157. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Refs : [Gri] Grifone, Algèbre linéaire [Gou1] Gourdon, Algèbre
[OA] Objectif agrégation
Devts : Trigo simultanée (16).
(37) Surj exponentielle
(38) Décompo Dunford.

Cadre : On se donne K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I. Endomorphismes trigonalisables.

1) Premiers outils de réduction

[OA] 161 163

Prop-def 1 Il existe un unique polynôme unitaire μ_u qui engendre l'idéal de $K[X]$ formé des polynômes annulateurs de u. On l'appelle polynome minimal de u.

Prop-def 2 On appelle polynome caractéristique de u, noté χ_u, le polynôme défini par $\chi_u(X) = \det(X I_d - u)$

Ex 3 : Si $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^3$, et u est représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, alors $\chi_u(X) = (X-1)^2(X+1)$. et $\mu_u(X) = (X-1)(X+1)$.

Théo 4 (Cayley Hamilton) On a $\mu_u | \chi_u$ dans $K[X]$, autrement dit χ_u est un polynôme annulateur de u : $\chi_u(u) = 0$

Cor 5 : On a $\deg \mu_u \leq n$.

Def 6 : Les racines de χ_u dans K sont appelées valeurs propres de u (on note $\sigma(u)$ l'ensemble de ses valeurs propres). Pour $\lambda \in \sigma(u)$ on note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id)$ l'espace propre pour u associé à λ. On note $\nu_\lambda \in \mathbb{N}$ la multiplicité de $(X-\lambda)$ dans χ_u. Et on note $F_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id)^{\nu_\lambda}$ l'espace caractéristique pour u associé à λ.

Rq 7 : Pour $\lambda \in \sigma(u)$ on a $1 \leq \dim E_\lambda \leq \nu_\lambda$.

Théo 8 (Lemme des noyaux) Soit $P = P_1 \ldots P_r \in K[X]$ avec $P_i \wedge P_j = 1$ pour $i \neq j$. Alors $\mathrm{Ker}\, P(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\, P_i(f)$.

2) Endomorphismes trigonalisables, définition et caractérisation

Def 9 : L'endomorphisme u est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite trigonalisable s'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que PAP^{-1} soit triangulaire supérieure.

Rq 10 : Il est bien sûr équivalent que u soit trigonalisable et que sa matrice dans une base quelconque le soit.

Théo 11 : L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynome caractéristique χ_u est scindé sur K.

Cor 12 : Si $F \subseteq E$ est un sous-espace stable par u, et si u est trigonalisable, alors l'endomorphisme induit $u_{|F}$ est lui aussi trigonalisable

Cor 13 : Si K est algébriquement clos (ex : $K = \mathbb{C}$) alors tout endomorphisme est trigonalisable.

[Gri] 173

Cor 14 : Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est trigonalisable, et $\{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}$ les valeurs propres de A (avec multiplicité) alors $\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

3) Trigonalisation simultanée.

[Gou1] 166

Prop 15 : Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$ commuttant entre eux ($uv = vu$). Alors
(a) Tout espace propre de v est stable par u
(b) $\mathrm{Im}\, v$ est stable par u.

DVP

Théo 16 : Soit $(u_1 \ldots u_m)$ une famille d'endomorphismes de E qui commuttent entre eux deux à deux. Si tous les u_i sont trigonalisables, alors les (u_i) sont co-trigonalisables : il existe une base de E dans laquelle chacun des u_i a pour matrice une matrice triangulaire supérieure.

Prop 17 Si u et v commuttent et sont trigonalisables, alors uv et $u+v$ sont trigonalisables.

4) Propriétés topologiques.

On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et on note

$T_n(K) = \{ M \in \mathcal{M}_n(K) \mid M \text{ est trigonalisable} \}$

$C_n(K) = \{ M \in \mathcal{M}_n(K) \mid M \text{ est diagonalisable, avec } n \text{ valeurs propres distinctes} \}$

$D_n(K) = \{ M \in \mathcal{M}_n(K) \mid M \text{ est diagonalisable} \}$.

Prop 18 : $C_n(K)$ est dense dans $T_n(K)$. $C_n(K) = \mathring{D}_n(K)$ dans $T_n(\mathbb{R})$.
un ouvert
En particulier, $D_n(K)$ est dense dans $T_n(K)$.

Prop19 : $T_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II. Endomorphismes nilpotents.

1) Définition et caractérisation.

Def20 : On note $\mathcal{N}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \exists p \in \mathbb{N} \mid u^p = 0\}$ l'ensemble des éléments nilpotents de l'anneau $\mathcal{L}(E)$. Pour $u \in \mathcal{N}(E)$, on appelle indice de nilpotence de u l'entier $\inf\{p \in \mathbb{N} \mid u^p = 0\}$.

Rq21 : Par Cayley Hamilton, l'indice de nilpotence p de $u \in \mathcal{N}(E)$ est inférieur à n, et $\mu_u = X^p$.

Ex22 : L'endomorphisme $u \in (K_n[X])$ envoyant $P \in K_n[X]$ sur son polynôme dérivé P' est nilpotent, son extension à $K[X]$ ne l'est pas.

Prop23 : Si u est nilpotent d'indice p. Il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ soit libre

Prop24 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre.
i) u est nilpotent, (ii) $\chi_u(X) = X^n$ (iii) $\mu_u = X^p$ où p est l'indice de nilpotence de u
(iv) u est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0.

Ex25 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a $\chi_A(X) = X(X^2+1)$, sa seule valeur propre sur $\mathbb{R}$ est 0, mais A n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Prop26 : Si K est de caractéristique nulle, alors u est nilpotent si et seulement si $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{R}$.

Ex27 : Si car $K = p > 0$, alors I_p satisfait la condition précédente sans être nilpotente.

Théo28 (Burnside)
Tout sous groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est un groupe fini.

2) Le cône nilpotent $\mathcal{N}(E)$.

Prop29 : L'ensemble $\mathcal{N}(E)$ est un cône : pour $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\lambda u \in \mathcal{L}(E)$ pour $\lambda \in K$. [OA] 168 169

Rq30 : Cependant, $\mathcal{N}(E)$ n'est pas un idéal de $\mathcal{L}(E)$, il n'est pas stable par addition (ce n'est pas non plus un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$) : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est non nilpotente tout en étant somme de nilpotents.

Prop31 : On a Vect $\mathcal{N}(E) = \mathrm{Ker}\, \mathrm{Tr}$

Ex32 : E de dim 2, on a pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\chi_M = X^2 - \mathrm{Tr}M X + \det M$.
On a $M \in \mathcal{N}(E) \Leftrightarrow \mathrm{Tr}M = \det M = 0$. En écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\mathcal{N}(E) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in k \mid a = -d \text{ et } ad - bc = 0\right\}$
Pour $k = \mathbb{R}$, on peut voir $\mathcal{N}(E)$ comme le cône d'éq $a^2 + bc = 0$ dans le $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 formé des matrices de trace nulle dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Prop33 : Soient $u, v \in \mathcal{N}(E)$, $f \in \mathcal{L}(E)$,
a) Si u et v commutent, alors $u+v \in \mathcal{N}(E)$
b) Si u et f commutent, alors $fu = uf \in \mathcal{N}(E)$.

3) Unipotence.

Def34 : On note $\mathcal{U}(E) = \mathcal{N}(E) + Id_E$ l'ensemble des éléments unipotents de E. [OA] 174

Prop35 : On a $u \in \mathcal{U}(E) \Leftrightarrow \chi_u = (1-X)^n$

Prop36 : Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a des homéomorphismes.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N}(E) & \longrightarrow & \mathcal{U}(E) & \longrightarrow & \mathcal{N}(E) \\ n & \longmapsto & \exp(n) & \longmapsto & \exp(n) - Id \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathcal{U}(E) & \longrightarrow & \mathcal{N}(E) & \longrightarrow & \mathcal{U}(E) \\ u & \longmapsto & u - id & \longmapsto & \exp(u - id). \end{array}$$

Appl37 L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective

DVP

III. Application à la réduction.

1) Décomposition de Dunford.

[Gou1] 194

Théo 38 (Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé, il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que
- $n \in \mathcal{N}(E)$, et d est diagonalisable
- n et d commutent
- $n + d = u$

DVP

On a de plus alors que d et n sont des polynomes en u.

Prop 39. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $F \in K[X]$ un polynôme annulateur de u. Soit $F = \beta M_1^{\alpha_1} \dots M_s^{\alpha_s}$ la décomposition de F en facteurs irréductibles dans $K[X]$. Pour tout i, on note $N_i = \mathrm{Ker}\, M_i^{\alpha_i}(u)$. On a alors $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u.

Appli 40: Calcul de $\exp(u)$.

Rq 41: La décomposition de Dunford ne facilite pas tant que ça le calcul car elle reste difficile à obtenir.

Rq 42: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (celle-ci est diagonalisable d'emblée) car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne commutent pas.

2) Réduction de Jordan pour les nilpotents.

Def 43: On appelle Bloc de Jordan les matrices de la forme

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K).$$

[OA] 171 173

Prop 44: Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre.

(i) Il existe une base dans laquelle la matrice de u est un bloc de Jordan

(ii) u est nilpotent d'indice n.

Théo 45 (Réduction de Jordan)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Il existe une famille d'entiers $n_1 \geq \dots \geq n_p$ et une base B de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de Jordan

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_p} \end{pmatrix}.$$

Il y a de plus unicité dans le sens suivant, si $m_1 \dots m_q$ est une autre famille et B' une autre base convenable.

Alors $p = q$ et $n_i = m_i$ pour $i \in [\![1, p]\!]$.

[Gou1] 199

Théo 46 (Réduction de Jordan général) Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable

Avec $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Alors il existe une Base B de E dans laquelle la matrice de u a la forme

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{pmatrix} \text{ où } \forall i,\ A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i1} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & v_{i\alpha_i - 1} \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(K)$$

avec pour i, j, $v_{ij} \in \{0, 1\}$.