28/06/24
IMAG-Séminaire
Darboux.

Catégories de Garside paraboliques et applications aux groupes de tresses complexes

I. Structures de Garside
II. Sous structures paraboliques
III. Bancs de paraboliques.

I. 1) Monoïdes/groupes de Garside

[Dehornoy Paris 99]

<u>Def</u>: Un groupe de Garside (G, M, Δ) est un groupe G, un monoïde $M \subseteq G$, et $\Delta \in M$, tels que

- $(M \leq)$, $(M \geq)$ sont des treillis.
- $\forall x \in M$, $\exists n > 0$ tel que, pour $x = s_1 \dots s_k$ $(s_i \neq 1)$ on a $k \leq n$.
(une borne sur la longueur des écritures).
- $\{s \in M \mid s \leq \Delta\} = \{s \in M \mid \Delta \geq s\} = S$ est fini et engendre M
(Δ est équilibré) "simples".
- M engendre G.

<u>Ex</u>: $(\mathbb{Z}^n, \mathbb{N}^n, \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix})$ est l'exemple le + simple

- $\langle a, b \mid a^p = b^q \rangle$ (même monoïde) $\Delta = a^p$.
- $\langle xyz \mid \underset{\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}}{xyz = yzx = zxy} \rangle$ $\Delta = xyz$
- (W, S) un sys de Coxeter, W fini. On a $A(W) = \langle S \mid$ relations de tresses uniquement$\rangle$ est le groupe d'Artin. Le monoïde d'Artin Tits est Garside avec $\Delta \sim w_0$ (élt de + grande longueur).

Def : Soit (G, Γ, Δ) de Garside. $x \in G$. Un ensemble de conjugaison pour x est un ensemble Γ de $Cl(x)$ (classe conj x) tel que
- Γ est fini (non vide), - $y \in \Gamma \Rightarrow y^{\Delta} \in \Gamma$
- $y^f, y^g \in \Gamma \Rightarrow y^{f \wedge g} \in \Gamma$.

Theo : (Birman Gebhardt Gonzalez Meneses) 06
$\forall x \in (G, \Gamma, \Delta)$, $\exists \Gamma_x$ un ensemble de conjugaison pour x tel que
x conjugué à $x' \iff \Gamma_x = \Gamma_{x'}$

2) Groupes de tresses complexes.

$W \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe engendré par des (pseudo)réflexions.
On lui associe $B(W) = \pi_1(X/W)$ son "groupe de tresses".

Theo : Brieskorn Saito Deligne, Picantin, Bessis.
$\forall W$, $B(W)$ est un groupe de Garside. Sauf...
$B_n^*(e) \subseteq B_n^*(1)$ comme sous groupe d'indice fini.
Garside
$B(G_{31}) \subseteq A(E_8)$ comme centralisateur (d'un élément "regular").

2) Categories de Garside / groupoïdes.

$\forall u$, $\Delta(u) : u \to \phi(u)$
$\Delta : Ob(C) \to C$.

Def : Un groupoïde de Garside $(\mathcal{G}, C, \Delta)$ $C \subseteq \mathcal{G}$,
- $\forall u \in Ob(C)$, $(C(u,-), \leq)$ and $(C(-,u), \geq)$ sont des treillis
- même condition sur les bornes.
- $\forall s : u \to v$, $s \leq \Delta(u) \iff \Delta(\phi^{-1}(v)) \geq s$. +
- $Div(\Delta) = S$ est fini et engendre C
- C engendre $\mathcal{G}$

2.1) Groupoïde des cosets.

Soit (G,Π,Δ) de Garside, et $H \leq G$ d'indice fini. On construit un groupoïde $\mathcal{G}_H$ et une cat $\mathcal{C}_H$ avec

- $Ob(\mathcal{G}_H) = H\backslash G$ les classes à droite.
  $Ob(\mathcal{C}_H)$ "
- $\mathcal{G}_H(Hg, Hg') = \{ f \in G \mid Hgf = Hg' \}$ $\quad Hg \xrightarrow{f} Hg'$
- $\mathcal{C}_H(Hg, Hg') =$ — Π —.

On remarque $\mathcal{G}_H(H,H) = H$.

Prop : $(\mathcal{G}_H, \mathcal{C}_H, \Delta_H)$ est un groupoïde de Garside pour

$$\Delta_H(Hg) : Hg \xrightarrow{\Delta} Hg\Delta$$

2.2) Centralisateurs

Soit (G,Π,Δ) de Garside, et Γ un ensemble de conjugaison pour un $x \in \Gamma$. On construit un groupoïde $\mathcal{G}_\Gamma$ et une catégorie $\mathcal{C}_\Gamma$ avec

- $Ob(\mathcal{G}_\Gamma) = \Gamma = Ob(\mathcal{C}_\Gamma)$.
- $\mathcal{G}_\Gamma(y,y') = \{ f \in G \mid y^f = y' \}$
- $\mathcal{C}_\Gamma(y,y') = \{ f \in \Pi \mid y^f = y' \}$.

On remarque $\mathcal{G}_\Gamma(x,x) = \{ g \in G \mid x^g = x \} = C_G(x)$

Prop : $(\mathcal{G}_\Gamma, \mathcal{C}_\Gamma, \Delta_\Gamma)$ est un groupoïde de Garside pour

$$\Delta_\Gamma(x) : x \xrightarrow{\Delta} x^\Delta$$

II. 1) Groupes d'Artin.

$\langle I \rangle \subseteq W$

Soit (W,S) un système de Coxeter. Pour $I \subseteq S$ (W_I, I) est un système de Coxeter. Si $|W_I| < \infty$, on a un élément de plus grande longueur w_I. $W_I \subseteq W$ est un "parabolique standard".

Dans $A(W)$, $I \subseteq S$ engendre un sous groupe isomorphe à $A(W_I)$ avec élément de Garside w_I, le ppcm des éléments de $I \subseteq A(W)$.

2) Monoïdes de Garside.

Soit (G, M, Δ) un groupe de Garside.

Déf: Un élément $\delta \in S \subseteq M$ est un élément de Garside parabolique si
- δ est équilibré
- $\forall s, t \in S$ tel que $s \leq \delta, t \leq \delta$, Alors $st \in S \Rightarrow (st) \leq \delta$.

Le groupe $(\underbrace{\langle Div(\delta) \rangle}_{G_\delta}, \underbrace{\langle Div(\delta) \rangle^+}_{M_\delta}, \delta)$ est un groupe de Garside.

$(G_\delta, M_\delta, \delta)$ est un sous groupe parabolique standard.

(Déf: parabolique = conjugué des paraboliques standards)

Ex: Dans $\langle a, b \mid a^p = b^q \rangle$, a est équilibré, mais $a \leq a$ $a \leq a$, $aa = a^2 \in S$ mais $a^2 \nleq a$, donc a n'est pas un élément de Garside parabolique.

Les éléments de Garside paraboliques sont en fait $1, \Delta$.

Prop: Si (W,S) est de Coxeter avec W fini. Les éléments de Garside paraboliques de $A(W)$ correspondent aux éléments de plus grande longueur des paraboliques standards de W.

Notons que les paraboliques standards dépendent de la structure de Garside!

Ex: On a $\langle a, b \mid aba = bab \rangle \simeq \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$ via $x \mapsto aba$ $y \mapsto ab$.

Le groupe $\langle a \rangle$ est parabolique dans le premier cas, mais $(y^{-1}x)$ n'est pas parabolique dans le second.

On a deux questions classiques sur les paraboliques.

① Tout élément $x \in G$ est contenu dans un unique sous-groupe parabolique $PC(x)$ minimal pour $\subseteq$

② L'intersection de sous groupes paraboliques est paraboliques.

Théo (Cumplido, Gebhardt, González-Meneses, Wiest 2018)

Si $G = A(W)$ est un groupe d'Artin avec W fini, alors ① et ② sont vraies.

Théo : (González-Meneses, Marin 22). ⊛

Si $G = B(W)$ est un groupe de tresses complexes irréductible $(\neq B(G_{31}))$, alors ① et ② sont vraies.

Idée de preuve : partir du lemme :

Lemme : Soient G_S, $G_{S'}$ deux paraboliques standards, $G_S \cap G_{S'} = G_{(S \wedge S')}$

On peut alors définir la clôture parabolique standard $SPC(x) = \bigcap_{x \in G_S} G_S$.
et croire que $PC(x) = SPC(x)$ dans les "bons cas" (pour $x \in \Gamma$ par exemple).
On a besoin d'une propriété de stabilité par SPC.

Def : On dit que (G, Γ, Δ) préserve le support si :
$\forall x, y \in \Gamma \; x^\alpha = y$; $SPC(x)^\alpha = SPC(x^\alpha) = SPC(y)$

Théo (González-Meneses, Marin 22)

Si (G, Γ, Δ) préserve le support, alors ① est vrai. Si de plus (G, Γ, Δ) est homogène, alors ② est vrai

Rq : homogène : $\exists\, \ell : \Gamma \to \mathbb{N}$ morphisme tel que $\ell(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

⊛ Il faut montrer que les "paraboliques" ne dépendent pas trop de la structure de Garside dans ce cas.

3) Groupoïdes de Garside.

Soit $(\mathcal{G}, C, \Delta)$ un groupoïde de Garside.

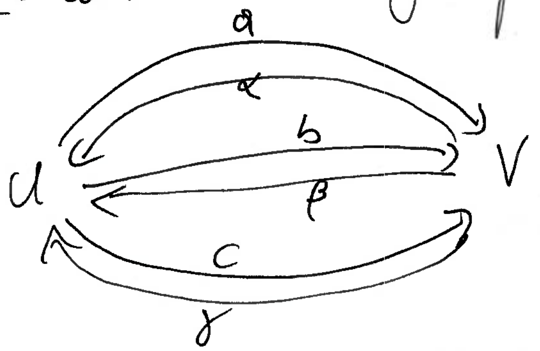
Déf : Une application de Garside parabolique est une application $\delta : E \subseteq Ob(\mathcal{G}) \to C$ telle que :
- $\forall u \in E$, $\delta(u) \in S(u,-)$. (i.e $\delta(u) \preceq \Delta(u)$).
- δ est équilibrée (dans le même sens que Δ).
- $\forall s,t \in S$ tels que $s \preceq \delta(u)$, $t \preceq \delta(v)$, $st \in S \Rightarrow (st) \preceq \delta(u)$.

Le triplet $(\langle Div(\delta)\rangle, \langle Div(\delta)\rangle^+, \delta) =: (\mathcal{G}_\delta, C_\delta, \delta)$ est un groupoïde de Garside, dit groupoïde parabolique standard.

Pour $u \in Ob(\mathcal{G})$, un groupe $\mathcal{G}_\delta(u,u) \subseteq \mathcal{G}(u,u)$ est dit parabolique standard. Un sous groupe $H \subseteq \mathcal{G}(u,u)$ est parabolique s'il existe $\rho \in \mathcal{G}(u,v)$ tel que $H^\rho = \mathcal{G}_\delta(v,v)$ est parabolique standard.

Problème : $\mathcal{G}_\delta \cap \mathcal{G}_{\delta'}$ n'est pas toujours parabolique standard !

Ex : Considérons le groupoïde $\mathcal{G}$, présenté par



$$a\alpha a = b\beta b = c\gamma c$$
$$+ \quad \alpha a \alpha = \beta b \beta = \gamma c \gamma.$$

De Garside pour $\Delta(u) = a\alpha a$ $\quad \Delta(v) = \alpha a \alpha$.

En posant $\delta(u)=a$, $\delta(v)=\beta$ (resp $\delta(u)=c$, $\delta(v)=\beta$) on obtient un groupoïde parabolique standard $\langle a,\beta\rangle$ (resp $\langle c,\beta\rangle$).
Or, on a $\langle a,\beta\rangle \cap \langle c,\beta\rangle = \langle\beta\rangle = \{1_u, \beta, 1_v\}$ n'est pas parabolique standard.

Solution : considérer des ensembles particuliers de sous groupoïdes paraboliques standards, avec des conditions de compatibilité.

Def : Un banc (shoal) de groupoïdes paraboliques standards est un ensemble T tel que :

- $\mathcal{G} \in T$ et $\{1_u\}_{u \in Ob\mathcal{G}} \in T$
- $\mathcal{G}_\delta \in T \Rightarrow (\mathcal{G}_\delta)^\Delta \in T$.
- Pour $\mathcal{G}_\delta, \mathcal{G}_{\delta'} \in T$ tels que $\mathcal{G}_\delta \cap \mathcal{G}_{\delta'} \neq \emptyset$, $\mathcal{G}_\delta \cap \mathcal{G}_{\delta'} \in T$

(en particulier, encore un sous-groupoïde parabolique standard)

Lemme : Si (G, M, Δ) est un groupe de Garside, alors l'ensemble de tous les sous-groupes paraboliques standards en forme un banc

Avec cette définition, on peut redéfinir $SPC(x)$ ($= SPC_T(x)$) pour $x \in \mathcal{G}(u,u)$. On peut alors définir les bancs qui préservent le support. Pour obtenir

Théo (G24)

Si T est un banc qui préserve le support, alors tout $x \in \mathcal{G}(u,u)$ est contenu dans un T-parabolique minimal $PC_T(x) \subseteq \mathcal{G}(u,u)$

Q : Comment définir un banc "intéressant" ?
Quid de l'intersection générale de T-paraboliques (non standards) ?

3.1) Banc pour groupoïde de cosets.

Soit (G, M, Δ) groupe de Garside, et $H \leq G$ d'indice fini.

Pour $\delta \in M$ élément de Garside parabolique, on définit

$\forall Hg \in Ob(\mathcal{G}_H)$, $\delta_H(Hg) : Hg \xrightarrow{\delta} Hg\delta$.

Prop : $\forall \delta \in \Pi$ Garside parabolique, δ_H est une application de Garside parabolique. L'ensemble

$$T := \{ (\xi_H)_{\delta_H} \mid \delta \in \Pi \text{ Garside parabolique} \}$$

est un banc pour $(\xi_H, \mathcal{C}_H, \Delta_H)$, qui préserve le support si (G, Π, S) préserve le support.

Les sous groupes T-paraboliques de $H \simeq \xi_H(1,u)$ sont les $P \cap H$ pour $P \subseteq G$ paraboliques

3.2) Banc pour groupoïde d'ensemble de conjugaison.

Soit (G, Π, Δ) de Garside, Γ un ensemble de conjugaison. Soit $\delta \in \Pi$ Garside parabolique. Si $x \in \Gamma$ commute avec une puissance de δ, on a alors dans $\mathcal{C}_\Gamma$ une boucle

$$\mathcal{C}_\Gamma : \quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "\delta"] & x^{\delta} \arrow[r, "\delta"] & x^{\delta^2} \arrow[d, dotted] \\ & x^{\delta^{n-1}} \arrow[ul, "\delta"] & \arrow[l] \end{tikzcd}$$

et on peut poser $\delta_\Gamma(x) : \delta : x \xrightarrow{\delta} x^{\delta}$.

Prop : $\forall \delta \in \Pi$ Garside parabolique, δ_Γ est une application de Garside parabolique. L'ensemble $T : \{ (\xi_{\delta_\Gamma})_{\delta_\Gamma} \mid \delta \in \Pi \text{ Garside parabolique} \}$ est un banc pour $(\xi_\Gamma, \mathcal{C}_\Gamma, \Delta_\Gamma)$. Les sous groupes T-paraboliques de $C_G(x) \simeq \xi_\Gamma(x,x)$ sont les $P \cap C_G(x)$ pour $P \subseteq G$ parabolique avec $P^x = P$.

Avec de la topologie en +, on peut alors montrer que ① et ② sont vrais pour les sous-groupes paraboliques topologiques de $B(G_{31})$, généralisant le théorème de González-Meneses Marin à tous les groupes de tresses complexes.