150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Ref : [H2G2] Caldero Germoni, tome 1 [OA] Beck Malick Peyré Objectif Agrégation
[Gou] Gourdon Algèbre. [Per] Perrin Cours d'Algèbre. [Rou] Rouvière Petit guide de calcul différentiel.
[MT] Mneimné Testard Groupes de Lie classiques.

Devs : 43 Burnside [FGN]
49 Réduction des normaux [Gou]
54 Quaternions et $SO_3(\mathbb{R})$ [Per]

Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un K espace vectoriel de dimension finie n.

I. Action par translation

1) Action de $GL_n(k)$ et pivot de Gauss.

[H2G2] 130 132

But : On souhaite résoudre un système linéaire $AX = Y$ avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$, $X \in k^m$ et $Y \in k^n$. Cela revient à résoudre $PAX = PY$ pour $P \in GL_m(k)$ avec l'espoir que PA soit "plus simple" que A (diagonale, triangulaire).

Def 1 : On considère l'action de $GL_m(k)$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(k)$ par multiplication à gauche : $(P, A) = PA$.

Rq 2 : Ceci correspond bien au cadre voulu : les opérations élémentaires s'interprètent comme multiplication par des éléments de $GL_m(k)$
- multiplier une ligne par une constante revient à multiplier la matrice du système par une matrice de dilatation.
- Une combinaison linéaire de lignes revient à une matrice de transvection
- Permuter deux lignes revient à multiplier par une matrice de permutation
- Le groupe linéaire est engendré par dilatation et transvections [Théo]

Def 3 : On appelle pivot d'une ligne non nulle de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$ le premier coefficient non nul de la ligne (le plus à gauche). Une matrice est dite échelonnée en lignes si elle vérifie :
- Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes sont nulles.
- Le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que les pivots des lignes précédentes.

Une matrice échelonnée en ligne est dite réduite si de plus, tous les pivots sont égaux à 1 et les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Théo 4 : Soient m, n deux entiers
(i) Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_{m,n}(k)$ sont dans la même orbite sous $GL_m(k)$ si et seulement si elles ont même noyau.
(ii) Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée en lignes réduites : $\mathcal{M}_{m,n}(k) = \bigsqcup_{E \in \mathcal{E}_{m,n}} GL_m(k).E$ où $\mathcal{E}_{m,n}$ est l'ensemble des matrices échelonnées en lignes réduites de taille $m \times n$.

Rq 5 : On retrouve dans la preuve la méthode du pivot de Gauss et les opérations élémentaires vues précédemment.

Rq 6 : Par transposition on obtient que A et A' sont dans la même orbite dans l'action à droite de $GL_n(k)$ ssi elles ont la même image.

Appli 7 : Calcul du rang d'une matrice ; résolution de systèmes linéaires et réduction à la forme échelonnée ; calcul de l'inverse d'une matrice.

2) Actions de $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$.

[H2G2] p202 ...

Par restriction, les groupes $U_n(\mathbb{C})$ et $O_n(\mathbb{R})$ agissent sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théo 18 (Décomposition polaire) La multiplication matricielle induit des homéomorphismes :
(i) $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq GL_n(\mathbb{R})$ (ii) $U_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \simeq GL_n(\mathbb{C})$.

Appli 19 : Pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$.

Cor 20 : Tout sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$ lui même.

II. Action de Steinitz. Matrices équivalentes

1) Rang et orbite.

[H2G2] 2 / 4

Prop déf 21 : Le groupe $G = GL_m(k) \times GL_n(k)$ agit sur $\mathcal{M}_{m,n}(k)$ par $(P, Q).A = PAQ^{-1}$. On dit que deux matrices dans la même orbite sont dites équivalentes.

Rq 22 : Cette action correspond au changement de base au départ et à l'arrivée pour l'endomorphisme associé à A.

Théo 23 : (Théorème du rang) Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{m,n}(k)$ sont dans la même orbite sous l'action de G si et seulement si elles ont le même rang.

Prop 24 : Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$ est équivalente à une unique matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = rg A$.

[OA] 155 156

Appli 25 : On a $rg(A) = rg({}^tA)$ pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$.

Appli 26 : Le rang est invariant par extension de corps.

Appli 27 : deux matrices équivalentes dans une extension le sont également dans le corps de base.

2) Topologie matricielle $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

[OA] 155

Prop 28 : Le groupe $GL_n(k)$ est dense dans $\mathcal{M}_n(k)$, pour $A = PJ_rQ^{-1}$, on considère $P(J_r + \frac{1}{n} Id)Q^{-1} \longrightarrow A$.

[H2G2] 10,11

Prop 29 Soit $n, m \in \mathbb{N}$, $r \leq \min(n,m)$, on note O_r l'orbite des matrices de rang r (sous l'action par équivalence). L'adhérence de O_r est donnée par $\overline{O_r} = \bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k$. (réunion disjointe)

Cor 30: L'unique orbite fermée est l'orbite de la matrice nulle $O_0 = \{0\}$. L'unique orbite ouverte est l'orbite maximale $O_{\min(m,n)}$, en particulier pour $m = n$, $Gl_n(\mathbb{R})$ est ouverte.

Cor 31: Le rang est une application semi continue inférieurement : si (A_k) converge vers B et $rg(A_k) = r$, alors $rg(B) \leq r$.

[MT] 36

Théo 32: Si $p \leq n-1$, l'orbite O_p est un connexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III. Action par conjugaison. Matrices semblables.

1) Généralités.

[Gou1] 158 121 163 164

Prop déf 33 Le groupe $Gl_n(k)$ agit sur $\mathcal{M}_n(k)$ par automorphisme intérieur : $P.A = PAP^{-1}$ pour $A \in \mathcal{M}_n(k)$. Cette action correspond au changement de base pour les applications linéaires.

Déf 34: On dit que deux matrices sont semblables si elles sont dans la même orbite sous l'action de $Gl_n(k)$.

Rq 35: Toute la thématique de la réduction des endomorphismes consiste à trouver de bons représentants des orbites sous cette action :

Déf 36: On dit que $A \in \mathcal{M}_n(k)$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) si elle est semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire).

Appl 37: Calcul de puissances : pour $P \in Gl_n(k)$, $A \in \mathcal{M}_n(k)$, $(PAP^{-1})^m = PA^mP^{-1}$.

Prop 38: Si k est infini, L une extension de k, si $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$ sont semblables sur L, elles sont également semblables sur k.

Ex 39: $k = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$.

Théo 40 Jordan : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, de polynôme caractéristique χ_f scindé sur k : $\chi_f = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)^{\beta_i}$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$, $A_i := \begin{pmatrix} \lambda_i & v_{i,1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & v_{i,\cdot} \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$ où $v_{i,j} \in \{0,1\}$.

[Gou1] 199 202

Appl 41: $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à $2M$ ssi M est nilpotente.

Appl 42: Les matrices M et ${}^tM$ sont semblables dans $\mathbb{C}$, donc dans $\mathbb{R}$.

Théo 43: Tout sous groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini. DVP

2) Invariants de similitude

[Gou1] 290 291

Déf 44: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, f x, \dots, f^j x)$ où $j \leq n-1$ est une base de E.

Prop 45: Il est équivalent de dire
- $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique
- $\deg \mu_f = n$ (donc $\mu_f = \chi_f$)
- $C(f) = K(f)$
- Dans une bonne base, la matrice de f est une matrice compagnon (pour μ_f), $C(\mu_f)$.

Théo 46: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe une suite $F_1, \dots, F_r$ de sous espaces vectoriels de E tous f stables tels que
- $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_r$
- Pour $i \in [\![1, r]\!]$, $f_i = f_{|F_i}$ est cyclique.
- Si $P_i := \mu_{f_i}$, on a $P_{i+1} | P_i$ pour $i \in [\![1, r-1]\!]$.

La suite de polynômes $P_1 \dots P_r$ ne dépend pas du choix de la base, mais seulement de f, on l'appelle suite des invariants de similitude de f.

Théo 47 (Réduction de Frobenius) Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$. Si $P_1, \dots, P_r$ désigne la suite des invariants de similitude de f l'endomorphisme associé dans la base ca. Il existe une matrice semblable à A de la forme $\begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & C(P_2) & \\ 0 & & C(P_r) \end{pmatrix}$

On a d'ailleurs $P_1 = \mu_A$ et $\chi_A = \prod P_1 \dots P_r$.

Cor 48: Deux matrices sont semblables ssi elles ont même invariants de similitude.

3) Actions de $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$.

[Gou1]

Les groupes $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$ agissent par restriction $O.A = OAO^{-1} = OA{}^tO$.
$U.A = UAU^{-1} = UAU^*$.

Théo 49: Si E est euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $OAO^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_s & & \\ & & & \tau_1 & \\ 0 & & & & \ddots \; \tau_r \end{pmatrix}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. DVP

[Gou] Théo 50 : Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$ | $O M {}^tO$ soit diagonale

Théo 51 : Soit $M \in A_n(\mathbb{R})$, Alors $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$ | $O A {}^tO$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \tau_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tau_r \end{pmatrix}$ où $\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ -b_i & 0 \end{pmatrix}$

Théo 52 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

[FGN] Théo 53 : Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple

[Per] Théo 54 : Soit G le groupe des quaternions d'ordre 1, on a $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$. DVP

[Gou] Prop 55 : Si $M \in U_n(\mathbb{C})$, l'orbite de M sous $U_n(\mathbb{C})$ contient une matrice diag$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ $\theta_i \in \mathbb{R}$.

Prop 56 : Si M est normale ($M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$) alors l'orbite de M sous $U_n(\mathbb{C})$ contient une matrice diagonale.

Théo 57 : Si $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ | $M^* + M = 0$, alors l'orbite de M sous $U_n(\mathbb{C})$ contient une matrice diagonale imaginaire pure.

Prop 58 : Si $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ hermitienne, alors son orbite sous $U_n(\mathbb{C})$ contient une matrice diagonale réelle.

Appl 59 : Soit $H \in H_n^+(\mathbb{C})$, il existe une unique $R \in H_n^+(\mathbb{C})$ | $H = R^2$

IV. Action par congruence. car$(k) \neq 2$

Def 60 : On définit l'action de $Gl_n(k)$ sur $S_n(k)$ par congruence : $P.S = {}^tPSP$.

Rq 61 : Cette action correspond au changement de base pour les formes quadratiques. On dit que S, S' sont congruentes si elles sont dans la même orbite sous cette action.

[Per] Théo 62 (Sylvester). Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, il existe deux entiers p, r, $p + r \leq n$ uniquement déterminés par A, et $G \in Gl_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tGAG = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

les orbites sont paramétrées par les couples (p, r), appelés signatures des formes quadratiques.

Théo 63 : Si k est algébriquement clos, $A \in S_n(k)$, alors A est congruente à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r \in [\![0, n]\!]$

[Per] Théo 64 : Soit $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini, $\alpha \in \mathbb{F}_q^* \setminus \mathbb{F}_q^{*2}$. Il y a deux classes de congruences de matrices symétriques dans $Gl_n(k)$. (formes quadratiques définies positives), l'une étant celle de (I_n) et celle de $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ selon si $\det(S)$ est un carré dans $\mathbb{F}_q$.

Théo 65 : Tout sous groupe compact de $Gl_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$

[Rou] Prop 66 : Soient $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap Gl_n(\mathbb{R})$, Alors $\exists V$ voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : V \to Gl_n(\mathbb{R})$ C^1 telle que $\forall A \in V$, $A = {}^t\varphi(A) A_0 \varphi(A)$.

Théo 67 (Morse) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sur U ouvert contenant 0. On suppose que 0 est un point critique quadratique non dégénéré de f. On note $(p, n-p)$ la signature de $d^2 f_0$. Il existe un difféomorphisme $x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1, tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2.$$