158 Matrices symétriques réelles, Matrices hermitiennes.

Refs : [Gou1] Gourdon Algèbre [Gou2] Gourdon Analyse [Gri] Grifone Algèbre linéaire ; [Per12] Perrin, cours d'Algèbre. [FGN3] FrancinouX-ens Alg 3. [Rou] Rouvière PG du calcul diff ; [Cia] Ciarlet Analyse numérique et optimisation. [All] Allaire

Dev : 28 (réduc normaux) 34 35 (John Loewner) 43 (lemme de Morse).

Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K-espace vectoriel de dimension finie

I. Généralités

1) Définitions et premières propriétés

[Gou1 119] **Def 1.** Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite
- Symétrique si ${}^tA = A$; Antisymétrique si ${}^tA = -A$

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si $H = H^* := {}^t\overline{H}$.

Ex 2. $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 5 \end{pmatrix}$ est hermitienne. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique

[Gri 279] **Rq 3** La diagonale d'une matrice hermitienne est réelle

Def 4. Une matrice symétrique (hermitienne) est dite positive (resp. définie positive) si $\forall X \in K^m$ ${}^t\overline{X} M X \geq 0$ (resp >0)

[Gou1 225] **Rq 5.** Une matrice M symétrique est (définie) positive si et seulement si ses valeurs propres sont (strictement) positives.

[Gri] **Not 6.** On pose S_n (resp S_n^+, S_n^{++}) l'ensemble des matrices symétriques (resp symétriques positives, définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A_n l'ensemble des matrices antisymétriques. $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices hermitiennes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Prop 7. On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
De plus, $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim A_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Prop 8. $\mathcal{H}_n = S_n \oplus iA_n$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Rq 9. $\mathcal{H}_n$ n'est pas un $\mathbb{C}$ espace vectoriel ; $iI_n \notin \mathcal{H}_n$.

2) Lien avec les endomorphismes, les formes bilinéaires symétriques et hermitiennes.

[Per12 117 119] **Def 10.** Soit $\varphi : E \times E \to K$, et $\sigma : K \to K$ un automorphisme de K. On dit que φ est une forme σ-sesquilinéaire si :
- $\forall y \in E$, $x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire. $\forall x \in E$, $y \mapsto \varphi(x,y)$ est semi linéaire i.e additive et telle que $\varphi(x, \lambda y) = \sigma(\lambda)\varphi(x,y)$ pour $\lambda \in K$.

Si $K = \mathbb{R}$ et $\sigma = Id$, on parle de forme bilinéaire
Si $K = \mathbb{C}$ et σ est la conjugaison complexe, on parle de forme sesquilinéaire

Def 11. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, on dit que φ est symétrique si : $\forall x, y$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

[Per12 117 119] Soit $\varphi : E \times E \to K$ sesquilinéaire. On dit que φ est hermitienne si : $\forall x, y \in E$ $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$.

[Gou1 227] **Ex 12.** Si $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$, alors $\varphi(f,g) := \int_0^1 f\overline{g}\,dx$ donne une forme hermitienne sur E.
- Pour $X, Y \in \mathbb{R}^m$, $\varphi(X,Y) := {}^tXY$ est une forme bilinéaire symétrique
- Pour $X, Y \in \mathbb{C}^m$, $\varphi(X,Y) = {}^t\overline{X}Y$ est une forme hermitienne.

Ecriture matricielle.

[Gou1 228 229] Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ une base de E. Si $\varphi : E \times E \to K$ est une forme σ-sesquilinéaire, on a, pour $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^m y_i e_i$

$$\varphi(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq m} \sigma(y_j) x_i \varphi(e_i e_j) = {}^tX M \sigma(Y).$$

où $X = (x_i) \in K^m$, $\sigma(Y) = (\sigma(y_i)) \in K^m$ et $M = (\varphi(e_i e_j))_{i,j \in [\![1,m]\!]}$
on dit que M est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Prop 13. L'application $\varphi \mapsto \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(K)$ et l'espace des formes σ-sesquilinéaires sur E.

Ex 14. La matrice 1 de l'ex 2 est la matrice de la forme hermitienne définie sur $\mathbb{C}^2$ $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1\overline{y_1} - i\overline{y_2}x_1 + i\overline{y_1}x_2 + 5\overline{y_2}x_2$

Changement de base

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, $\varphi : E \times E \to K$ une forme σ-sesquilinéaire.
Si M (resp M') est la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ (resp $\mathcal{B}'$).
Alors on a. $M' = {}^tPM\overline{P}$
Les matrices M' et M sont en particulier de même rang, on appelle ce rang le rang de φ.

Prop 15 φ est bilinéaire symétrique (resp hermitienne) si et seulement si sa matrice M dans une base est symétrique (resp hermitienne).

Def 16. On dit que $q : E \to K$ est une forme quadratique si elle s'écrit sous la forme $q(x) = \varphi(x,x)$ où φ : $E \times E \to K$ est une forme σ-sesquilinéaire

Prop 17. La forme φ associée à q est dite polaire, elle est uniquement déterminée par :

[Per] 124

Rq 18 : Si q est une forme quadratique réelle, alors $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$. Si q est une forme quadratique complexe alors
$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) + \frac{i}{4}(q(x+iy) - q(x-iy)).$$

Ex 19 : La forme quadratique associée à la matrice 1. de l'exemple 2 est donnée par $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = |x_1|^2 + 5|x_2|^2 + 2\,\mathrm{Im}(\bar{x_2} x_1)$.

[Gri] 200 300

Def 20 : On dit que $\varphi : E \times E \to K$ est un produit scalaire si c'est une forme σ-sesquilinéaire définie positive (i.e sa matrice est définie positive). Un espace E muni d'une telle forme est dit Euclidien si $K = \mathbb{R}$ et hermitien si $K = \mathbb{C}$.

Prop-def 21 : Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ euclidien ou hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(E)$, appelé adjoint de f, respectant la propriété
$$\forall x, y \in E \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$$
Si B est une base orthonormé pour $\langle \cdot,\cdot \rangle$ et $A = \mathrm{Mat}_B(f)$, alors $\mathrm{Mat}_B(f^*) = {}^tA$ dans le cas euclidien et ${}^t\bar{A}$ dans le cas Hermitien.

Prop 22 : Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on a $(f^*)^* = f$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Def 23 : Un endomorphisme f d'un espace euclidien (resp hermitien) est dit
- orthogonal (resp unitaire) si $f^* f = f f^* = Id_E$
- normal si $f^* f = f f^*$
- auto-adjoint si $f = f^*$ (i.e si sa matrice dans une base est symétrique, resp hermitienne).

Les deux premières définitions s'adaptent immédiatement au cas des matrices.

Ex 24 : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est orthogonale.

II. Réduction et théorie spectrale.

Ou fixe $\langle \cdot,\cdot \rangle$ un produit scalaire (hermitien) sur E.

1) Théorèmes spectraux.

[Gou1] 244

Théo 25 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. Il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f. De plus, les valeurs propres de f sont réelles.

Cor 26 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) une matrice symétrique (resp hermitienne). Alors il existe C orthogonale (resp unitaire) telle que
$$C^* M C = D$$
avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.

[Gou1] 258

Ex 27 : $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ donne $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Prop 28 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthogonale B de E dans laquelle
$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda_i \in \mathbb{R},\ \tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

DVP

[Gou2] 247.

Prop 29 : Si $K = \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si et seulement si u se diagonalise dans une base orthonormale de E.

Appli 30 (Critère de Sylvester) Soit $M = (a_{ij})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Pour $I \subset [\![1,n]\!]$, on pose $M_I = (a_{ij})_{i,j \in I}$. On a alors
- M est positive si et seulement si $\det M_I \geq 0$ pour tout I
- M est définie positive si et seulement si $\det M_{[\![1,k]\!]} > 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

245.

Cor 31 : S_n^{++} est un ouvert de S_n.

Prop 32 : Si q, q' sont deux formes quadratiques sur E, et si q est définie positive, alors il existe une base de E orthonormée pour q et orthogonale pour q' (pseudo réduction simultanée).

Cor 33 : Soient M, N deux matrices symétriques (resp hermitiennes) avec M définie positive, il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp $\mathbb{C}$) telle que $C^* M C = I_n$ et $C^* N C = D$ diagonale réelle.

[FGN3] 227 229

Appli 34 (Convexité logarithmique du det) Soient $A, B \in S_n^{++}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.

Cor 35 (Ellipsoïde de John Loewner) Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 contenant K de volume minimal. DVP

2) Conséquences sur les formes quadratiques et calcul différentiel.

[Gri] 309 330

Théo 36 (Sylvester) Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de q s'écrit par blocs
$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$
où $r = rg(q)$ et p est un entier ne dépendant que de q. Le couple $(p, r-p)$ est donc caractéristique de q à équiv près, on l'appelle la signature de q.

[Gri] 310 **Ex 37** : Pour $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 15z^2 - 4xy + 6xz - 8yz$. On a $\mathrm{sign}(q) = (2,1)$

Ex 38 : $\det : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a pour signature $(2,2)$.

[Cou2] 316 **Rq 39** : Par le lemme de Schwarz, la Hessienne d'une appli C^2 est une matrice symétrique

Théo 40 : Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit $a \in U$ tel que $Df(a) = 0$. On a par Taylor Young $f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} D^2 f(a) \cdot h \cdot h + o(\|h\|^2)$. On a alors

- Si f admet un minimum local en a, $D^2 f(a)$ est une forme quadratique positive
- Si $D^2 f(a)$ est une forme quadratique définie positive. Alors f admet un minimum local en a.

Appli 41 : Si $A \in S_n^{++}$ et $b \in \mathbb{R}^n$, la fonctionnelle quadratique $\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ admet un minimum local en $A^{-1}b$.

[Rou] 210 **Lemme 42** : (Réduction des formes quadratiques, version différentielle) Soit $A_0 \in Gl_n(\mathbb{R}) \cap S_n$. Il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C^1(V, Gl_n(\mathbb{R}))$ tel que

$$\forall A \in V, \ {}^t\varphi(A) A_0 \varphi(A) = A.$$

354. **Théo 43** (Lemme de Morse) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3, $0 \in U$. On suppose que $Df(0) = 0$, $D^2 f(0)$ non dégénérée et $(p, n-p) := \mathrm{sign}(D^2 f(0))$. Alors il existe φ un C^1 difféom entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - (u_{p+1}^2 + \dots + u_n^2) \quad \text{où } u = \varphi(x).$$

DVP

III. Décomposition, résolution de systèmes linéaires.

1) Décomposition polaire, norme $\|.\|_2$

[FGN3] 107-108 128. **Prop 44** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme auto adjoint positif. Il existe un unique $h \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint positif tel que $u = h^2$. De plus, h est un polynome en u.

Appli 45 : Soit $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n^{+}$, alors AB est diagonalisable et son spectre est contenu dans $\mathbb{R}_+$.

Prop 46 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+$ tel que $A = OS$. On a de plus que l'application $A \mapsto OS$ induit un homéomorphisme $Gl_n(\mathbb{R}) \simeq O_n \times S_n^{++}$.

Prop 47 : Pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, on a $\|S\|_2 = \rho(S)$. De plus pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|M\|_2 = \rho({}^tMM)$.

2) Résolution de système linéaire.

[Cia] **Lemme 48** : (Kantorovitch) Soit $A \in S_n^{++}$ alors pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|^4.$$

où λ_1 et λ_n désignent respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de A.

[All] Fixons $A \in S_n^{++}$ pour $b \in \mathbb{R}^n$, résoudre le système $Ax = b$ revient à minimiser la fonctionnelle quadratique $J : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$. Ce problème de minimisation peut être étudié par des algorithmes de gradients. On considère $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et

$$x^{k+1} = x^k + \rho \nabla J(x^k) \qquad k \in \mathbb{N}, \ \rho \in \mathbb{R}_+ \text{ choisi}$$

C'est le gradient à pas fixe.

Théo 47 : Si le pas ρ appartient à $]0, \frac{2}{\rho(A)}[$, cet algorithme converge. La convergence est la plus rapide pour $\rho = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$. On retrouve la méthode de Richardson.

On peut aussi chercher à optimiser le pas ρ à chaque itération. C'est l'algorithme du gradient à pas optimal, le pas ρ_k est choisi comme réalisant le minimum de $\rho \mapsto \nabla J(x^k + \rho \nabla J(x^k))$

Ce minimum est réalisé par $\rho_k = \frac{\langle r^k, r^k\rangle}{\langle Ar^k, r^k\rangle}$ où $r^k = \nabla J(x^k)$.