107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. Exemples.

Refs: [Ulm] Ulmer : Théorie des Groupes. [Pey] Peyré : L'algèbre discrète de la transformée de Fourier. [Serre] Serre Représentations linéaires des groupes finis.
Devt : (4.2) Entiers algébriques, caractères [Rom]
(4,5,0) Sous groupes normaux et caractères, Table $\mathfrak{S}_4$ [Pey]
[Ulmer] 143, 149

Cadre : On considère par défaut G un groupe fini d'ordre m et V un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension d.

I. Représentations d'un groupe fini

1) Définitions et premiers exemples

Def 1 : Soit $\mathbb{C}G$ un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $(e_g)_{g\in G}$ indicée par G. On munit $\mathbb{C}G$ d'une structure d'algèbre en posant $e_g e_h := e_{gh}$ étendu par linéarité. C'est l'algèbre de groupe de G.

Def 2 : On appelle représentation de G tout $\mathbb{C}G$-module à gauche.

Théo 3 : Comme un $\mathbb{C}G$ module est en particulier un $\mathbb{C}$ espace vectoriel (car $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}G$). On peut de manière équivalente définir une représentation de G comme un $\mathbb{C}$ espace vectoriel V muni d'un morphisme $\rho : G \to GL(V)$. On notera (V,ρ) pour mettre l'emphase sur ρ. On dit que la représentation (ρ,V) est fidèle si $\mathrm{Ker}\,\rho = \{0\}$. La dimension de V est le degré de la représentation.

Ex 4 : Le morphisme trivial $G \to \mathbb{C}^*$ est une représentation, associée au module $\{0\}$, on la note $\mathbb{1}$.
Un morphisme $G \to \mathfrak{S}_n$ induit une représentation de degré n de G dite par permutation. En particulier, G agissant sur lui même donne une représentation dite régulière, qui correspond à $\mathbb{C}G$ comme $\mathbb{C}G$ module.

Ex 5 : Si $(\rho_1 V_1)$ $(\rho_2 V_2)$ sont deux représentations, $\mathcal{L}(V_1 V_2)$ est un $\mathbb{C}G$ module en posant $(g.f)(v) := \rho_2(g) f(\rho_1(g^{-1}) v)$. En particulier, on peut considérer $V_1^* = \mathrm{Hom}(V_1, \mathbb{C})$ comme un $\mathbb{C}G$-module, le module dual.

Def 6 : On appelle morphisme de représentation $(\rho_1 V_1) \to (\rho_2 V_2)$ un morphisme de $\mathbb{C}G$-module. On note $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 V_2)$ ces morphismes. Ça correspond aux applications linéaires $V_1 \to V_2$ qui commutent à l'action de g. $\forall v \in V_1$: $f(\rho_1(g).v) = \rho_2(g) f(v)$. On parle de G-morphisme.

Prop 7 : Si $(\rho_1 V_1)$ $(\rho_2 V_2)$ sont deux représentations, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 V_2)$ est un sous groupe de $\mathcal{L}(V_1 V_2)$.

Cor 8 : Un isomorphisme de $\mathbb{C}G$ module est un isomorphisme linéaire qui est un morphisme de $\mathbb{C}G$ module. En particulier, deux représentations isomorphes ont même degré.

2) Sous représentations, opérations sur les représentations.

Def 9 : Une sous représentation de (ρV) est la donnée d'un sous-$\mathbb{C}G$ module de V autrement dit d'un sous espace vectoriel de V stable par l'action de G.

Prop 10 : Si $f : V \to W$ est un morphisme de représentations, $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sous modules, respectivement de V et de W.

Prop 11 : Tout sous module $W \leq V$ induit un module quotient V/W. Dualement, tout morphisme surjectif $V \twoheadrightarrow X$ est un quotient par $\mathrm{Ker} f$.

Prop 12 : Soient (ρ, V) une représentation et $f \in \mathcal{L}(V)$, f induit un G morphisme $\tilde{f}$ en posant $\tilde{f}(v) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g) f(\rho(g^{-1})v)$.

Rq 13 : Ce résultat, qui donnera le théorème (Maschke) est perdu si l'on ne peut pas considérer $1/|G|$: groupe infini ou remplacer $\mathbb{C}$ par un corps de caractéristique > 0 qui m divise.

Def 14 : Soient (ρ_1, V_1) et $(\rho_2 V_2)$ deux représentations de G, l'espace vectoriel $V_1 \oplus V_2$ peut être muni d'une structure de $\mathbb{C}G$-module par $\rho(g) := \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$. On a $\deg V_1 \oplus V_2 = \deg V_1 + \deg V_2$. Et $V_1 \oplus V_2$ est un bi-produit dans la catégorie $\mathbb{C}G$-Mod.

Cor 15 : La catégorie $\mathbb{C}G$-Mod est abélienne, en particulier tout G morphisme $f : V_1 \to V_2$ induit un isomorphisme $V_1/\mathrm{Ker} f \simeq \mathrm{Im} f$.

Ex 16 : L'identité $G \to GL_n(\mathbb{C})$ donne la représentation $\bigoplus^n \mathbb{1}$.

Def 17 : Soient $(\rho_1 V_1)$, $(\rho_2 V_2)$ deux représentations. On peut considérer $V_1 \otimes V_2$ l'espace vectoriel de dimension $\dim V_1 \dim V_2$ (si $(a_1 .. a_m)(b_1 \dots b_n)$ sont des bases de V_1 et V_2, une base de $V_1 \otimes V_2$ est $(a_1 b_1, \dots, a_1 b_n, \dots, a_m b_n)$). Il peut être muni d'une structure de $\mathbb{C}G$ module par $\rho_1 \otimes \rho_2(g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$. (produit de Kronecker dans la base donnée).

3) Représentations irréductibles.

Def 18 : On dit qu'un $\mathbb{C}G$ module est simple (ou irréductible) si ses seuls sous modules sont triviaux. Un module non simple est dit réductible. Un module est dit semi simple s'il est somme directe de modules simples. Un module est dit totalement réductible si tout sous module admet un supplémentaire.

Ex 19 : Un $\mathbb{C}G$-module de degré 1 est simple, mais la réciproque est fausse si G n'est pas abélien (voir partie suivante).

Ex 20 : Si (ρ,V) est une représentation, V^G désigne les points fixes sous l'action de G. Il forme un sous module de V. Par exemple $\mathcal{L}(V_1 V_2)^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 V_2)$.

Appl 21 : Dans une représentation par permutations, la somme des éléments d'une base forme un point fixe : une telle représentation n'est pas simple.

Théo 22 (Maschke) Tout $\mathbb{C}G$ module est totalement réductible. Autrement dit, la catégorie $\mathbb{C}G$-Mod est semi simple (toute suite exacte courte est scindée).

Cor 23 : Toute représentation de degré finie est semi simple.

Lemme 24 (Schur) Si V_1 et V_2 sont deux $\mathbb{C}G$ modules simples, alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 V_2) = \{0\}$, ou alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V_1 V_2) = \{\lambda \mathrm{Id} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ et exclusivement constitué d'isomorphisme.

Cor 25 : Toute représentation irréductible d'un groupe abélien est de degré 1.
Si (ρV) est une représentation de G, alors $\rho(g)$ est diagonalisable pour tout $g \in G$.

II Caractères des groupes finis.

On veut comprendre les représentations de G à partir des représentations irréductibles, les caractères forment un très bon outil pour ce faire.

1) Définitions et premières propriétés

[Ulm] 150 152

Def 26: On dit qu'une fonction $\varphi : G \to \mathbb{C}$ est centrale si elle est constante sur les classes de conjugaisons de G. Les fonctions centrales de G forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Def 27: Pour (ρ, V) une représentation de G, on appelle caractère associé à la représentation la composée de ρ par la trace : $\chi_V = \mathrm{tr} \circ \rho$. Il s'agit d'une fonction centrale.

Rq 28: Un caractère n'est pas en général un morphisme de groupes, c'est le cas si et seulement si la représentation est de degré 1 ($\chi_V = \rho$ dans ce cas).

Ex 29: L'application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ donnée par $t \mapsto e^{it}$ est un caractère d'une représentation. Le plongement $\mathbb{C}^* \to GL_2(\mathbb{R})$ est une représentation Réelle et complexe de $\mathbb{C}^*$, de caractère 2 Re.

Prop 30: Deux représentations isomorphes ont même caractère.

Ex 31: Dans le cas d'une représentation par permutation, le caractère donne le nombre de points fixes sous l'action de g dans une base.

Le caractère régulier associé à la représentation régulière est donné par $\chi(1) = |G|$ et $\chi(g) = 0$ pour $g \neq 1$.

Prop 32: Si V_1 et V_2 sont deux représentations de G, on a

- $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$
- $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1}\chi_{V_2}$
- $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$

De plus si V_1 est de degré d, on a $|\chi(g)| \leq d$ et $|\chi(g)| = d$ si et seulement si $\rho(g) = \mathrm{Id}$.

2) Caractères irréductibles et orthogonalité

[Ulm] 152 160

Def 33: On dit qu'un caractère est irréductible s'il est associé à un $\mathbb{C}G$ module simple. D'après le corollaire 23 et prop 32, tout caractère s'écrit comme une somme de caractères irréductibles.

Prop 34: La formule $(\varphi, \psi) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \varphi(g)\overline{\psi(g)}$ définit un produit scalaire hermitien sur l'espace vectoriel des fonctions centrales sur G. Les caractères irréductibles forment une base orthonormée pour cet espace.

Ex 35: La multiplicité du caractère trivial dans une représentation V est la dimension du sous module V^G.

Prop 36: Le caractère régulier est donné par la somme $\sum_{i=1}^{r} \chi_i(1)\chi_i$ où $\chi_1 \dots \chi_r$ sont les caractères irréductibles de G.

Dans la suite, on note $\chi_1 \dots \chi_r$ les caractères irréductibles de G.

Prop 37: Le groupe G admet r classes de conjugaisons. L'ordre de G est donné par $\sum_{i=1}^{r} |\chi_i(1)|^2$.

[Ulm] 152 160

Cor 38: Si G est abélien, il admet $|G|$ caractères irréductibles.

Théo 39: Si χ est un caractère de G,

(a) On a une unique décomposition $\chi = \sum_{i=1}^{r} a_i \chi_i$ avec $a_i = (\chi_i, \chi) \in \mathbb{N}$.

(b) χ est irréductible si et seulement si $(\chi, \chi) = 1$

(c) Deux représentations ayant même caractère sont isomorphes.

(d) Les caractères irréductibles séparent les classes de conjugaisons : deux éléments de G sont conjugués si et seulement si leurs images par tout caractère sont égaux.

Cor 40: Si χ_1 et χ_2 sont deux caractères irréductibles, et χ_1 est de degré 1, alors $\chi_1\chi_2$ est irréductible.

Prop 41: Si $C_1, \dots, C_r$ sont les classes de conjugaison de G, on a $\sum^{r} \chi(C_i)\overline{\chi(C_j)} = \delta_{ij}\frac{|G|}{|C_j|}$

Théo 42: L'ensemble des entiers algébriques $\overline{\mathbb{Z}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{Z}[X] \text{ unitaire tel que } P(z) = 0\}$ forme un sous anneau de $\mathbb{C}$, par conséquent, le degré d'une représentation irréductible divise $|G|$. DVP

3) Table de caractère.

[Ulm] 158 160

Def 43: La table de caractère de G est le tableau à double entrée donnant les valeurs des caractères irréductibles de G sur ses classes de conjugaison.

Ex 44 Table de caractère de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (Fig 1).

Prop 45: Si $H \to G$ est un morphisme de groupes, alors toute représentation de G en induit une de H. En particulier, si $N \trianglelefteq G$, la table de G/N se plonge dans celle de G. L'indice de $D(G)$ est le nombre de représentations irréductibles de degré 1 de G.

Ex 46: $D(\mathfrak{S}_3) = \mathfrak{A}_3$. Plus généralement $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 3$. (Fig 2).

Cor 47: La table de caractère ne caractérise pas la classe d'isomorphie d'un groupe : D_4 et Q_8 les deux groupes non abéliens d'ordre 8 ont même table de caractère (Fig 3).

Def 48: Soit χ un caractère de G, on appelle noyau de χ l'ensemble $\{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$. C'est en fait $\mathrm{Ker}\,\rho$ où $\rho : G \to GL(V)$ donne la représentation de χ.

Théo 49: Si G est un groupe fini avec les notations précédentes, Tout sous groupe distingué de G s'écrit comme intersection de noyaux de caractères irréductibles de G. DVP

Appli 50: Sous groupes normaux de $\mathfrak{S}_4$ par sa table de caractère (Fig 4).

Cor 51: Un groupe fini est simple si et seulement si tous ses caractères irréductibles ont un noyau trivial.

III. Application, représentation induite.

1) Résolubilité.

[Pey] 6 12

Def 61 : Un groupe G est résoluble si il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $D^k(G)=\{1\}$ où $D^k(G)$ désigne le groupe dérivé k fois de G.

Théo 62 (Burnside) Un groupe d'ordre $p^\alpha q^\beta$ où p,q sont premiers et α,β des entiers est résoluble.

Appli 63 $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{U}_4$ est résoluble. Tous les groupes diédraux d'indice premier sont résolubles.

Rq 64 : Ces résultats, clair pour les p-groupes, ne se généralise pas au cas de produit de trois nombres premiers ou plus : $\mathfrak{U}_5$ d'ordre $5\times3\times4$ non résoluble.

2) Dual et bidual d'un groupe abélien.

Def 65 : On pose $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères irréductibles de degré 1 de G, on l'appelle le dual de G.

Prop 66 : Si G est abélien, $\widehat{G}$ est en fait constitué des morphismes de G dans le groupe des racines k-èmes de l'unité pour $k\in\mathbb{N}$.

Ex 67 Si G est cyclique, ces morphismes sont déterminés par l'image d'un générateur : il y en a $|G|$.

Prop 68 : Si G est abélien fini et $H\subseteq G$ un sous groupe. Tout caractère de H se prolonge en un caractère de G. On a une suite exacte courte $G/H \hookrightarrow \widehat{G} \twoheadrightarrow \widehat{H}$

Théo 69 : Si G est abélien fini, alors $\widehat{G}\simeq G$, en particulier G et $\widehat{G}$ ont même ordre.

Théo 70 : On peut considérer $\widehat{\widehat{G}}$ le bidual de G, on a un isomorphisme canonique $\phi : G \longrightarrow \widehat{\widehat{G}}$

$g \longmapsto (\phi(g) : \chi \mapsto \chi(g))$.

Rq 71 On a vu que si G n'est pas abélien, ceci est perdu, $|\widehat{G}|$ est l'indice du groupe dérivé de G.

3) Représentation induite.

On a vu que pour un morphisme $H\to G$, une représentation de G en donne une de H (par composition) c'est en particulier le cas si H est un sous groupe de G : on a un foncteur $\mathbb{C}G\text{-Mod} \longrightarrow \mathbb{C}H\text{-Mod}$, dit de restriction. Pour V un $\mathbb{C}G$ module, on note $V\downarrow^G_H$ son module restreint à H. La prop 68 nous invite à essayer d'inverser le processus : construire une représentation de G à partir d'une d'un sous groupe H.

[Serre] 42-45 71 75

Def 72 : Soit $H\subseteq G$, R un système de représentants des classes à gauche modulo H. Si (ρ,V) est une représentation de G, (θ,W) sa restriction à H, on dit que V est induite par W si : $V \simeq \bigoplus_{s\in R} \rho(s)W$

Ex 73 : La représentation régulière sur G est induite par celle de H

Prop 74 : Si ρ_1,ρ_2 sont induites par θ_1,θ_2 alors $\rho_1\oplus\rho_2$ est induite par $\theta_1\oplus\theta_2$

Théo 75. Toute représentation V de H induit une unique (à isomorphisme près) représentation de G, notée $V\uparrow^G_H$.

Prop 76 : Si (ρ,V) est induite par (θ,W), le caractère χ_V est donné par

$$\chi_V(g) = \sum_{\substack{s\in R\\ s^{-1}gs\in H}} \chi_W(s^{-1}gs) = \frac{1}{|H|}\sum_{\substack{s\in G\\ s^{-1}gs\in H}} \chi_W(s^{-1}gs).$$

Théo 76 : Si (θ,W) est une représentation de H, la représentation $W\uparrow^G_H$ est donnée par $\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} W$

Cor 77 : On a un foncteur $\mathbb{C}H\text{-Mod} \to \mathbb{C}G\text{-Mod}$, qui à une représentation associe son induite. Il est adjoint à gauche de la restriction au sens

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(W, E\downarrow^G_H) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(V\uparrow^G_H, E) \quad \text{si } E\in\mathbb{C}G\text{-Mod},\ W\in\mathbb{C}H\text{-Mod}.$$

Théo 78 : La formule de la proposition 76 se généralise à toute fonction centrale sur H. On pose $\mathrm{Ind}(\Psi)$ (resp $\mathrm{Res}(\Psi)$) l'application centrale sur G induite depuis Ψ application centrale sur H (resp restreint de G à H). On a $(\Psi,\mathrm{Res}\,\Psi)_H = (\mathrm{Ind}^H(\Psi))_G$ où $(.)_H$ (resp $(.)_G$) désigne le produit scalaire des fonctions centrales sur H (resp sur G).

Ex 79 : La représentation induite par la représentation de degré 2 de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathfrak{S}_4$ est somme des trois représentations de degré ≥ 1 de $\mathfrak{S}_4$

Table $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$:

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	i	-1	$-i$
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	$-i$	-1	i

Fig 1

Table $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\dots$	$\overline{n-1}$
χ_1	1	1		1
χ_2	1	ω	$\dots$	ω^{n-1}
$\vdots$	1	ω^2		
		$\vdots$		
χ_n	1	ω^{n-1}	$\dots$	ω

Table $\mathfrak{S}_3$:

	$\{1\}$	$C(12)$	$C(123)$
$\mathbb{1}$	1	1	1
ε	1	-1	1
χ	2	0	-1

Fig2.

Table D_4, Q_8

$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{\pm i\}$	$\{\pm j\}$	$\{\pm k\}$
1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1
2	-2	0	0	0

Table $\mathfrak{S}_4$

	$\{1\}$	(12)	$(12)(34)$	(123)	(1234).
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\chi$	3	-1	-1	0	1
V	2	0	2	-1	0