151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie) Rang. Exemples et applications.

Refs: [Gou1] Gourdon, Algèbre [Gou2] Gourdon, Analyse
[Gri] Grifone, Algèbre linéaire. [Per] Perrin, Cours d'Algèbre
[Esc] Escofier Th. de Galois [Cal3] Calais, Extension corps, Th de Galois

Dev: Réduction des endo autoadjoints (Théo 16)
Théorème des extrema liés. (Appl 29)

On fixe k un corps et E un k-espace vectoriel

I. Bases, dimension

1) Familles libres, génératrices, bases

[Gou1] p109 110

Def 1: Une famille F de vecteurs de E est dite
- Génératrice si $\mathrm{Vect}\, F = E$
- Libre si toute combinaison linéaire nulle finie est triviale
- Une base si elle est libre et génératrice

On dit que E est de dimension finie si il admet une famille génératrice finie (il est dit de dimension infinie dans le cas contraire)

On supp E de dim $<\infty$ à partir d'ici.

Théo 2: Si E est de dimension finie, G une famille génératrice finie et $L \subseteq G$ une famille libre, alors il existe une base B de E avec $L \subseteq B \subseteq G$.

Rq 3: Ceci entraine que tout espace vectoriel de dimension finie admet des bases, que toute famille libre se complète en une base, et que toute famille génératrice se restreint en une base.

Rq 4: Ce théorème reste vrai en dimension infinie mais sa preuve fait appel à l'axiome du choix.

Théo 5 / Def: Toutes les bases de E ont le même cardinal, on appelle ce cardinal la dimension de E, notée $\dim_k E$ ou $\dim E$. Avec la convention $\dim_k\{0\} = 0$.

Ex 6: La dimension, et même sa finitude, dépend du corps k: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1 \neq \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, on a même $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}) = \infty$

[Gri] p.19

Prop 7: Soit $F \leq E$ un sous-espace de E, F est de dimension finie, avec
- $\dim_k F \leq \dim_k E$
- $\dim_k F = \dim_k E \Leftrightarrow E = F$

Dans la suite, on suppose $n := \dim_k E$

2) Théorie de la dimension finie, supplémentaires

Prop 8: Soit F une famille de E, on a
- F libre $\Rightarrow \mathrm{card}(F) \leq n$
- F génératrice $\Rightarrow \mathrm{card}(F) \geq n$
- F génératrice ou libre de cardinal $n \Rightarrow F$ base.

Prop 9: Toute base de E induit un isomorphisme $E \simeq k^n$.

Cor 10: La classe d'isomorphie d'un k-espace vectoriel de dimension finie est caractérisée par sa dimension

[Gou1] p112.

Prop 11: Soient E_1, E_2 deux sous-espaces de E, on a
$$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$$

Cor 12 / Def: Avec les notations de prop 11, on a équivalence entre
- $E = E_1 \oplus E_2$
- $E_1 \cap E_2 = 0$ et $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$
- $E = E_1 + E_2$ et $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$

On dit alors que E_2 est un supplémentaire de E_1 dans E.

Prop 13: Tout sous-espace de E admet un supplémentaire, isomorphe au quotient de E par ce sous espace

[Gri] p66

Ex 14: Par choix d'une base, on a $\mathcal{L}(E,F) \simeq \mathcal{M}_{m,n}(k)$ si F est de dimension m. En particulier, c'est un espace de dimension mn finie. On a aussi $E \simeq E^*$ par ceci

[Gri] p87

Ex 15: Soit $F \leq E$, on pose
$$F^0 = \{ f \in E \mid f(F^0) = \{0\} \}$$
il s'agit d'un sous espace de E^*, avec $\dim F^0 + \dim F = n$.

DVP [Gou1]

Théo 16: (Réduction des endomorphismes autoadjoints)
Si E est euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Alors f se diagonalise sur une b.o.n, et ses valeurs propres sont réelles.

II. Rang.

1) Rang d'une application linéaire

[Gri] 59

Def 17 : On définit le rang d'une famille de vecteurs comme la dimension de leur espace vectoriel engendré. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, on définit le rang de f comme $rg(f) := \dim_k(\mathrm{Im}(f))$.

Lem 18 : Pour $f : E \to F$ une application linéaire, les ensembles $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sous espaces vectoriels, respectivement de E et de F.

[Gri] 62.

Théo 19 : Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $\mathrm{Im} f$ est de dimension finie, avec

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + rg f$$

En particulier, $E/_{\mathrm{Ker} f} \simeq \mathrm{Im} f$.

Cor 20 : Soit $f : E \to E$ un endomorphisme, on a équivalence entre

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

Exemple 21 : L'application d'évaluation en $n+1$ points $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ est injective donc bijective, d'où existence et unicité des polynômes d'interpolation de Lagrange.

[Gri]

Ex 22 : Ce dernier résultat est faux en dimension infinie, la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ est linéaire surjective mais pas injective.

2) Rang d'une matrice

[Gri] 90.91

Def 23 : Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$, on appelle rang de A, noté $rg(A)$ le rang de la famille de ses vecteurs colonnes

Prop 24 : Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$ est la matrice d'une application linéaire f, alors

$$rg A = rg f$$

Prop 25 : Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$, on a

$$rg A = rg\, {}^tA$$

Le rang d'une matrice est donc aussi celui de ses vecteurs lignes.

[Gou1] 121 122

Ex 26 : Le groupe $GL_m(k) \times GL_n(k)$ agit sur $\mathcal{M}_{m,n}(k)$ par

$$(M,N).A = M^{-1}AN$$

deux matrices dans la même orbite sont dites équivalentes, les orbites sont caractérisées par le rang de A.

Le dernier résultat permet de calculer le rang en pratique grâce au Pivot de Gauss :

Ex 27 : $$rg \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Théo 28 : Le rang d'une matrice est la taille de son plus grand mineur non nul

[Gou2] p.317

DVP

Appl 29 : Soient $f, g_1 \dots g_r : U \to \mathbb{R}$ des fonctions C^1, où $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert. On pose

$$\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) \dots g_r(x) = 0\}.$$

Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes $dg_{1a} \dots dg_{ra}$ sont libres dans $(\mathbb{R}^n)^*$, alors df_a est un élément de $\mathrm{Vect}(dg_{1a} \dots dg_{ra})$, les coefficients de la combinaison linéaire sont les "multiplicateurs de Lagrange".

III Lien avec les extensions de Corps.

[Perr] 65.67

Def 30 : On appelle extension de corps de k tout corps L muni d'un morphisme de corps $k \to L$

Rq 31 : Comme tout morphisme de corps est injectif, cette définition traduit bien une 'inclusion' $k \hookrightarrow L$.

Prop-def 32 : Toute extension de k est un k-espace vectoriel, dont la dimension est appelée le degré de L sur k, noté $[L:k]$.

Théorème 33 : Soit $k \hookrightarrow L \hookrightarrow M$ des extensions avec $(e_i)_{i \in I}$ une k-base de L et $(f_j)_{j \in J}$ une L-base de M, alors la famille

$$(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J}$$

est une base de M sur k

[Perr]
65.67

Cor 34 : Avec les notations précédentes, si les degrés sont finis, on a
$$[M:k]=[M:L][L:k].$$

Ex. 35 : $[\mathbb{C}:\mathbb{R}]=2$, $[\mathbb{F}_{p^n}:\mathbb{F}_p]=n$.

Def 36 : Si $k \hookrightarrow L$ est une extension, on dit que $A \subseteq L$ engendre L sur k si L est le plus petit sous corps de L contenant k, on écrit alors $k(A)=L$.
On dit que L est monogène si elle est engendrée par un singleton.

Si $k \hookrightarrow L$ est une extension, $\alpha \in L$, on a un morphisme d'anneaux
$$ev_\alpha : k[X] \longrightarrow L$$
$$P \longmapsto P(\alpha)$$

Def 37 : On dit que α est algébrique si ce morphisme n'est pas injectif et transcendant sinon. Le polynôme engendrant $\ker ev_\alpha$ est le polynôme π_α

Prop 38 : Si $k \hookrightarrow L$ est une extension, avec $\alpha \in L$, alors α est algébrique si et seulement si l'extension $k(\alpha)$ est de degré fini, ce degré est égal à $\deg \pi_\alpha$

Ex 39 : Pour $d \in \mathbb{N}$ avec $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, alors $[\mathbb{Q}(\sqrt{d}):\mathbb{Q}]=2$.