153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Refs : [Gou1] Gourdon Algèbre [OA] BMP, Objectif agrégation

[FGNAlg2] Oraux X-ens, Algèbre 2.

[OVP1] : Théo 30 (Burnside)
Théo 35 (Dunford)
Théo 40 (réduction endo normaux)

Cadre K un corps (commutatif), E un K-ev de dimension finie $u \in \mathcal{L}(E)$.

I. Polynômes d'endomorphismes.

1) L'algèbre $K[u]$

[Gou1] 174 175

Def 1 : Si $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i \in K[X]$, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit $P(u) = a_0 I_d + a_1 u + \dots + a_p u^p \in \mathcal{L}(E)$.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on définit $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p \in \mathcal{M}_n(K)$.

Prop 2 : L'application $K[X] \to \mathcal{L}(E)$ qui à P associe $P(u)$ est un morphisme de K-algèbre, on note $K[u]$ l'image de ce morphisme.

Ex 3 : Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $P(A) = \mathrm{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$ un polynôme en une matrice triangulaire est également une matrice triangulaire.

Rq 4 : Comme $K[X]$ est une algèbre commutative, c'est aussi le cas de $K[u]$: u commute en particulier avec les éléments de $K[u]$.

Prop 5 : Si $\lambda \in K$ est une valeur propre de u et si $P \in K[X]$ est tel que $P(u) = 0$, alors $P(\lambda) = 0$.

Théo 6 : (Lemme des noyaux) Soit $P = P_1 \dots P_k \in K[X]$, les polynômes P_i étant premiers entre eux deux à deux, alors
$$\mathrm{Ker}\, P(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\, P_i$$

2) Le polynôme minimal de u

[OA] 173

Prop 7 : Le morphisme d'évaluation $ev_u : K[X] \to \mathcal{L}(E)$ possède un noyau non trivial (dimension). Comme K est un corps, ce noyau est un idéal monogène, on note π_u son générateur unitaire le polynôme minimal de u.

Rq 8 : Le théorème d'isomorphisme dans les anneaux, on a
$$K[u] \simeq K[X]/(\pi_u).$$

Prop 9 : Si $\pi_u = P_1 \dots P_r$ est une décomposition de π_u en produit de facteurs premiers entre eux, on a par le lemme des restes chinois :
$$K[u] \simeq K[X]/(\pi_u) \simeq K[X]/(P_1) \times \dots \times K[X]/(P_r)$$

[OA] 161 163.

Ex 10 : Soit p un projecteur, alors $p^2 = p$ et $X(X-1)$ est annulateur de p. Comme p n'annulle pas de polynôme de degré 1, $X(X-1)$ est le polynôme minimal de p, on a alors
$$K[p] \simeq K[X]/(X) \times K[X]/(X-1).$$

Prop 11 : L'algèbre $K[u]$ est de dimension $\deg \pi_u$, avec une base donnée par $(I_d, u, \dots, u^{\deg \pi_u - 1})$.

Prop 12 - Si $F \leq E$ est stable par u, alors $\pi_{u_{|F}}$ divise π_u.
- Si $E = F_1 \oplus F_2$ est une décomposition en sous espaces stables par u, alors $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_{u_{|E_1}}, \pi_{u_{|E_2}})$

Prop 13 : Un scalaire $\lambda \in K$ est une racine de π_u si et seulement si c'est une valeur propre de u.

Cor 14 : L'endomorphisme u est inversible si et seulement si $\pi_u(0) \neq 0$.

Prop 15 : Pour $v \in GL(E)$, et $P \in K[X]$, on a $P(v u v^{-1}) = v P(u) v^{-1}$, en particulier deux endomorphismes semblables ont même polynôme minimal.

Ex 16 : La réciproque de ce résultat est fausse : $\mathrm{Diag}(1,2,2)$ et $\mathrm{diag}(1,1,2)$ on même pol min sans être semblable.

3) Polynôme caractéristique

[Gou2] 162

Def 17 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $K[X]$ défini par $\chi_A(X) := \det(XI_n - A)$.

Prop 18 : On a $\chi_A(0) = \det A$; $\chi_A = \chi_{A^T}$. Pour $P \in GL_n(K)$, on a $\chi_{PAP^{-1}} = \chi_A$.

Def 19 : Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit le polynôme caractéristique de u comme celui de sa matrice dans une base quelconque.

Prop 20 Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u.

Cor 21 : Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme admet une valeur propre.

Théo 22 (Hamilton Cayley) χ_u est annulateur de u. Par conséquent $\deg \pi_u \leq n = \deg \chi_u$ et $\pi_u \mid \chi_u$.

Ex 23 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si $\chi_u = X^n$.

[Gou2] 164

Appli 24 : Si λ est valeur propre de u, et m_λ la multiplicité de λ dans χ_u (multiplicité algébrique), on a $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda$ ($\dim E_\lambda u$ est la multiplicité géométrique de λ.

Ex 25 : $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ ont même pc mais ne sont pas semblables.

II. Polynômes d'endomorphisme : un outil pour la réduction.

1) Application à la diagonalisation.

[Gou1] 163

Def 26 : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres pour u. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Ex 27 : On a $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}1&-2\\0&-1\end{pmatrix}$ est diagonalisable.

[OA] p166

Prop 28 : Les assertions suivantes s'équivalent
(i) u est diagonalisable
(ii) Il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples
(iii) π_u est scindé à racines simples
(iv) χ_u est scindé et pour toute valeur propre de u, la multiplicité algébrique égale la multiplicité géométrique.

Ex 29 : Si p est un projecteur, p est annulé par $X(X-1)$ qui est simplement scindé il est diagonalisable.
Si s est une involution (symétrie), il est annulé par $X^2-1=(X-1)(X+1)$, on conclut de même.
L'endo $M \longmapsto {}^tM$ étant une symétrie, il est diagonalisable.

[FGNAl2] 171 DVP

Appli 30 (Burnside) Tout sous groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini

[Gou2] 166

Prop 31 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent, Alors tout espace propre (en part $\operatorname{Ker} f$) de f est stable par g, ainsi que $\operatorname{Im} f$.

Théo 32 (Diagonalisation simultanée) Si f et g sont diagonalisables et commutent, alors ils sont codiagonalisables (i.e diagon dans une même base).

Rq 33. La réciproque est évidemment vraie.

Ex 34 : $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ commutent mais ne sont pas codiago car le second n'est pas diago.

[Gou2] 260

Théo 35 (Réduction des endom normaux) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal (qui commute avec u^*) alors il existe une bon de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s\end{pmatrix}$$

où, pour $i \in [\![1,r]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et pour $j \in [\![1,s]\!]$ $\tau_j = \begin{pmatrix}a_j & -b_j\\ b_j & a_j\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

DVP

Appli 36 : Diagonalisation des matrices symétriques réelles.

2) Application à la trigonalisation.

[Gou1] 160

Def 37 On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice trig sup.

[OA] 166

Prop 38 : Les assertions suivantes s'équivalent
(i) u est trigonalisable
(ii) Il existe un polynôme annulateur scindé de u
(iii) π_u est scindé (iv) χ_u est scindé.

Rq 39 : Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

[Gou1] 195

Théo 40 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ annulant un polynôme scindé, il existe un unique couple (d,n) d'endomorphismes qui commutent, tel que $u=d+n$, d est diagonalisable, n est nilpotent. De plus, d et n sont des polynômes en u. DVP

[OA] 164

Ex 41 La décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$ n'est pas $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ car ses endom ne commutent pas, en fait $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$ est déjà diagonalisable, son polynôme caractéristique est simplement scindé.

III. Applications.

1) Calcul des puissances

Si P est annulateur de u, on divise X^k par P : $X^k = PQ+R$ où $\deg R < \deg P$.
En particulier, on choisit $\chi_u = P$ pour obtenir $u^k = R(u)$.

Ex 43: On cherche les puissances de $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $P=X^2-X-2$ est annulateur de A, on fait la div euclid de X^k par P : $X^k=PQ_k+R_k$ avec $R_k=\alpha_k X+\beta_k$ d'où $A^k=\alpha_k A+\beta_k$. En particulier, comme -1 et 2 sont vp, $(-1)^m=-\alpha_m+\beta_m$ et $2^m=2\alpha_m+\beta_m$ d'où $A^k=\frac{2^k+(-1)^{k+1}}{3}A+\frac{2^k+2(-1)^k}{3}I_n$

On peut aussi utiliser la décomposition de Dunford et le binôme de Newton car d et n commutent.

2) Calcul de l'inverse

[Gou 1] 186

Si A est inversible, alors $\chi_A=X^n+\dots+a_0$ où $a_0\neq 0$, donc

$$A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A=-a_0I_n$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{a_0}(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\dots+a_1)=A^{-1}$$

Ex 44: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, on a $A^2=A+2I$ donc $A(A-I_n)=2I$ et $\frac{1}{2}(A-I_n)=A^{-1}$.

Ex 45: $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $A^2=I_n$ donc $A^{-1}=A$.

3) Commutant.

[Gou 1] 181

Def 46: Pour $A\in\mathcal{M}_n(K)$, on appelle commutant de A (noté $C(A)$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ qui commutent avec A. De même pour $u\in\mathcal{L}(E)$. Il s'agit d'une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(K)$ (resp. de $\mathcal{L}(E)$).

Rq 47: On a vu que $K[A]\subseteq C(A)$

Théo 48: On a $C(A)=K[A]$ si et seulement si $\pi_A=\chi_A$.

~~**Prop 49**: Si A admet n valeurs propres distinctes, alors~~
~~- $C(A)$ est formé des matrices diagonal~~

4) Exponentielle de Matrices. $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

[Gou 1] 182-193 194

Def 49: Pour $A\in\mathcal{M}_n(K)$, on définit $\exp(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$, qui forme une série entière de rayon de convergence infinie.

Prop 50: Pour $P\in GL_n(K)$, on a $\exp(PAP^{-1})=P\exp A P^{-1}$!

Prop 51: $\exp(A)\in K[A]$, si A et B commutent, alors $\exp(A)$ et $\exp(B)$ aussi, avec de plus $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$.

Prop 52: Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(\exp A)=\exp(\mathrm{Tr}A)$.

Application 53: Résolution des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

La proposition 51 permet de se servir de la décomposition de Dunford dans le calcul de l'exponentielle de matrices!

Si $A=D+N$ est cette décomposition, alors $\exp(N)$ est une somme finie (car N est nilpotente) et $\exp(D)$ est calculée par diagonalisation :
$\exp(\mathrm{Diag}(\alpha_1\dots\alpha_n))=\mathrm{Diag}(e^{\alpha_1}\dots e^{\alpha_n})$.

Cette méthode n'est pas parfaitement efficace car la décomposition de Dunford peut être difficile à calculer.

Ex 54: $A=\begin{pmatrix}3&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$. Alors

$$\exp(A)=\begin{pmatrix}e^3&0\\0&e^3\end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}e^3&2e^3\\0&e^3\end{pmatrix}.$$