159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Refs : [Gou1] Gourdon, Algèbre [Gou2] Gourdon, Analyse
[FGN1] Francinou X-ens algèbre 1 [OA] Objectif Agrégation
[Per] Perrin, Cours d'Algèbre. [Brez] Brezis, Analyse Fonctionnelle.
[Spz] Szpirglas, Algèbre L3 [Rou] Rouvière, Petit guide de calcul diff.
[Gant] Gantmacher Theory of Matrices.

Devt : Théo 52 (Extremas liés).
Théo 50 (Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$).

Cadre : On considère K un corps et E un K espace vectoriel de dimension finie n.

I. Dualité. Définitions et premières propriétés.

1) Formes linéaires.

[Gou1] 126

Def 1 : On appelle forme linéaire sur E tout élément de $\mathcal{L}(E,K)$. On notera $E^* = \mathcal{L}(E,K)$, l'espace dual de E, il s'agit aussi d'un K-espace vectoriel.

Not 2 : Pour $x, \varphi \in E \times E^*$, on notera parfois $\langle \varphi, x\rangle = \varphi(x)$.

Ex 3 : Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert) Alors Df_a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

Ex 4 : Si $E = K^n$, les projections canoniques $K^n \to K$ sont des formes linéaires.

Ex 5 : Si $E = \mathcal{M}_n(K)$, la trace est un élément de E^*.

[FGN1]

Appl 6 : Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on définit l'application $f_A \in \mathcal{M}_n(K)^*$ par $f_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$. La correspondance $A \mapsto f_A$ induit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(K)$ et $\mathcal{M}_n(K)^*$.

Prop 7 : Une forme linéaire est nulle ou surjective.

[OA] 151 103

Théo 8 : (Riesz) Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si E est euclidien (resp. hermitien) de produit scalaire $(\cdot,\cdot)$. Alors pour $f \in E^*$, il existe un unique $y \in E$ tel que $\forall x \in E, \langle f, x\rangle = (x,y)$. La correspondance associant f à y induit un isomorphisme entre E et E^*. On a de plus $|||f||| = \|y\|$.

Ex 9 : Avec les notations de l'exemple 3. On appelle gradient de f en a (noté $\nabla f(a)$) le vecteur représentant Df_a.

2) Hyperplans.

[Gou1] 114

Def 10 : On appelle hyperplan de E tout sous espace vectoriel de E de codimension 1.

Ex 11 : Une droite est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$, un plan est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Prop 12 : Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$, le noyau $\mathrm{Ker}\,\varphi$ de φ est un hyperplan de E. Réciproquement, tout hyperplan de E se réalise comme le noyau d'une forme linéaire non triviale.

Appli 13 : Par l'application 6. Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$ rencontre $GL_n(K)$.

[Per] 96 100

Prop 14 : Un endomorphisme de E laissant stable tout hyperplan de E est une homothétie.

Pour les deux propositions suivantes on fixe $H = \mathrm{Ker}\,f$ un hyperplan de E, et $u \in GL(E)$ telle que $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$ et $u \neq \mathrm{Id}$.

Propdef 15 : On a équivalence entre
- $\det u = \lambda \neq 1$
- u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et est diagonalisable.
- $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \not\subset H$
- Dans une base bien choisie, la matrice de u a la forme (Fig 1).

On dit, si l'une de ces propriétés est vérifiée, que u est une dilatation d'hyperplan H, de droite $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$, de rapport λ.

Propdef 16 : On a équivalence entre
- $\det u = 1$
- u n'est pas diagonalisable.
- $D = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subseteq H$
- Le morphisme $\bar{u} : E/H \to E/H$ est identitaire.
- Il existe $a \in H \setminus \{0\}$ tel que $u = \mathrm{Id} + af$.
- Dans une base bien choisie, la matrice de u a la forme (Fig 2).

On dit, si l'une de ces propriétés est vérifiée, que u est une transvection d'hyperplan H et de droite D (avec $D = \mathrm{Vect}(a)$).

Théo 17 : Les transvections engendrent $SL(E)$, les transvections et dilatations engendrent $GL(E)$.

II Structure des espaces duaux

1) Bases duales

[Gou1] 127

Def 18 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour $1 \leq i \leq n$, la forme linéaire $e_i^* \in E^*$ définie sur $\mathcal{B}$ par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ est la i-ème forme coordonnée (sur la base $\mathcal{B}$).

Rq 19 Cette définition existe également en dimension infinie.

[Gou1] 127

Théo 20 : Si $B=(e_1 \dots e_n)$ est une base de E, alors la famille $B^*=(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^*, on a alors, pour $\varphi \in E^*$.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$$

en particulier on retrouve le résultat $E \simeq E^*$.

Rq 21 : L'isomorphisme du théorème précédent n'a rien de canonique et dépend du choix de la base B.

Sous les hypothèses du théorème 8, les coordonnées de φ dans la base B^* sont celles du vecteur représentant φ dans la base B, si celle-ci est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ex 22 : Si $(x_1, \dots, x_m)$ sont des réels distincts, et $P_1 \dots P_m$ les polynômes élémentaires de Lagrange associés. La base duale (pour $\mathbb{R}_{m-1}[X]$) des P_i sont les évaluations en les X_i.

[Gou1] 131

Prop 23 : Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in E^*$. L'application linéaire $\varphi : E \to K^m$ définie par $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est surjective si et seulement si les $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont linéairement indépendantes.

2) Bidual et base antéduale.

[Gou1] 126-127 131

Prop 24 : Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E dont $(f_1, \dots, f_n)$ est la base duale, on l'appelle base antéduale de $(f_1, \dots, f_n)$.

Ex 25 : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $f_1, f_2, f_3 \in E^*$ définies par $f_1 = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*$, $f_2 = -e_1^* + 2e_3^*$, $f_3 = e_1^* + 3e_2^*$ (où (e_1, e_2, e_3) est une base de E). La base antéduale de (f_1, f_2, f_3) est donnée par

$$\frac{1}{13}(6e_1 - 2e_2 + 3e_3), \frac{1}{13}(-3e_1 + e_2 + 5e_3), \frac{1}{13}(-2e_1 + 5e_2 - e_3).$$

Def 26 : On appelle bidual de E l'espace dual de E^*, noté E^{**}.

Théo 27 : Pour $x \in E$, on considère $ev(x) : E^* \to K$ définie par $(ev(x), \varphi) = (\varphi, x)$. L'application $E \to E^{**}$ associant x à $ev(x)$ est un isomorphisme.

Rq 28 : Ce dernier isomorphisme ne dépend pas du choix d'une base. On convient alors d'identifier E et E^{**}.

Rq 29 : En dimension infinie, l'application ev est à priori seulement un morphisme injectif.

II. Application transposée et orthogonalité.

1) Orthogonalité au sens des formes linéaires.

Def 30 : Deux éléments $(\varphi, x) \in E^* \times E$ sont dits orthogonaux si $(\varphi, x) = 0$ [Gou1] 128 130

- Si $A \subseteq E$, on pose $A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid A \subseteq \operatorname{Ker} \varphi\}$, il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E^*, appelé l'orthogonal de A.
- Si $B \subseteq E^*$, on pose $B^\circ = \bigcap_{\varphi \in B} \operatorname{Ker} \varphi = \{x \in E \mid \forall \varphi \in B, (\varphi, x) = 0\}$, il s'agit d'un sous espace vectoriel de E^*, appelé l'orthogonal de B.

Ex 31 : Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $B \setminus \{e_j\}$ est dans l'orthogonal de e_j^* pour tout $j \in [1, n]$.

Prop 32 : Le passage à l'orthogonal retourne les inclusions : si $A \subseteq A' \subseteq E$ alors $A'^\perp \subseteq A^\perp$, et si $B \subseteq B' \subseteq E^*$, alors $B'^\circ \subseteq B^\circ$.

Prop 33 : Si $A \subseteq E$ (resp $A \subseteq E^*$), on a $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$ (resp $A^\circ = (\operatorname{Vect} A)^\circ$)

Théo 34 : Soit F (resp G) un sous espace vectoriel de E (resp de E^*), on a

- $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ et $(F^\perp)^\circ = F$
- $\dim G + \dim G^\circ = \dim E^*$ et $(G^\circ)^\perp = G$.

Cor 35 : En dimension finie, un sous espace est égal à l'espace entier si et seulement si son orthogonal est nul.

Rq 36 : L'isomorphisme du théorème 8 fait le lien entre les orthogonaux définis ici et les orthogonaux au sens classique (pour un produit scalaire)

Rq 37 : L'égalité $F^{\perp\circ} = F$ reste vraie en dimension infinie, mais pas $B = B^{\circ\perp}$ (par exemple $E = \mathbb{R}[X]$, $B = \{\varphi_n : P \mapsto P^{(n)}(0)\}$.

Cor 38 : (Equations d'un sev) :

- Soient p formes linéaires $\varphi_1 \dots \varphi_p$ de E^* telles que $rg(\varphi_1 \dots \varphi_p) = r$. Le sous espace vectoriel $F = \{\varphi_1 \dots \varphi_p\}^\circ$ est de dimension $n - r$.
- Réciproquement, si F est un sev de dimension q, il existe $n-q$ formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1 \dots \varphi_{n-q}$ telles que $F = \{\varphi_1 \dots \varphi_{n-q}\}^\circ$.

[Gou1] 128-129

Prop39 : Soit H un hyperplan de E. L'ensemble $H^\perp$ est une droite de E^*.

Prop40 : Si A_1, A_2 sont deux sous espaces vectoriels de E. Alors

- $(A_1+A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$ - $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$

Si B_1 et B_2 sont deux sous espaces vectoriels de E^*. Alors

- $(B_1+B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ$ - $(B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ$

2) Application transposée

[Gou2] 129-131

Def41 : Soient E, F deux K-espaces vectoriels, soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
On a une application $F^* \to E^*$ envoyant $f \in F^*$ sur $f \circ u$. On l'appelle transposée de u, notée ${}^t u$.
On fixe pour cette partie E et F deux espaces vectoriels sur K de dimension finie.

Prop42 : Soit $u : E \to F$ linéaire, on a $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, {}^t u$, et $\mathrm{Im}\, {}^t u = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$. On a aussi $\mathrm{Ker}({}^t u) = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ (et ce dernier point même en dimension infinie)

Prop43 : Si E, F, G sont trois K-ev, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.

Prop44 : Un sous espace F de E est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Appli45 Théorème de trigonalisation simultanée.

Prop46 : Si B, C sont respectivement bases de E et F, et $M = \mathrm{Mat}_{C,B}(u)$, alors la matrice de ${}^t u$ dans les bases duales C^*, B^* est la transposée de M.

Rq47 : On a une correspondance entre les K-espaces vectoriels et leurs duaux, inversant le sens des morphismes, par dualité (passage au morphisme transposé).

IV Formes linéaires en analyse.

[Brez]

Théo48 (Hahn Banach Géométrique)
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et A un ouvert convexe de E tel que $A \cap F = \emptyset$.
Alors il existe un hyperplan H de E tel que $F \subseteq H$ et $H \cap A = \emptyset$.

Cor49 : Si $K = \mathbb{R}$ et $(E, \|.\|)$ est normé, pour $C \subseteq E$ un convexe compact non vide alors $x \in C$ si et seulement si $\forall f \in E^*$, $f(x) \leq \sup_C f$.

[Spz] 344

Théo50 Considérant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M M = I_n\}$ est la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. DVP

Appli51 : Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = {}^t \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors f est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

[Gou2] 317-320

Théo52 (Extremas liés)
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f, g_1 \dots g_r \in C^1(U, \mathbb{R})$, $\Gamma = \{x \in U \mid \forall i \in [\![1,r]\!], g_i(x) = 0\}$.
Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et si $Dg_i a$ est libre dans $(\mathbb{R}^n)^*$. Alors $Df a \in \mathrm{Vect}(Dg_1 a \dots Dg_r a)$, ses coordonnées sont les multiplicateurs de Lagrange de a. DVP

Application53 Considérant $f : (x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n$ et $\Gamma = \{(x_1 \dots x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$
On retrouve l'inégalité arithmético géométrique :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

[Bou] 380

Appli54 (Inégalité de Hadamard)
Pour tout $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$, $|\det(v_1 \dots v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|$. Avec égalité si et seulement si un des v_i est nul, ou si les v_i forment une base orthogonale de E.
Géométriquement, pour des arêtes de longueur fixée, un hyper-parallélépipède est de volume maximal si et seulement si c'est un hyperrectangle.

[Gou1]

Théo55 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses racines complexes et $\alpha_1 \dots \alpha_r$ leurs multiplicités. On pose $s_\ell = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^\ell$ pour $\ell \geq 0$ et $S_n(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i,k \leq n} s_{i+k} x_i x_k$ qui est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Si (p,q) est la signature de cette forme quadratique. Alors P possède $p-q$ racines réelles.

Fig 1 $\begin{pmatrix}\lambda & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$

$\lambda \in k^*$

$\lambda \neq 1$

Fig 2 $\begin{pmatrix}1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1\\ 0 & & & 0 & 1\end{pmatrix}$