152 : Déterminant, exemples et applications.

Refs : [Gou1] Gourdon Algèbre, [Gou2] Gourdon Analyse
[Au] Tauvel Cours d'Algèbre, [Perr] Perrin, cours d'Algèbre.
[OA] BMP, Objectif agrégation, [Cald] Caldero, carnets de voyages en algébrie

Dev :
Applic 3 (Diff du det)
Applic 44 (prop topo de $GL_n(\mathbb{C})$).

On fixe K un corps, A une K-algèbre commutative unitaire intègre, M un A-module libre de rang n.

I. Formes multilinéaires et déterminant.

[Gou1] 134 136

1) Formes multilinéaires.

Def 1 : Une application $M^p \longrightarrow A$ est dite p-linéaire si en tout point ses p applications partielles $M \to A$ sont linéaires (si $p=2$, on parlera de forme bilinéaire). On note $\mathcal{L}_p(M)$ l'ensemble de ces formes.

Ex 2 : Si $M^* := \mathrm{Hom}_A(M,A)$, alors l'application $M^* \times M \to A$ qui à (l,x) associe $l(x)$ est bilinéaire.

[Cald] 187 –

Lemme 3 : $\mathcal{L}_p(M)$ est un A module libre de rang n^p.

Def 4 : Soit $f \in \mathcal{L}_p(M)$. On dit que f est
- alternée si : $f(x_1,\dots,x_p) = 0$ sitôt que $x_i = x_j$ pour un $i \neq j$
- antisymétrique si : $f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1,\dots,x_p)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.

[Perr] 119

Prop 5 : Une forme alternée est toujours antisymétrique, la réciproque est vraie si la caractéristique de A n'est pas égale à 2.

Ex 6 : Si $A = K = \mathbb{F}_2$, le produit scalaire usuel sur $\mathbb{F}_2$ est symétrique donc antisymétrique sans être alterné.

Théo 7 : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur M est un A-module libre de dimension 1, avec un isomorphisme avec A donné par $f \longmapsto f(e_1,\dots,e_n)$ où $B = (e_1,\dots,e_n)$ est une base de M.

Si $x_1 \dots x_n$ est une famille de n vecteurs, avec $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_j$ on obtient

$$f(x_1,\dots,x_n) = f(e_1 \dots e_n) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)}$$

2) Déterminant associé à une base.

On fixe B une base de M.

Def 8 : On appelle déterminant de la base B l'unique forme n-linéaire alternée sur M valant 1 sur B, on le note $\det_B$.

Prop 9 : Si B et B' sont deux bases, on a $\det_{B'}(-) = \det_{B'}(B) \det_B(-)$

Théo 10 : Si $x_1 \dots x_n$ est une famille de M, on a équivalence entre
- $x_1 \dots x_n$ est liée
- $\det_B x_1 \dots x_n = 0$ pour toute base B
- $\det_B x_1 \dots x_n = 0$ pour une certaine base B.

3) Déterminant d'un endomorphisme.

Def 11 : Soit u un endomorphisme de M, on pose $\det_B(u)$ le déterminant de la famille $u(e_1),\dots,u(e_n)$.

Prop 12 : Si u et v sont deux endomorphismes, alors on a pour toute base que $\det_B(uv) = \det_B u \det_B v$.

Cor 13 : Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a u inversible si et seulement si $\det_B u$ l'est, le déterminant de u ne dépend pas de la base choisie.

Cor 14 : Si $A = K$, on déduit que $\det : GL(E) \to K^*$ est un morphisme et donc $SL(E) \trianglelefteq GL(E)$.

4) Déterminant d'une matrice carrée.

Def 15 : Soit $M = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(A)$, on appelle déterminant de M le déterminant des vecteurs colonnes de M dans la base canonique de A^n, on le note $\det A$, avec

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

on le notera éventuellement $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Prop 16 : Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(A)$, on a $\det(MN) = \det M \det N = \det(NM)$.

Ex 17 : On a $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Prop 18 : On a $\det M = \det {}^tM$. Si A est la matrice d'un endomorphisme f dans une base, alors $\det A = \det f$. On en déduit que $M \in GL_n A$ si et seulement si $\det M \neq 0$.

Rq 19 : Ce résultat sera retrouvé dans la partie suivante

II Quelques méthodes de calcul.

1) Simplifications, cas triangulaire.

Certaines propriétés du déterminant nous permettent de construire certaines règles de calcul :

[Gou1] 136 137

- Appliquer une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ aux colonnes (ou lignes) de M multiplie le déterminant de M par $\varepsilon(\sigma)$.
- On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une ligne (colonne) une combinaison linéaire des autres.

Prop 20 : Si A est triangulaire, $\det A$ est le produit des éléments diagonaux. Plus généralement, si $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire par blocs, alors $\det M = \det X \det Z$.

Cor 21 : On peut calculer de manière effective le déterminant d'une matrice avec l'algorithme de Gauss : multiplication à gauche par des matrices de transvections, dilatations, et transposition. cf fig 1.

Ex 22 : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

2) Mineurs, mineurs principaux, cofacteurs.

[Tau] 194 196

Def 23 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(A)$, avec $n \geq 2$.
(i) On appelle mineur relatif à m_{ij} le déterminant de la sous matrice $M_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(A)$ obtenue en supprimant la $i$ème ligne et la j-ème colonne de M.
(ii) On appelle cofacteur de a_{ij} le scalaire $(-1)^{i+j} \det M_{ij}$.

Théo 24 : Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(A)$, si $1 \leq i,j \leq n$, on note M_{ij} le cofacteur de a_{ij}. On a alors

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}, \quad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \quad \text{pour } i,j \in [\![1,n]\!].$$

Ce sont respectivement les développements du det par rapport à la $j$ème colonne (resp suivant la $i$ème ligne).

Ex 25 : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$

Def 26 : La matrice des cofacteurs $(A_{ij})_{ij}$ est appelée la comatrice de A. On la note $\mathrm{com}(A)$.

[Tau] 194 196

Prop 27 : Pour $M \in \mathcal{M}_n(A)$, on a $M\,{}^t\mathrm{com} M = {}^t\mathrm{com} M\, M = \det M\, I_n$. En particulier, M est inversible si et seulement si $\det M$ l'est, avec $M^{-1} = \det M^{-1}\, {}^t\mathrm{com} M$.

Ex 28 : Ce n'est pas utilisé pour des calculs pratiques, à part pour $n=2$.

3) Déterminants particuliers.

[Tau] 197 198

Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \dots, x_n \in A$, avec $n \geq 2$, On note $V(x_1 \dots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Alors $V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Appli 29 Polynômes de Lagrange.

Déterminant circulant. Pour $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $n \geq 2$, $\xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, On a

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{q=0}^{n-1} a_q \xi^{qk} \right).$$

[Gou1] 143

Déterminant de Cauchy Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots b_n \in K$, avec $a_i + b_j \neq 0 \ \forall i,j$. Alors

$$\det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{i,j} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n} (a_i + b_j)}.$$

III Applications du déterminant.

1) Système linéaire.

[Gou1] 138

On considère (S) le système linéaire $MX = B$ avec $M \in \mathcal{M}_n(A)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(A)$. Ce système admet une unique solution si et seulement si $\det M \neq 0$. Les composantes de la solution sont alors données par

[Gou1] 138

$$x_i := \frac{\det(A_1,\dots,A_{i-1},B,A_{i+1},\dots,A_n)}{\det A} \qquad i\in[\![1,n]\!]$$

A_k est la k-ème colonne de A

Ce sont les formules de Cramer.

Exemple 30 Le système $\begin{cases} 2x+y-z=\alpha \\ y+3z=\beta \\ 2x+y+2z=\gamma \end{cases}$ admet pour solution $x=\frac{\alpha+3\beta-4\gamma}{-6}$ $y=\alpha+\beta-\gamma$ $z=-\alpha/3$.

2) Polynôme caractéristique.

[Gou1] 162, 177

Def 31 : Soit $M\in\mathcal{M}_n(K)$, on considère la matrice $M-XI_n\in\mathcal{M}_n(K[X])$, on pose $\chi_M(X):=\det(M-XI_n)$ le polynôme caractéristique de M.

Rq 32 : $\det M=\chi_M(0)$.

Prop 33 : Un élément $\lambda\in K$ est une valeur propre de M si et seulement si $\chi_M(\lambda)=0$

Théo 34 (Cayley Hamilton). Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Théo 35 : La matrice M est trigonalisable si et seulement si χ_M est scindé, en particulier toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

[Tau] 290

Propdef 36 : Pour tout $P\in K[X]$ unit., on définit C_P la matrice compagnon (cf Fig 2)

On a alors $\chi_{C_P}=P$.

3) Géométrie, mesures

[OA] 184

Soient $v_1,\dots,v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, posant $P(v_1,\dots,v_n)$ le parallélépipède engendré par les $v_1,\dots,v_n$; alors

$$\lambda_n(P(v_1,\dots,v_n))=\det(v_1,\dots,v_n)$$ où λ_n est la mesure de Lebesgue

Théo 37 (Changement de variables)

Soit $U\subseteq\mathbb{R}^n$ un ouvert et $\varphi:U\to\mathbb{R}^n$ injective et différentiable sur U. Alors $V=\varphi(U)$ est mesurable. Et pour $f\in L^1(V)$, on a

$$\iint_V f\,d\lambda=\int_U f\circ\varphi\times|J\varphi|\,d\lambda$$

Appli 38 Calcul de l'intégrale de Gauss en coordonnées polaires.

[Gou1] 263

Def 39 : Soit E un espace préhilbertien (réel ou complexe). Si $x_1,\dots,x_n$ est une famille de E, on note matrice de Gram la matrice $(\langle x_i,x_j\rangle)_{i,j}$ son déterminant est noté $G(x_1,\dots,x_n)$.

Prop 40 : Si $(v_1,\dots,v_m)$ est une base de $V\leq E$ et $x\in E$, alors

$$d(x,V)=\frac{G(v_1,\dots,v_m,x)}{G(v_1,\dots,v_m)}$$

[Gou2] 286

Appli 41 : (Müntz) Si (α_n) est une suite strictement croissante positive, alors $\mathrm{Vect}((x^{\alpha_n})_n)$ est dense dans $(C([0,1]),\|\cdot\|_2)$ si $\sum\frac{1}{\alpha_n}=+\infty$.

4) Régularité du déterminant

[Gou2] 313

Prop 42 : L'application qui à une matrice associe son déterminant est polynomiale en ses coordonnées, il s'agit en particulier d'une application de classe C^∞.

[Col] [OA] 155

Appli 43 : La différentielle du déterminant est donnée par

$\forall M,H\in\mathcal{M}_n(K)$ $D_{\det}^{(M)}(H)=\det(M)\,\mathrm{Tr}(M^{-1}H)$. DVP

Appli 44 : L'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert connexe dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. DVP

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ i \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & & \lambda \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\lambda \in A$ $i \neq j$

$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Transvection

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & i & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dilatation $\lambda \in A$

$L_i \leftarrow \lambda L_i$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & 1 & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$i \neq j$ Transposition

$L_i \leftrightarrow L_j$

Figure 1

$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$.

$$C_P := \begin{pmatrix} 0 & & & -a_{n-1} \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & & 1 & -a_0 \end{pmatrix}$$

Fig2.