement, cela se traduit par ${}^tMM - M{}^tM = 0$.

(*) Prop 9 : Si $F \leq E$ est un sous espace vectoriel f-stable, alors $F^\perp$ est f^* stable.

[Gri] 252
Def 10. On dit que f est auto adjoint (ou symétrique) si $f^* = f$.
On dit qu'une matrice est symétrique si ${}^tA = A$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles.
On peut de même définir les endomorphismes symétriques (définis) positifs par la condition supplémentaire
$$\forall x \in E, \ (f(x), x) \geq 0 \ (\text{resp} > 0).$$
On note $S_n^+(\mathbb{R})$ et S_n^{++} les ensembles matriciels correspondants.

Def 11 : On dit que f est dit antisymétrique si $-f = f^*$, on note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble matriciel associé : les matrices telles que $-{}^tA = A$. [Gou]

Ex 12 : Les projecteurs orthogonaux sont autoadjoints.

Def 13 : On dit que f est orthogonal si $f^{-1} = f^*$. On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe matriciel associé, défini par ${}^tAA = I_n$.

Rq 14 : Les endomorphismes orthogonaux et (anti) symétriques sont normaux.

II. Endomorphismes autoadjoints, normaux

1) Réduction des endomorphismes normaux.

Dans cette section, on suppose que f est normal, i.e $f^*f = ff^*$. [Gou]

Prop 15 : Soit $x \in E$, on a $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

Prop 20 : Si λ est une valeur propre de f et E_λ le sous espace propre associé, alors $E_\lambda^\perp$ est f stable. 254 256.

Théo 21 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre
(i) f est normal
(ii) f se diagonalise dans une base orthonormée de E.
(iii) f et f^* sont codiagonalisables.

Cor 22 : La traduction matricielle du théorème précédent est $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale si et seulement si il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = {}^tPMP$ est diagonale.

Lemme 23 : Si $\dim E = 2$, et f n'admet pas de valeurs propres réelles alors dans toute base orthonormée de E, la matrice de f a la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Théo 24 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme normal de E, alors il existe une base orthonormée B de E telle que
$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$
avec $\lambda_1 \dots \lambda_r \in \mathbb{R}$, et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ avec $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ pour $j \in [\![1, s]\!]$

DVP

2) Endomorphismes autoadjoints, antisymétriques.

[Gou] 228

Rq 11 : On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Prop 12 : Si f est autoadjoint, alors si $F \subseteq E$ est un sous espace f-stable, $F^\perp$ est également f-stable.

Théo 13 (Théorème Spectral). Soit f un endomorphisme autoadjoint. Alors il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres de f.

Cor 14 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, alors il existe P une matrice orthogonale avec ${}^tPMP = P^{-1}MP$ une matrice diagonale.

Cor 15 : Soient $M, N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec M définie positive. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP = I_n$ et ${}^tPNP = D$ diagonale.

[FGN3]

Appli 16 : (John Loewner) Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide, il existe un unique ellipsoïde de volume minimal centré en 0 contenant K.

Appli 17 : Pour $H \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ avec $R^2 = H$

[Gou] 255

Théo 18 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, alors il existe P orthogonale telle que
$$P^{-1}MP = {}^tPMP = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & Z_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & Z_s \end{pmatrix}$$
où les Z_i sont des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ où $b \in \mathbb{R}$.

En particulier, si n est impair, une matrice antisymétrique n'est pas inversible.

On peut aussi rajouter décomposition polaire et application à la norme...

III. Endomorphismes orthogonaux.

1) Propriétés, groupe orthogonal.

[Gri] 238 239

Prop 19 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :
- f est orthogonal
- f est une isométrie : $\forall x \in E$, $\|x\| = \|f(x)\|$
- f conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle$.
- f induit une permutation des bases orthonormées de E.

Prop 20 : Si f est une transformation orthogonale, on a $Sp(f) \subseteq \{\pm 1\}$.
On note SO(E) l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de déterminant 1, ceux de déterminant -1 sont dits "gauches" ou "indirects".

[Gri] 240 241

Prop 21 : L'ensemble des isométries de E forme un groupe, dit groupe orthogonal, noté O(E), dont SO(E) forme un sous groupe distingué.

Ex 22 : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est orthogonale, de même que l'endomorphisme qui lui est associé dans B.

Prop 23 : Si $F \subseteq E$ est f stable et f est orthogonal, alors $F^\perp$ est f stable également.

Rq 24 : Comme les endomorphismes orthogonaux sont normaux, on peut appliquer le théorème 24 pour obtenir

[Gou] 256

Théo 25 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie, il existe B une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f s'écrit sous la forme
$$\begin{pmatrix} I_r & & & & 0 \\ & -I_s & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R(\theta_p) \end{pmatrix}$$
avec $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 0\ [\pi]$.

Rq 26 Dans la décomposition ci-dessus, le déterminant est donné par $(-1)^s$.

[Per] 125

Ex 27 : Symétries : Si $u \in GL(E)$ vérifie $u^2 = Id$, alors u est diagonalisable, ses valeurs propres étant ± 1. Si les espaces propres E_{-1} et E_{+1} sont orthogonaux, alors u est une isométrie, dite symétrie orthogonale (par rapport à E_1). Si $\dim E_{-1} = 1$ (resp 2), on dit que u est une réflexion (un renversement).

Théo 28 : Le groupe O(E) est engendré par les réflexions, si $n \geq 3$, SO(E) est engendré par les renversements.

Rq 29 : Si $F \subseteq E$, la symétrie orthogonale associée à F est de déterminant $(-1)^{n - \dim F}$.

2) Etude en dimension 2 et 3.

[Gri] 241 244

Une matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $O_2(\mathbb{R})$ si et seulement si les colonnes sont une base orthonormée, ainsi on a $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \pm\sin\theta \\ \sin\theta & \mp\cos\theta \end{pmatrix}$ le déterminant étant donné par ∓ 1,

Prop 30 : Si $A\in SO_2(\mathbb{R})$, alors A s'écrit $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour un unique $\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, cet unique θ est appelé angle de A, A étant appelée matrice de rotation d'angle θ. (Fig 1)

Rq 31 : On a donc un isomorphisme $SO_2(\mathbb{R})\simeq S^1\simeq\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\simeq\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1

Prop 32 : Si $A\notin SO_2(\mathbb{R})$ (et $A\in O_2(\mathbb{R})$) alors A s'écrit $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ et A représente la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$. Fig 2

En dimension 3, $A\in O_3(\mathbb{R})$ a, par le théorème 25, une matrice semblable de la forme. $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}$ où $\varepsilon=\pm1$, et $\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (on englobe ainsi les cas du type $R(\theta)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

On a alors $\det A=\varepsilon$,

Prop 33. Si $\varepsilon=1$, alors A est une rotation, d'angle θ et d'axe E_1. si $\theta\neq0\ [2\pi]$. Si $\varepsilon=-1$, alors A est une rotation symétrie, composée de la rotation d'angle θ et de la "réflexion" de ~~plan~~ le plan de rotation (Fig 3 et 4).

[Perr] 161

Tout comme on a pu relier $SO_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1, on peut construire une paramétrisation de $SO_3(\mathbb{R})$.

Propdef 34 Il existe une algèbre $\mathbb{H}$ de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, appelée algèbre des quaternions munie d'une base $1, i, j, k$ telle que
- 1 est neutre pour la multiplication
- on a les formules
  $i^2=j^2=k^2=-1,\quad ij=-ji=k\quad jk=-kj=i,\quad ki=-ik=j.$

On identifie $\mathbb{R}$ à $1.\mathbb{R}\subseteq\mathbb{H}$, on a $Z(\mathbb{H})=\mathbb{R}$.

[Perr] 162 165

Rq 35 On peut réaliser $\mathbb{H}$ comme une sous algèbre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, avec

$$i=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\quad j=\begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}\quad k=\begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}.$$

Propdef 36 : Le carré de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^4$ s'écrit comme un produit sur $\mathbb{H}$: on pose $\overline{(a+bi+cj+dk)}=a-bi-cj-dk$, on a $N(q)=\|q\|^2=q\bar{q}$ pour $q\in\mathbb{H}$.

On pose G le sous groupe de $\mathbb{H}$ formé des quaternions de norme 1

Théo 37 : On a une suite exacte courte $\{\pm1\}\hookrightarrow G\twoheadrightarrow SO_3(\mathbb{R})$. DVP

Cor 38 : On a $SU_2(\mathbb{C})/\{\pm1\}\simeq SO_3(\mathbb{R})$.

3) Propriétés topologiques.

[MT] 18 36

Théo 39 : L'application $S_n^{++}(\mathbb{R})\times O_n(\mathbb{R})\longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme
$(S, O)\longmapsto OS$
pour une topologie normée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est la décomposition polaire.

Prop 40 : Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compact

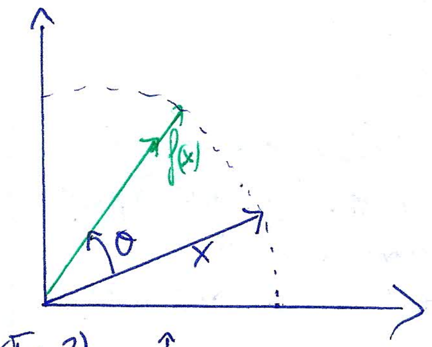
Prop 41 : Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, le groupe $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs homéomorphes ($SO_n(\mathbb{R})$ et les isométries gauches).

[FGN3]

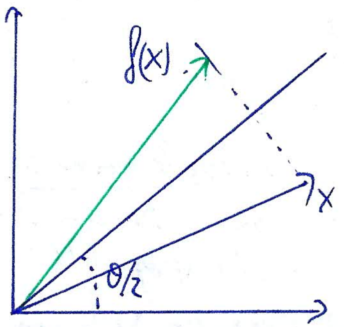
Théo 42 : Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arc DVP

Prop 43 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée pour la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

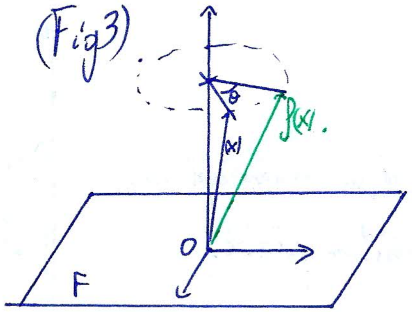
(Fig 1).



(Fig 2)



(Fig 3)



(Fig 4)