155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Refs : [Gou1] Gourdon Algèbre. [OA] Beck Malick Peyré Objectif agrégation. [Gri] Grifone Algèbre linéaire. [Dem] Demailly Analyse numérique.

Dev : 41 Réduction Normaux [Gou1]
47 Lf Dunford [Gou1].

Cadre : On considère k un corps, E un k-espace vectoriel de dimension finie n. On identifiera $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(k)$.

I. Définitions et premières propriétés.

1) Élément propre.

[Gou1] 161 162

Def 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha \in k$, on dit que α est une valeur propre de f si $f - \alpha Id_E$ est non injective (i.e. non inversible). Autrement dit s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \alpha x$, on dit alors que x est un vecteur propre pour f (associé à α).

Rq 2. $f \in GL(E) \Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de f. On dit que α est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(k)$ s'il existe $X \in k^n$ tel que $AX = \alpha X$.

Def 3 : On note $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f (spectre de f). Pour $\lambda \in Sp(f)$, on pose $E_\lambda = \mathrm{Ker}\, f - \lambda Id$ l'espace propre associé à la valeur propre λ.

Théo 4 : Les espaces propres de f sont en somme directe, f induit une homothétie sur tout sous espace propre.

Cor 5 : $f \in \mathcal{L}(E)$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

Ex 6 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $Sp(A) = \{2, 1\}$, $E_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ $E_1 = \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

Ex 5 : Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, alors $Sp A = \emptyset$ dans $\mathbb{R}$, pas dans $\mathbb{C}$!

2) Polynôme minimal.

[Gou1] 174

Def 6 : Soit $P = a_m X^m + \dots + a_0 \in k[X]$, on définit, pour $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp $A \in \mathcal{M}_n(k)$) les objets
$P(f) = a_m f^m + \dots + a_0 Id_E \in \mathcal{L}(E)$ (resp $P(A) = a_m A^m + \dots + a_0 I_n \in \mathcal{M}_n(k)$).

Prop 7 : La définition précédente donne lieu à une application evg : $k[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ envoyant P sur $P(f)$. Il s'agit d'un morphisme de k-algèbre. De même pour $A \in \mathcal{M}_n(k)$. On peut ainsi poser $k[f]$ (resp $k[A]$) l'image de ce morphisme, il s'agit d'une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ (resp $\mathcal{M}_n(k)$)

[Gou1] 175 176

Prop 8 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in k[X]$ tel que $P(f) = 0$, alors $P(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in Sp(f)$.

Théo 9 : (Lemme des Noyaux) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $P = P_1 \dots P_r \in k[X]$ un produit de polynômes premiers entre eux deux à deux, on a
$$\mathrm{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(f)).$$

Def 10 : Comme $k[X]$ est de dimension infinie sur k, le noyau de evg ($f \in \mathcal{L}(E)$) est un idéal non nul de $k[X]$. Le générateur unitaire de cet idéal est appelé polynôme minimal de f sur k, on le note Π_f.

Prop 9 : Les valeurs propres de f sont exactement les racines de Π_f dans $k[X]$.

3) Polynôme caractéristique.

[Gou1] 162 163

Def 10 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$ on appelle polynôme caractéristique de A l'élément de $k[X]$ défini par $\det(XI_n - A) =: \chi_A(X)$

Rq 11 : La définition $\det(A - XI_n)$ est aussi couramment utilisée, et n'impose qu'un changement de signe en dimension impaire.

Prop 12 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$, ${}^tA$ et A ont même polynôme caractéristique. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Def 13 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de la matrice de f dans une base de E ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle polynôme caractéristique de f, noté χ_f.

Prop 14 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent, alors son polynôme caractéristique est X^n.

Théo 15 (Cayley Hamilton). On a $\chi_f(f) = 0$ pour $f \in \mathcal{L}(E)$, autrement dit, Π_f divise χ_f.

Cor 16 : Les valeurs propres de f sont exactement les racines de son polynôme caractéristique (dans k).

Cor 17 : Si k est algébriquement clos, on a $Sp(f) \neq \emptyset$ $\forall f \in \mathcal{L}(E)$.

II Diagonalisabilité.

1) Définition

[Gou] 162.

Def 18: On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres pour f. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(k)$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Rq 19: Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si sa matrice est diagonalisable dans toute base.

Ex 20: Une rotation de $\mathbb{R}^2$, d'angle diff de $\pi\mathbb{Z}$, n'est pas diagonalisable.

Prop 21: Si $\lambda \in k$ est racine de Π_f de multiplicité h, alors $\dim E_\lambda \leq h$.

2) Critères de diagonalisabilité.

[Gou] 163 164

Théo 22: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre

(i) f est diagonalisable

(ii) χ_f est scindé sur k, et $\dim E_\lambda$ est la multiplicité de λ comme racine de χ_f, pour tout $\lambda \in Sp(f)$.

(iii) $\dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_r} = n$ où $\lambda_1 \dots \lambda_r$ sont les vp de f

(iv) Il existe $P \in k[X]$ scindé à racines simples annulant f

(v) Π_f est scindé à racines simples

Prop 23: Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, alors ${}^tf \in \mathcal{L}(E^*)$ l'est aussi et si $F \subset E$ est f stable, $f_{|F}$ est diagonalisable.

Ex 24: Une matrice nilpotente non nulle n'est pas diagonalisable.

Prop 25: Si $k = \mathbb{F}_q$ est fini, f est diagonalisable si et seulement si $f^q = f$.

3) Conséquences topologiques.

[OA] 179

On fixe $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les espaces $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(k)$ étant de dimension finie toute norme les munit de la même topologie. De plus tout sous ensemble de $\mathcal{M}_n(k)$ hérite de la topologie induite.
On considère les sous ensembles suivants:

[OA] 179.

- $D_n(k)$ l'ensemble des matrices diagonalisables
- $T_n(k)$ l'ensemble des matrices trigonalisables
- $C_n(k)$ l'ensemble des matrices diagonalisables à vp distinctes.

Prop 26: Dans l'espace topologique $T_n(k)$, on a $\overline{C_n(k)} = T_n(k)$ et $\mathring{D}_n(k) = C_n(k)$, en particulier $C_n(k)$ est un ouvert dense de $T_n(k)$.

Prop 27: Sur $\mathbb{C}$, on a $T_n(k) = \mathcal{M}_n(k)$, sur $\mathbb{R}$, $T_n(k)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(k)$.

Appli 28: Dans l'action de $GL_n(k)$ sur $\mathcal{M}_n(k)$ par conjugaison, on a A diagonalisable ssi son orbite est fermée, et nilpotente ssi son orbite contient 0 dans son adhérence.

III Familles d'endomorphismes diagonalisables.

1) Codiagonalisabilité.

[Gou] 166.

Prop 29: Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent entre eux. Alors tout sous espace propre de f (en particulier Ker f) est g stable, de même que Im f.

Théo 30: Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{L}(E)$ diagonalisable et qui commute (deux à deux). Alors il existe une base de E formée de vecteurs propres pour tous les u_i (base de codiagonalisation).

Rq 31: La réciproque est vraie: des endomorphismes codiagonalisables commutent.

2) Lien avec les endomorphismes adjoints.

[Gou] 243.

On se place ici dans le cas où E est euclidien/hermitien.

Prop déf 32: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(E)$, dit adjoint de f, et tel que $\forall x, y \in E$, $(f(x), y) = (x, f^*(y))$.

Rq 33: Si A est la matrice de f dans une base orthonormée de E, $A^* = {}^t\bar{A}$ est la matrice de f^* dans cette base.

Ex 34: Dans la base $(2e_1, e_2)$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ traduit un morphisme dont l'adjoint a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$ dans cette même base.

Def 35: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est normal si $f^*f = ff^*$ et autoadjoint si $f = f^*$, et orthogonal (hermitien) si $f^* = f^{-1}$.

[Gou1] 264 265

Prop 36 : Soit $F \subseteq E$ un espace f stable, alors $F^\perp$ est f^* stable.

Théo 37 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint, alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f, de plus les valeurs propres de f sont réels.

Appli 38 : Soit q une forme quadratique (hermitienne), alors il existe une base orthogonale pour q et orthonormée.

Lemme 39 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ normal, alors pour $\lambda \in Sp(f)$, $E_\lambda^\perp$ est f stable.

[Gou1] 256 260

Théo 40 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre

(i) f est normal

(ii) f se diagonalise dans une base orthonormale de E

(iii) f et f^* sont codiagonalisables.

Théo 41 : Soit E euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthogonale de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_n & & \\ & & & \tau_1 & \\ 0 & & & & \ddots \ \tau_r \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. DVP

Appli 42 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal et E euclidien, les blocs τ_j sont de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $\lambda_i \in \{\pm 1\}$.

Rq 43 : Dans le cas complexe, on trouve une mat diagonale avec des $e^{i\theta}$.

IV. Applications, généralisations.

1) Endomorphismes semi simples.

Déf 44 : Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit semi simple si tout sous espace F f stable admet un supplémentaire f-stable.

Théo 45 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre

- f est semi simple.
- Π_f est sans facteurs carrés
- $\exists L$ extension de k dans laquelle Π_f est simplement scindé
- $\exists L$ extension de k telle que $Mat_B(f)$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(L)$.

Ex 46. Les rotations de $\mathbb{R}^2$ sont semi simples

Si k algébriquement clos, semi simple $\Rightarrow$ diagonalisable.

2) Décomposition de Dunford.

[Gou1] 194 195.

En pratique, les résultats intervenant sur la réduction sont inaccessibles aux endomorphismes non diagonalisables, on cherche donc à décomposer un endo en des endo réductibles.

Prop 47 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $P \in k[X]$ annulateur de f, $P = M_1^{\alpha_1} \dots M_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en facteurs irréductibles, on pose $N_i = \operatorname{Ker} M_i^{\alpha_i}(f)$. On a $E = \bigoplus N_i$ et les projecteurs parallèlement à cette décomposition sont des polynômes en f.

Théo 48 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique couple $d+n$ d'endom qui commutent avec $d+n = f$, d semi simple et n nilpotent. De plus, d et n sont des polynômes en f. DVP

Appli 49 : Si $A = D + N$ est une décompo de Dunford, $e^A = e^D e^N$ permet de calculer les exponentielles de matrices plus simplement.

[Dem]

Appli 50 : Soit $Y' = AY$ un système différentiel linéaire, alors les solutions sont de la forme $e^{tA} V_0$. Et les propriétés de stabilité des solutions se lisent sur les valeurs propres de A.

3) Applications : suites récurrentes.

[Gri] 169

Soit (u_n) une suite récurrente d'ordre k définie par

$$u_{n+k} = a_{k-1} u_{n+k-1} + \dots + a_0 u_n. \ \forall n \geq 0.$$

On peut réécrire cette récurrence sous la forme MU_n avec M une matrice compagnon.

Donc M est diagonalisable si et seulement si $P = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_0$ est scindé. On a alors

$$U_n = M^n U_0 = PD^n P^{-1} U_0$$

ce qui permet d'exprimer U_n en fonction de n.