154 Sous espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Réf : [OA] Beck Malick Peyré. Objectif Agrégation [Gou1] Gourdon Algèbre. [Per] Perrin, Cours d'Algèbre.

Dév :
34 Dunford [Gou1]
39 Cotrigonalisation [Gou1]
42 Burnside [FGN1]
55 Endomorphismes nilpotents [Gou1]

Cadre : On fixe k un corps. E un k-espace vectoriel de dimension finie ($n\geq 2$), $F\leq E$ un sous espace de dimension r, $u,v\in\mathcal{L}(E)$.

I. Généralités sur les sous espaces stables.

1) Sous espaces stables, endomorphismes induits, bases adaptées.

[OA] 158 159

Déf 1 : On dit que F est stable par u (ou u-stable) si $u(F)\subseteq F$.

Prop 2 : Le noyau et l'image de u sont des espaces u-stables. De même que ses espaces propres.

Prop 3 : Si k est algébriquement clos, u admet des droites stables, (car u admet des valeurs propres). Si $k=\mathbb{R}$, u admet au moins une droite ou un plan stable.

Déf 4 : Si F est u stable, alors u induit deux endomorphismes $u_{|F}\in\mathcal{L}(F)$ et $\bar{u}\in\mathcal{L}(E/F)$ obtenu par passage au quotient.

$$\begin{array}{ccccc} F & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{\pi} & E/F \\ \downarrow u_{|F} & & \downarrow u & & \downarrow \bar{u} \\ F & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{\pi} & E/F \end{array}$$

(noyau et conoyau).

Prop 5 : Si $B=(e_1\dots e_n)$ est une base de E adaptée à F ($B_F=(e_1\dots e_r)$ est une base de F). En notant $B'=(e_{r+1}\dots e_n)$. Alors si F est u stable la matrice de u dans la base B est de la forme $\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}$. De plus, $\pi(B')$ est une base de E/F, et on a

$$Mat_{B_F}(u_{|F})=A \qquad Mat_{\pi(B')}(\bar{u})=B.$$

Enfin, le polynôme caractéristique de u sur k est le produit de ceux de $u_{|F}$ et $\bar{u}$.

Rq 10 : Bien sûr, la réciproque est vraie au sens où un endomorphisme ayant une matrice triangulaire par blocs dans une base bien choisie possède un sous espace u stable.

Cor 11 : Sous les hypothèses de la proposition 5. On a que u est nilpotent si et seulement si $u_{|F}$ et $\bar{u}$ sont nilpotents. En revanche, u_F et $\bar{u}$ peuvent être nuls sans que u le soit. Enfin, χ_u est irréductible si et seulement si u n'admet pas de sous espace stable non trivial. (si $\dim E\geq 2$).

[Gou2] 214

Prop 12 : Si $w=uv-vu$ est de rang 1, alors χ_u n'est pas irréductible sur $k[X]$.

[OA] 159

En pratique, il peut être ardu d'exhiber des sous espaces stables, ou encore de prouver qu'un sous espace est stable, des hypothèses de commutativité peuvent nous y aider.

Prop 13 : Si u et v commutent, alors le noyau et l'image de v sont stables par u.

Prop 14 : Soit $P\in k[X]$, le noyau de $P(u)$ est u stable, ainsi, les espaces caractéristiques de u sont u stables.

[Per]

Prop 15 : Si $u\in GL(E)$ laisse toute droite stable, alors u est une homothétie : $(\forall x\ \exists\lambda \mid u(x)=\lambda x) \Rightarrow (\exists\lambda\mid\forall x\ u(x)=\lambda x)$ si $u\in GL(E)$.

2) Sous espaces stables et dualité

[Gou1] 128 130

Il y a une liaison remarquable entre la notion d'orthogonalité (au sens des formes linéaires) et la stabilité.

Déf 16 : On dit que $\varphi\in E^*$ et $x\in E$ sont orthogonaux si $\langle\varphi,x\rangle=\varphi(x)=0$.
Pour $A\subseteq E$, on pose $A^\perp=\{\varphi\in E^*\mid\varphi_{|A}=0\}$, on a $A^\perp\leq E$.
Pour $B\subseteq E^*$, on pose $B^o=\{x\in E\mid\varphi(x)=0\ \forall\varphi\in B\}=\bigcap_{\varphi\in B}\operatorname{Ker}\varphi$, on a $B^o\leq E^*$.

Déf 15 : Si $f:E\to G$ est une application linéaire, en posant ${}^tf(\varphi)=\varphi\circ f$. On obtient une application linéaire $G^*\to E^*$, appelée application transposée de f.

Prop 16 : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, on a que F est u stable si et seulement si $F^\perp$ est ${}^tu$-stable.

Rq 17 : Dans le cas où E est euclidien, ce résultat s'adapte pour donner des espaces u^* stables.

Appl 18 : Si $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est l'endom associé alors les sous espaces stables de f sont $\{0\}$, $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$, $\mathbb{R}^3$.

II. Applications à la réduction.

1) Lemme des noyaux et conséquences.

Prop/déf 19 : Pour $u\in\mathcal{L}(E)$, l'ensemble $\{P\in k[X]\mid P(u)=0\}$ est un idéal de $k[X]$, le générateur unitaire de cet idéal est noté μ_u le polynôme minimal de u.

[OA] 162 164

Prop 20 : Si $E = F \oplus G$ se décompose en somme directe de sous espaces u-stables, alors $\mu_u = \mathrm{ppcm}(\mu_{u_{|F}}, \mu_{u_{|G}})$.

Prop 21 : (Lemme des Noyaux) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $P = P_1 \dots P_r \in k[X]$, les polynômes P_i étant premiers entre eux, Alors $\mathrm{Ker}\, P(u) = \bigoplus_{i=1} \mathrm{Ker}\, P_i(u)$.

Cor 22 : L'espace E se décompose en somme directe des espaces caractéristiques de u.

Cor 23 : Avec les notations de la proposition 21, si F est u stable, alors F est somme directe des $F \cap \mathrm{Ker}\, P_i$.

Ex 24 : L'endomorphisme associé à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ a exactement 9 sous espaces stables.

[OA] 168 167

Théo 25 : On a équivalence entre.
(i) u est diagonalisable (ii) u laisse n droites indépendantes stables,
(iii) u annule un polynôme scindé à racines simples
(iv) Le polynôme minimal μ_u est scindé à racines simples.

Ex 26 : Si $\mathrm{car}(k) \neq 2$, les involutions sont diagonalisables.

Ex 27 : Les endomorphismes nilpotents non nuls ne sont jamais diagonalisables.

Ex 28 : Si $k = \mathbb{F}_q$ est un corps fini, u est diagonalisable si et seulement si $X^q - X$ annule u.

Théo 29 : On a équivalence entre
(i) u est trigonalisable (ii) Il existe un drapeau complet d'espaces u stables
(iii) χ_u est scindé (iv) μ_u est scindé, (v) u annule un polynôme scindé.

Ex 30 : Si k est algébriquement clos, tout endomorphisme est diagonalisable.

Rq 31 : On appelle drapeau complet une suite croissante de n sous espaces de E de dimension strictement croissante.

Appli 32 : Les sous espaces stables de $\mathrm{diag}(1, 2, \dots n)$ sont exactement les $\mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}$ où $I \in \mathcal{P}([\![1, n]\!])$.

[Gou] 194

Prop 33 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in k[X]$ annulateur de u. Pour $F = \lambda M_1^{\alpha_1} \dots M_s^{\alpha_s}$ la décomposition de F en produit de polynômes irréductibles. Pour $i \in [\![1, s]\!]$, on pose $N_i = \ker M_i^{\alpha_i}(u)$. On a alors $E = N_1 \oplus \dots N_s$ et les projecteurs pour cette décomposition sont des polynômes en f.

[Gou] 195

Théo 34 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est tel que μ_u soit scindé sur k, il existe un unique couple (d, n) de $\mathcal{L}(E)$ tel que

DVP

- d soit diagonalisable, et n nilpotent.
- $u = d + n$ $dn = nd$

De plus, d et n sont des polynômes en u.

($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Prop 35 : Si $u = d + n$ est la décomposition de Dunford de u, et r l'indice de nilpotence de n, alors $\exp(u) = \exp(d) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{n^k}{k!}$. La décomposition de Dunford de $\exp(u)$ est alors donnée par $\exp(d) + \exp(d)\left(N + \frac{N^2}{2} + \dots + \frac{N^{r-1}}{(r-1)!}\right)$

Appli 36 : Pour $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, u est diagonalisable si et seulement si $\exp(u)$ l'est.

2) Réduction simultanée.

[Gou] 166

Prop 37 : Si u et v commutent, alors tout sous espace propre de u est v-stable.

Théo 38 : Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille d'endomorphismes de E qui commutent deux à deux. Si les u_i sont diagonalisables, il existe une base commune de diagonalisation des (u_i).

Théo 39 : Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de $\mathcal{L}(E)$ commutative d'endomorphismes trigonalisables, alors il existe une base de trigonalisation commune des (u_i).

DVP

[OA] 167, 206

Appli 40 : On a $Gl_n(k) \simeq Gl_m(k)$ si et seulement si $n = m$.

Appli 41 : Si $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont diagonalisables, alors l'endomorphisme $\Phi_{UV} : M \mapsto UM - MV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

[FGN1] 185

Théo 42 (Burnside) Tout sous groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est un groupe fini

DVP

Per

Théo 43 : Si G est le groupe des quaternions d'ordre 1, alors on a un isomorphisme de groupes $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$

Appli 44 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur lequel on considère l'action de $Gl_n(\mathbb{C})$ par automorphismes intérieurs.
- M est nilpotent ssi son orbite contient 0 dans son adhérence
- M est diagonalisable ssi son orbite est fermée.

III. Endomorphismes remarquables.

1) Endomorphismes semi simples.

[OA] 160

Def 44 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit semi simple si, pour tout sous espace F de E stable par u, il existe un supplémentaire de F stable par u.

Ex 45 Un endomorphisme diagonalisable est semi simple.

Théo 46 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi simple si et seulement si son polynôme minimal est sans facteurs carrés. C'est encore équivalent à dire que u est diagonalisable (comme matrice) dans une extension de $\mathbb{K}$.

Appli 47 : Un endomorphisme nilpotent non nul n'est jamais semi simple.

Appli 48 : Si u est semi simple et $F \subseteq E$ est un sous espace u-stable. Alors les endomorphismes induits définis à la def 4 sont eux aussi semi-simples. (la réciproque est fausse).

Appli 49 : Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique couple (s,n) d'endomorphisme qui commute, avec $u = s+n$, s semi simple et n nilpotent.

2) Endomorphismes normaux.

[Gou] 258.

Dans le cas où E est un espace préhilbertien, on a un isomorphisme explicite entre E et E^*, qui associe u à u^* l'adjoint de u.

Def 50 : On dit que u est normal si u commute avec son adjoint.

Ex 51 : Les endomorphismes autoadjoints et orthogonaux (unitaires) sont des exemples d'endomorphismes normaux.

Prop 52 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal, et si E_λ est un espace propre pour u alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Théo 53 : Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre (si E est hermitien).

(i) u est normal

(ii) u se diagonalise dans une base orthonormale de E

(iii) u et u^* sont codiagonalisables, dans une base orthonormée.

Dans le cas des matrices réelles, des blocs de taille 2×2 vont apparaître.

[Gou] 259

Prop 54 : Si E est euclidien de dimension 2, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal sans valeur propre réelle. Dans toute base B orthonormée de E, la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $a,b \in \mathbb{R}$.

Théo 55 : Si E est euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal, alors il existe une base orthonormale B de E dans laquelle la matrice de u a la forme.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_i \in \mathbb{R} \quad i \in [\![1,r]\!]$$

$$\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \quad \forall j \in [\![1,s]\!].$$

DVP

3) Endomorphismes cycliques, réduction de Frobenius.

[Gou] 284 290

Def 56 : On dit que u est cyclique s'il existe une base de E de la forme $(u^i(x))_{i \in [\![0,n-1]\!]}$. Dans la base en question, la matrice de u est alors une matrice compagnon. le polynôme minimal de u est alors égal à son polynôme caractéristique qui est le polynôme associé à la matrice.

Théo 57 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une suite $F_1, F_2, \dots, F_r$ de sous espaces de E tous u stables, telle que

- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$
- Pour $i \in [\![1,r]\!]$, la restriction $u_i := u_{|F_i}$ de u à F_i est un endomorphisme cyclique.
- Si μ_i est le polynôme minimal de u_i, on a $\mu_{i+1} | \mu_i$ pour $i \in [\![1, r-1]\!]$

La suite des polynômes $\mu_1 \dots \mu_r$ ne dépend que de u, on l'appelle suite des invariants de similitude de u.

Cor 58 (Réduction de Frobenius) Si $P_1 \dots P_r$ est la suite des invariants de similitude de $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base B de E telle que

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & C(P_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & C(P_r) \end{pmatrix}$$

On a d'ailleurs $P_1 = \mu_u$ et $\prod P_i$ est le polynôme caractéristique de u.

$C(P_i)$ = mat compagnon