Exposé groupe de travail dg-catégories | Qrep-AR-C(A)-K(A)-D(A).

I. Carquois et représentations.

1) Carquois et algèbres de chemins.

Déf : Carquois : $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ — Q_0 : sommets, Q_1 : flèches, s : source, t : but.

Exp : type A_n : chaîne de n points + orientation $n \leftarrow n-1 \cdots \leftarrow 1$

$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \qquad 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3 \cdots$

boucle : $\circlearrowleft$ Kronecker : $\cdot \rightrightarrows \cdot$

$\rightarrow$ carquois connexe ? sans cycle orientés ?

Déf : Un chemin = suite finie $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ telle que $s(\alpha_i) = t(\alpha_{i-1})$ $\forall i \geq 2$.
$+ \forall i \in Q_0$, $e_i : i \to i$ le "chemin paresseux".

Rq : On compose comme des applications. $\cdot \xleftarrow{\alpha} \cdot \xleftarrow{\beta} \cdot \rightsquigarrow \xleftarrow{\alpha\beta}$.

Rq : Chemin de longueur n = morphisme de carquois $A_{n+1} \to Q \dots$

Déf : Algèbre des chemins kQ d'un carquois Q : k-algèbre avec base = chemins dans Q.
(k corps) et produit donné par $\alpha\beta = \begin{cases} 0 \text{ si } s(\alpha) \neq t(\beta) \\ \alpha\beta \text{ sinon} \quad \text{(concaténation).} \end{cases}$

Lemme : kQ de dim $< \infty \Leftrightarrow \exists$ un nb fini de chemins.
$\Rightarrow$ pas de cycle dans Q.

expl : boucle $1 \circlearrowleft \gamma$ base $e_1 = \gamma^0$, $\gamma, \gamma^2, \dots$ avec $\gamma^i \gamma^j = \gamma^{i+j}$ $\forall i,j \geq 0$
$\to k[X] = k\mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ produit terme à terme.

Kronecker : $1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\leftleftarrows}} 2$ dimension 4, $\simeq \begin{pmatrix} k & k^2 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

A_n linéaire $\frac{n(n+1)}{2}$ chemins, $\simeq \begin{pmatrix} \ast & \ast \\ 0 & \ast \end{pmatrix} \subset \mathcal{M}_n(k)$. les matrices trig sup.

pour $1 \xleftarrow{\alpha} 2$, $\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ $\underset{\alpha}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ $\underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

2) Représentations.

Déf : Représentation de $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$ = $\left((E_i)_{i\in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha\in Q_1}\right)$ dans k-Vect.
telle que $f_\alpha : E_{s(\alpha)} \to E_{t(\alpha)}$ $\forall\, \alpha \in Q_1$.
+ de dim $<\infty$ si dans k-vect

Prop : Représentation de Q équivalent à la cat des kQ-Modules modules.

ex : pour $\circlearrowleft\bullet$. On dit que les couples (E,u) avec $u\in \mathrm{End}_k(E)$ équivaut à la donnée d'un $k[X]$-module !

⚠ $k[X] \in k[X]$-mod, mais pas de dim $<\infty$ sur k. On se restreint aux alg de dim $<\infty$.

Prop : kQ a une unité $\Leftrightarrow$ Q est fini
$\dim_k kQ < \infty \Leftrightarrow$ Q est fini sans cycle.
kQ semisimple $\Leftrightarrow$ Q discret.

+ tôt que de regarder les modules simples (jamais semisimple). On regarde plutôt les indécomposables (:= sans facteurs directs).

ex : Pour $k[X]$, si k alg clos, On a Simple $= (k, \lambda)$ avec $\lambda\in k$.
indécomposable $= (k^n, J_n(\lambda))$
↳ bloc de Jordan.

Est ce que kQ est de type de rep $<\infty$? Comment classifier les indécomposables ?
On suppose k algébriquement clos désormais.

Thm (Gabriel) Soit Q connexe sans cycle. Alors kQ est de type de rep $<\infty$
ssi le graphe sous jacent est un Dynkin ADE.
De plus, on sait calculer le nombre d'indécomposables !
Pour A_n, c'est $\frac{n(n+1)}{2}$, quelle que soit l'orientation !

Cor : $\circ \rightrightarrows \circ$ n'est pas de type de rep $<\infty$.

Prop : En type A, un module est déterminé à isomorphisme près par son vecteur dimension $(\dim M_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

A_n-module est indécomposable $\Leftrightarrow$ son vecteur dimension ne contient que 0 et 1, et les 1 sont consécutifs !

↳ on a bien $\frac{n(n+1)}{2}$ tels vecteurs.

Ex : A_3 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cancel{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ il y en a $6=\frac{3\cdot 4}{2}$

Comment trouver les indécomposables injectifs ? Projectifs ?
Quels morphismes entre ces indécomposables ?

3) Carquois d'Auslander Reiten

Def prop : Soit Q connexe fini sans cycle orienté. On définit le carquois d'AR
sommet = classes d'iso d'indécomposables
flèche M,N = base de l'espace des morphismes irréductibles $M \to N$
↳ sans factorisation.

Carquois $<\infty \Leftrightarrow kQ$ est de type de rep $<\infty$ Donc Kronecker argh !

Pour le tracer en type A, on utilise l'algorithme du tricot

- Pour $i\in[\![1,n]\!]$, on pose $P(i)$ l'indécomposable de vecteur dimension $(d_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$, avec $d_j=\begin{cases}1 & \text{si } \exists \text{ chemin } i\to j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
- On place les $P(i)$ sur des niveaux $\neq$, et on trace une flèche ($\nearrow$ ou $\searrow$) $P(i)\to P(j)$ si il existe une flèche $j\to i$ dans Q
- Le tricot proprement dit

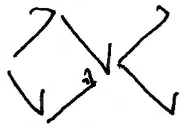
$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & M \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] & & M-X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] X \arrow[dr] & & M-X \\ & M \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & M_1 \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_1+M_2-X \\ & M_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

- On continue jusqu'à atteindre des vecteurs négatifs, que l'on inclus pas.

__Exple__ : $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$. $P(1) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $P(2) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $P(3) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \arrow[dr] & & \\
 & \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \arrow[dr] \arrow[ll, red] & \\
\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \arrow[ur] & & \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \arrow[ur] \arrow[ll, red] & & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \arrow[ll, red]
\end{tikzcd}$$

(Voir figure à la fin pour d'autres exemples)

+ le carquois dépend de l'orientation. $\rightarrow \leftarrow$ 

__Prop__ : Les mailles donnent les suites exactes courtes d'Auslander Reiten.

$0 \to \tau X \to \Pi \to X \to 0$.

+ on lit la translation d'Auslander Reiten

+ les modules les plus à gauche sont les projectifs
droite injectifs.

__Lemme__ kQ est noethérienne, donc module inj $= \bigoplus$ de modules inj. indécomposables.

II. Des catégories dérivées des catégories abéliennes.

1) Complexes de chaînes

On considère $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne (Ab, kQ-mod ...) On a une bonne notion de suite exacte courte. Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est additif entre deux cat abéliennes, On peut demander à F d'être.

- Exact, $0 \to F(X) \to F(Y) \to FZ \to 0$ = préserve lim & colim
- Exact à gauche $0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ = préserve noyau $\Rightarrow$ lim
- Exact à droite $F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ = préserve conoyau $\Rightarrow$ colim

+ notion analogue pour les foncteurs contravariants.

__Ex__ : $\mathrm{Hom}(X, -)$ exact à __gauche__

$A \otimes -$ exact à __droite__

$(-)_G$ $(-)^G$ dans G-modules, G groupe.
$\downarrow$ $\downarrow$
__dr__ __gauche__

Γ (foncteur section globales depuis une catégorie de faisceaux).
exact à gauche

On aimerait prolonger les suites exactes pour les foncteurs exact à gauche (droite) pour en faire des suites exactes longues et "mesurer le défaut d'exactitude".

Def : Soit $X \in A$, une résolution projective de X est une suite exacte.

$$\begin{array}{l} \cdots P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \downarrow \varepsilon \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ X \to 0 \end{array}$$

où les P_i sont projectifs.

Une résolution injective de X est une suite exacte.

$$\begin{array}{l} 0 \to X \\ \qquad\ \downarrow \\ \qquad\ I_0 \to I_1 \to I_2 \to I_3 \to \cdots \end{array}$$

où les I_i sont injectifs.

C'est en appliquant nos foncteurs à ce genre de résolutions que l'on obtient les foncteurs dérivés, un bon formalisme est celui des complexes de chaînes.

Def : Un complexe de chaînes sur A est donné par un diagramme.

$$\cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \quad \text{où } d_i d_{i+1} = 0 \ \forall i \in \mathbb{Z}$$

Les morphismes entre deux complexes (X, d) (Y, δ) sont les ensembles $f_i : X_i \to Y_i$ faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \to & \cdot & \to & \cdot & \to & \cdot \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \to & \cdot & \to & \cdot & \to & \cdot \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \\ \downarrow f \\ Y \end{array}$$

On a une catégorie $C(A)$ des complexes de chaînes. On définit

$C^+(A) = (X_i, d_i) \mid X_i = 0$ pour i assez petit
$C^-(A) = (X_i, d_i) \mid X_i = 0$ ——— grand

$C^b(A) = C^+(A) \cap C^-(A)$

} sous catégories pleines.

Prop : Les catégories $C^?(A)$ sont abéliennes. (toutes les (co)limites se font point par point)

Rq : $C(A)$ est faite des représentations d'un carquois A_∞ avec relation dans A.

On a un foncteur $A \to C(A)$ envoyant X sur le cplx $\underset{1}{0} \to \cdots \to \underset{0}{0} \to \underset{-1}{X} \to 0 \cdots$

c'est un foncteur exact, on identifie A à une sous catégorie de $C(A)$.

Def : Soit $(X,d) \in C(A)$, on définit la i-ème homologie par
$$H_i(X) := \operatorname{Ker} d_i / \operatorname{Im} d_{i+1} \in \mathcal{A}.$$

Un complexe est exact ssi son homologie est toujours nulle.

Prop : Si $P_\bullet \to X$ est une résolution projective, on a $H_i(P) = H_i(X) = \begin{cases} X & \text{en } 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

de même pour une résolution injective

Rq : On a un choix à faire pour une résolution projective : dans Ab.

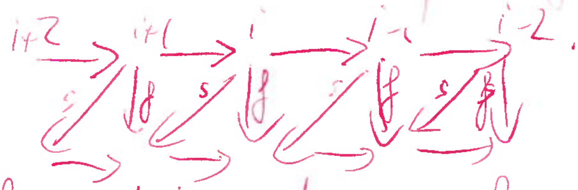
$$\begin{tikzcd} \cdots 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[d, "1"] \\ & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{ou} \quad \begin{tikzcd} \cdots \mathbb{Z} \arrow[r, "1"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "1"] \\ & & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Cependant elles auront toujours la même homologie, que faire ?

$\circledast$: Un morphisme $(X,d) \xrightarrow{f} (Y,\delta)$ induisant des iso $H_i(X) \xrightarrow{\sim} H_i(Y)$ est un quasi iso

2) Catégorie homotopique des complexes de chaînes.

Def : Soit $f : (X,d) \to (Y,\delta)$ dans $C(\mathcal{A})$. f est htope à 0 ($f \sim 0$) s'il existe une famille $s_i : X_i \to X_{i+1}$ telle que $f_i = s_{i-1} d_i + \delta_{i+1} s_i$



+ $fg \sim 1$ $gf \sim 1$
= équivalence d'homotopie

Deux morphismes f, g sont homotopes si $f - g \sim 0$

L'homotopie est une relation d'équivalence sur les morphismes, compatible à la composition.

Def $K(A)$ est la catégorie dont les objets sont les mêmes que $C(\mathcal{A})$ et les morphismes sont les classes d'équivalence pour l'homotopie.

Lemme : Si $f \sim 0$, alors $H(f) : H_*(X) \to H_*(Y)$ est nulle. Une équivalence d'homotopie est donc un quasi isomorphisme

Prop : Si $(P_\bullet)$ et $(P'_\bullet)$ sont deux résolution projectives du même $X \in A$, alors il existe une équivalence d'homotopie entre elles : $P_\bullet \simeq P'_\bullet$ dans $K(A)$

Rq : $K(A)$ est additive, mais pas abélienne : elle est triangulée.

Elle est munie d'un shift $[1]$ défini par $X[1] = (X_{n-1}, -d_{n-1})$ (il décale vers la gauche).

Def : Pour $f : (X,d) \to (Y,\delta)$ dans $C(A)$, on définit le cône de (f) par

$$\Gamma(f)_n = X_{n-1} \oplus Y_n \qquad \Delta_n = \begin{array}{c|cc} & X_{n-1} & Y_n \\ \hline X_{n-2} & -d_{n-1} & 0 \\ Y_{n-1} & f_{n-1} & \delta_n \end{array}$$

On a des morphismes naturels : $Y \xrightarrow{\alpha(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_Y \end{pmatrix}} \Gamma(f)$ $\quad \Gamma(f) \xrightarrow{\beta(f) = (1_{X[1]}, 0)} X[1]$

On a en particulier une suite exacte courte $Y \to \Gamma(f) \to X[1]$ dans $C(A)$. qui split ssi $f \sim 0$.

Def : Un triangle $X \xrightarrow{f} Y \to \Gamma(f) \to X[1]$ est dit standard

Theo : La cat $K(A)$, munie de la classe des triangles exacts isomorphes aux triangles standards, est triangulée !

- $\Gamma(1_X) \simeq 0$ donc $X \xrightarrow{1} X \to 0 \to X[1]$ est exact
- Tout morphisme $X \to Y$ se complète en un triangle $X \to Y \to \Gamma(f) \to X[1]$.
- Tout triangle exact peut être tourné : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X1$

$$Z[-1] \xrightarrow{-h[-1]} X \xrightarrow{-f} Y \xrightarrow{-g} Z \qquad Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1].$$

- Complétion de morphisme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists"] & X1 \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X[1] \end{tikzcd}$$

- Axiome de l'octaèdre.

Cette construction est manipulable, mais elle pose des problèmes :

* Le foncteur $C(A) \to K(A)$ n'envoie pas suite exacte courte sur triangle exact : $0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$.
  Si $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2[1]$ est exact dans $K(Ab)$, alors il doit être scindé, on aurait $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ dans $K(Ab)$, donc dans Ab car ils sont concentrés en degré 0.

* En général, le morphisme $P_\bullet \to X$ pour une résolution projective est un quasi-iso mais pas une équiv d'homotopie (pas de réciproque).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{Z}_2 \to 0 \end{array}$$

par exemple.

3) Catégorie dérivée

Déf : On définit $D(A)$ comme la localisation de $K(A)$ (ou $C(A)$) par la classe des quasi-isomorphismes. (Voir exposé Michaël pour les définitions).

Prop : On peut décrire les morphismes dans $D(A)$ comme des fractions $q^{-1}f$ où $X \xleftarrow{q} X' \xrightarrow{f} Y$ avec q un quasi-isomorphisme.

Ça peut quand même être affreux : Si $(P_\bullet)$ (resp $(I_\bullet)$) est une résolution projective (resp. injective) du même $X \in A$, on a $P_\bullet \simeq I_\bullet$ dans $D(A)$.

Théo : La cat $D(A)$ est triangulée, les triangles exacts sont les triangles isomorphes dans $D(A)$ aux images de triangles exacts de $K(A)$

Prop : Toute suite exacte courte $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ induit un triangle exact $X \to Y \to Z \to X[1]$ dans $D(A)$

Comment faire des calculs dans une telle catégorie ?

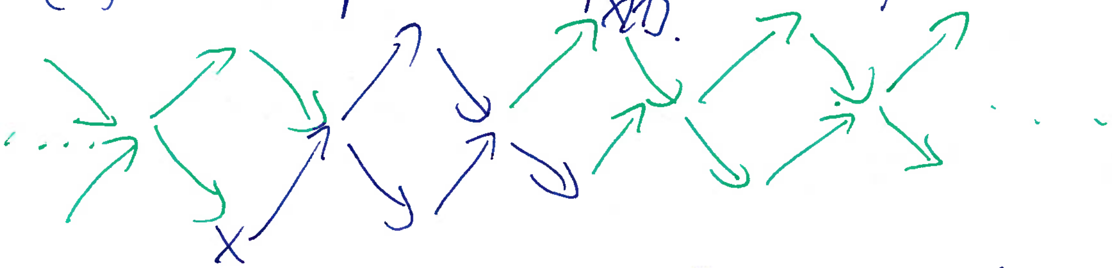
Lemme : Si $I \in C^-(A)$ est fait d'injectifs tout quasi isomorphisme $I \to Z$ est un monomorphisme scindé dans $K(A)$

Cor : Si $I \in C^-(A)$ est fait d'injectifs, alors $\mathrm{Hom}_{D(A)}(X,I) = \mathrm{Hom}_{K(A)}(X,I)$.
+ résultat dual pour les projectifs

Théo : Le foncteur de localisation $K(A) \to D(A)$ induit une équivalence de catégories entre $K^-(\mathrm{inj}\,A)$ et $D^-(A)$.

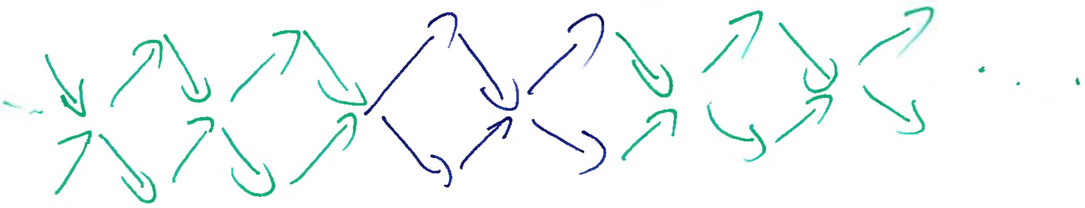
On peut donc faire des calculs en cherchant des "remplacements injectifs"
C'est possible dans $D^b(A)$ via les résolutions de Cartan-Eilenberg.

Théo : En type A_n, le carquois d'Auslander Reiten de la catégorie $D(A_n)$ est donnée par $\mathbb{Z}$-copies du carquois d'AR de A_n :



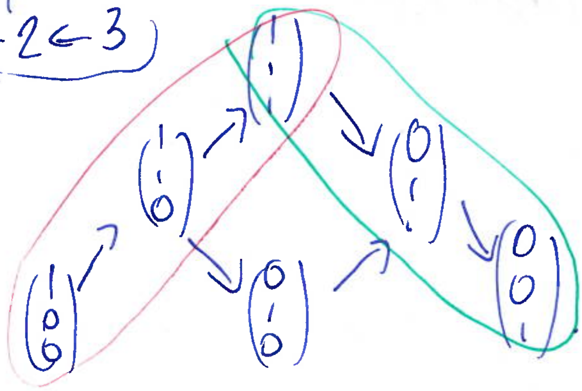
(Héréditaire : les indec sont concentrés en un deg.)

- Shift : X = version de X dans la prochaine copie du carquois.
- Triangle d'Auslander Reiten : image des SEC d'Auslander Reiten.
- Cette répétition ne dépend pas de l'orientation de départ : on a des équivalences dérivées entre les différentes orientation

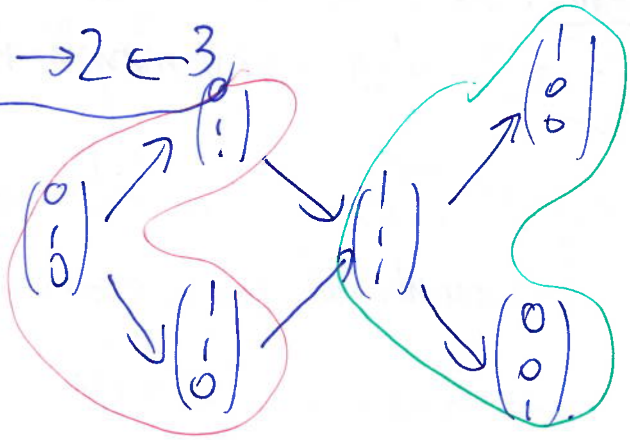


Carquois d'Auslander Reiten

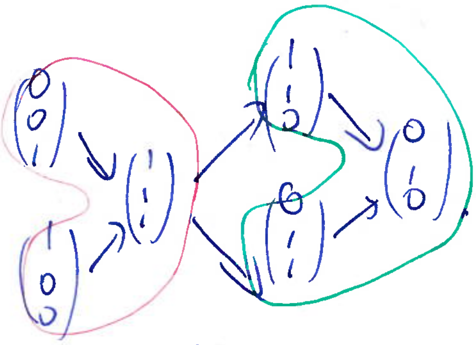
$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$



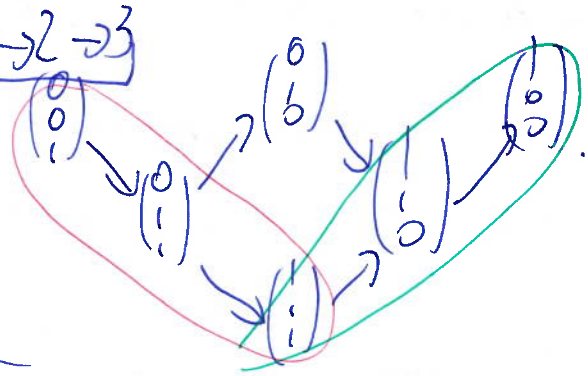
$1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$



$1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$



$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$



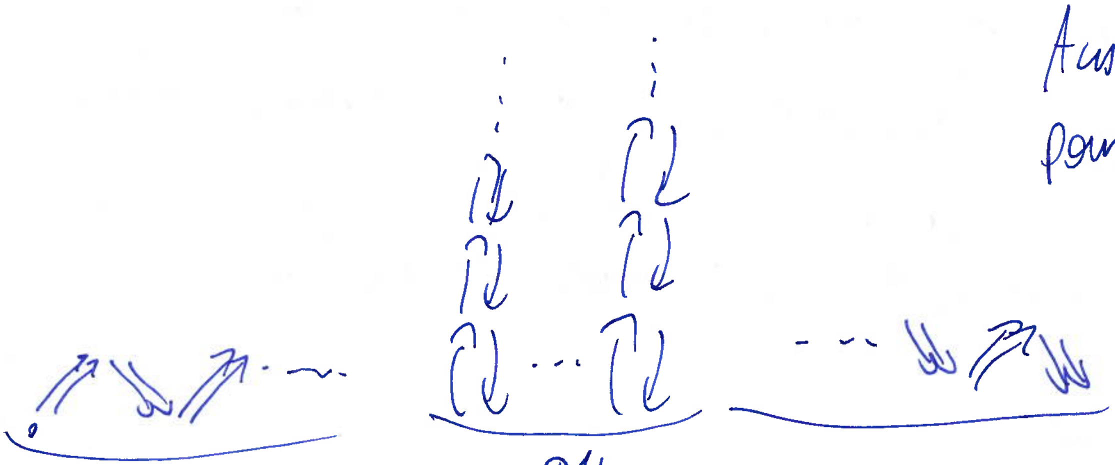
Dans $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$-mod.

$$0 \to k \xrightarrow{0} k \to 0$$

$$0 \to k[\varepsilon] \xrightarrow{\varepsilon} k[\varepsilon] \to 0.$$

ont la même homologie sans être quasi isomorphe.

Auslander Reiten pour $\circ \leftleftarrows \circ$.



prj

$\simeq \mathbb{P}^1_k$

inj