

11/09/25.

Séminaire GADT
de l'ITB.

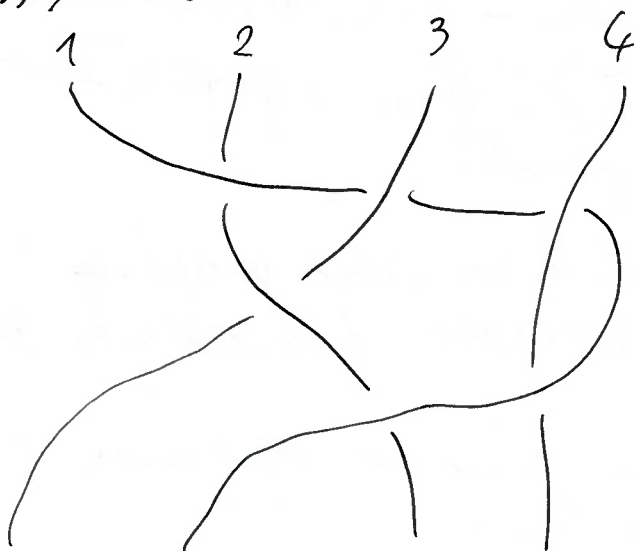
Sous groupes paraboliques. Des tresses aux
groupoïdes de Garside.

- I. Des tresses à Artin-Tits
- II. D'Artin-Tits à Garside, et aux groupes de tresses complexes.
- III. De Garside à Garside, mais avec des groupoïdes.

I. Des tresses à Artin-Tits.

1) le groupe des tresses.

On parle des tresses géométriques : des brins entrelacés dans $\mathbb{R}^3$ sans
croisements et sans reculer.



ici, 4 brins.

On considère ces tresses à déformation (isotopie) près :

$$\bigcup_i = \parallel$$

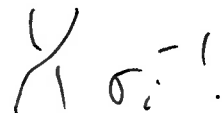
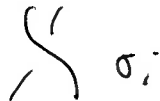


→ "relation de tresse"

Pour n fixé on munit les tresses à n brins d'une loi de groupe par
la concaténation des tresses

- neutre = tresse triviale
- inverse = tresse renversée.

Prop: Le groupe B_{2n} est engendré par les croisements de deux
brins consécutifs:



(1)

On a mieux

Théorème (Artin 25) le groupe des brenes admet la présentation suivante.

$$B_{\pi, m} = \langle \sigma_1 \dots \sigma_{m-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i-j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i \in \llbracket 1, m-2 \rrbracket \end{array} \rangle$$

↪ relations de brenes.

• Si $m' < m$, en ne prenant que les m' premiers brenes, on a une copie de $B_{\pi, m'}$ dans $B_{\pi, m}$:

$$B_{\pi, m'} \cong \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{m'-1} \rangle \subseteq B_{\pi, m}.$$

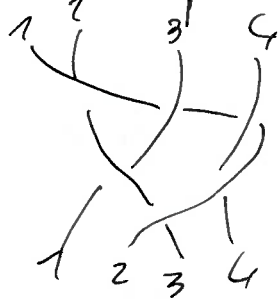
• Plus généralement, pour $I \subseteq \llbracket 1, m \rrbracket$, on peut considérer $B_{\pi, I}$ le sous-groupe $\langle \sigma_i \mid i \in I \rangle \subseteq B_{\pi, m}$. Le groupe est toujours un produit direct de groupes de brenes plus petits.

Def: Les groupes $B_{\pi, I}$ sont les sous-groupes paraboliques standards de $B_{\pi, m}$.
Les sous-groupes paraboliques sont les conjugués des $B_{\pi, I}$.

→ Autre plusieurs opérations (intersection, conjugaison, normalisation...) résolvés dans le cas de $B_{\pi, m}$.

2) Transition.

Une brene à m brenes induit une permutation des points d'arrivées.



↪ (123).

Cela donne un morphisme $\pi: B_{\pi, m} \twoheadrightarrow S_m$.
 $\pi(\sigma_i)$ est la transposition $(i, i+1)$ d'ordre 2.

Prop: le noyau de π est normalement engendré par σ_i^2 pour $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$.
On en déduit une présentation de Coxeter de S_m .

Nous aurons un unique π admettant une section ensembliste $G_m \rightarrow B_m$.
 $\Rightarrow$ Une permutation est représentée par une tresse n'ayant que des croisements positifs (en nombre minimal).

$$(12) \mapsto \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \end{array} \quad (123) \mapsto \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \end{array} \quad (14)(23) \mapsto \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$

"half twist".

3) Groupes d'Artin-Tits.

Pour S un ensemble fini. On considère une matrice de Coxeter $m: S \times S \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $m(s,t) = m(t,s)$, $m(s,s) = 1$, $m(s,t) \geq 2$ si $s \neq t$.
 À partir de cette donnée on définit deux groupes:

$$A = \langle S \mid \forall s,t, \underbrace{skst \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tsks \dots}_{m_{s,t}} \rangle \text{ et } W = A / \langle\langle S^2 \rangle\rangle.$$

↓
Groupe d'Artin-Tits

↓
Groupe de Coxeter

Prop: La projection $\pi: A \rightarrow W$ admet une section ensembliste: la section de Tits (provenant du lemme de Matsumoto dans W).

On dit que A est **sphérique** si W est un groupe fini. C'est le cas le mieux compris.

Def: Soit $I \subseteq S$, $A_I := \langle I \rangle \subseteq A$ est un sous-groupe parabolique standard.
 Les sous-groupes paraboliques de A sont les conjugués des A_I dans A .

Comme pour le cas des tresses, on a

Theo: (van der Lek 83).

Pour $I \subseteq S$, A_I est un groupe d'Artin pour I et $m_I: I \times I \rightarrow \mathbb{N}^*$ déf.

La encore, des questions sont ouvertes

- ①. Clôture parabolique ② Intersection des paraboliques
 ③ Centralisateurs, normalisateurs ④ Parabolique d'un parabolique?

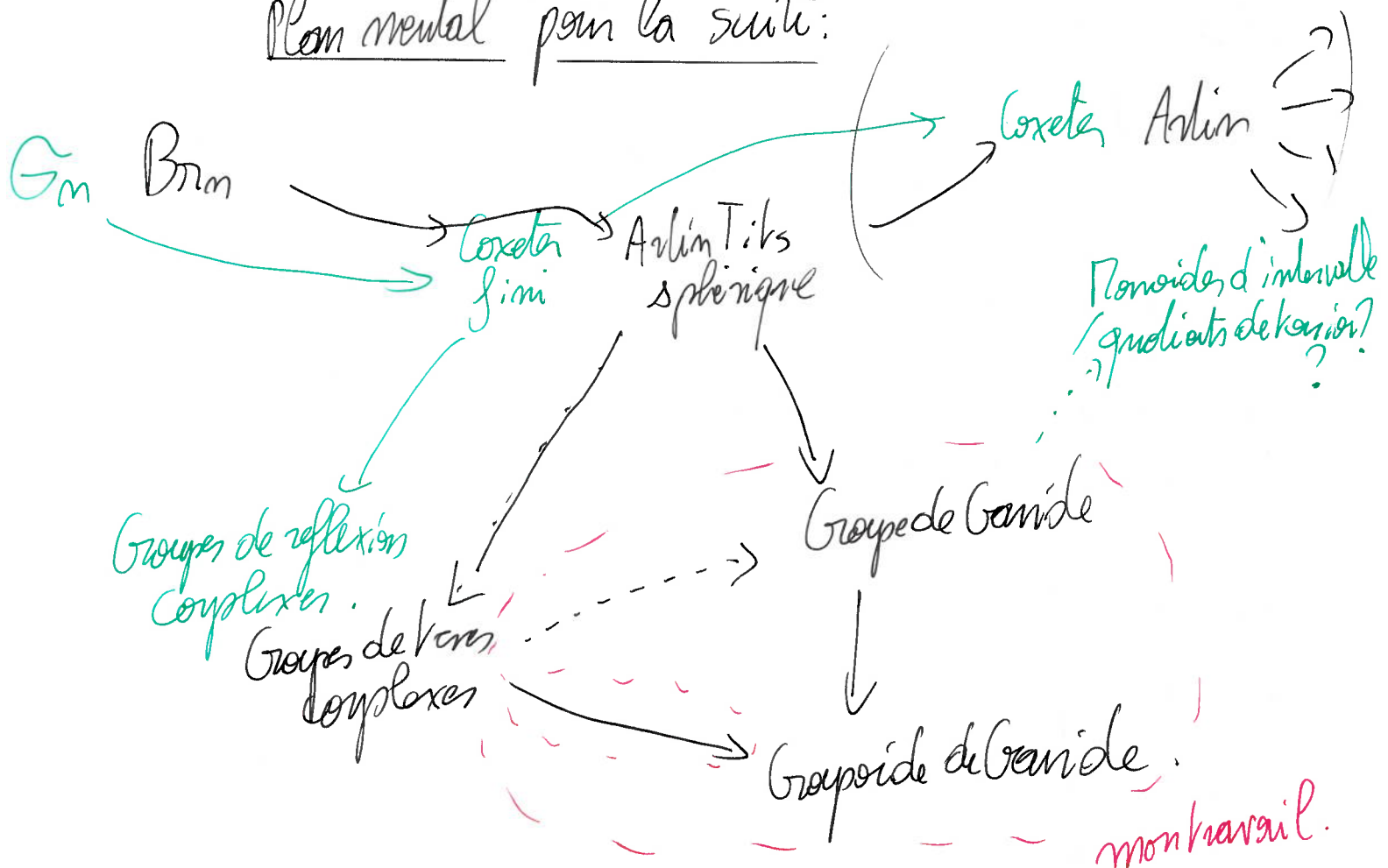
①②③ ouverts en général.

Blustein Paris 23.

- Arlin sphérique. Cumplido Gebhardt, Gonzalez Peres, Wiet 19.
 Paris 97 par ③. (+ Godelle 03)...

Les outils sont ceux de la Théorie de Garside (cf partie 2).

Plan mental pour la suite:



+ comment suis-t-on les paraboliques et leur propriété dans cette architecture?



II. D'Artin Tits à Gaiide et aux groupes de tresses complexes.

1) Deux généralisations ?

D'après Coxeter, si un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ fini est engendré par des réflexions, alors c'est un groupe de Coxeter. Réciproquement, tout groupe de Coxeter fini admet une représentation réelle fidèle de réflexion. $W \hookrightarrow GL_n(\mathbb{R})$. De plus, en posant

$$X = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \text{Fix}(x) = \{1\}\}$$

alors le groupe d'Artin associé à W s'identifie à $\pi_1(X/W)$.

→ Pour $W \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ fini et engendré par des réflexions, on définit X de même et $B(W) = \pi_1(X/W)$ le groupe de tresses complexe associé.

La définition est topologique, et il est difficile de définir des paraboliques. BTR 98; G.1, 11.22, pas de notion canonique de parabolique standard.

⊗. On pose $\Pi \subseteq A$ le monoïde engendré par $\leq$ dans A (éléments "positifs"). Ce que l'on sait sur A provient beaucoup de Π , qui admet ppcm, pgcd, est homogène, et admet $\Sigma = \text{image de la section } W \rightarrow A \text{ comme ensemble distingué de générateurs.}$ (Gaiide 69, Deligne 72, Brieskorn-Saito 72).

Def (Dehornoy Paris 99) Un groupe de Gaiide est un triplet (G, Π, Δ) avec G groupe, $\Pi \subseteq G$ sous-monoïde, $\Delta \in \Pi$. +

- ppcm et pgcd existent dans Π . (pour paire d'éléments !)
- Pour $x \in \Pi$, la longueur d'un produit $x = s_1 \dots s_r$ avec $s_i \neq 1$ est bornée.
- $\Sigma := \text{Div}_G(\Delta) = \text{Div}_\Pi(\Delta)$ est fini et engendre Π (éléments simples).

Ex: $B_{n,3} = \langle a, b \mid aba = bab \rangle \quad G = \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$.

$\begin{cases} a \mapsto y^{-1}x \\ b \mapsto x^{-1}y \end{cases}$ est un isomorphisme → choix de la structure.

(5)

2) Sous groupes paraboliques des groupes de Geminde.

On fixe (G, Π, Δ) .

Def: (Godelle 07).

$\forall \delta \in \Sigma$ est un élément de Geminde parabolique si: $s, t \leq \delta$ et $(st) \leq \Delta \Rightarrow (st) \leq \delta$.

Prop (Godelle 07) Si δ est parabolique, on pose $G_\delta = \langle D: \delta \rangle$ $\Pi_\delta = (D: \delta)^+$.

Le triplet $(G_\delta, \Pi_\delta, \delta)$ est un groupe de Geminde, dit **sous groupe parabolique standard** de (G, Π, δ) . Les sous groupes paraboliques sont les conjugués des paraboliques standards.

Δ Ça dépend de (G, Π, δ) et pas que de G .

Ce cadre théorique permet à nouveau d'étudier les questions "longues" sur les paraboliques!

Lemme (Godelle 07) les paraboliques standards sont stables par intersection.

On peut alors définir, pour $x \in G$ $SP(x) = \cap \{ \text{parabolique standard contenant } x \}$.
et espérer que $SP(x) = PC(x)$ ("cloître parabolique") ou même pour $x \in \Pi$.

Def (Gonzalez Peres, Parin 22 G.24) On dit que (G, Π, Δ) preserve le support
si $\forall x, y \in \Pi$, $x \leq y$, on a
 $x^\Delta = y \Rightarrow SP(x)^\Delta = SP(y)$

Théo (Gonzalez Peres Parin 22)

(G, Π, Δ) preserve le support $\Leftrightarrow PC(x)$ existe pour tout x
et $SP(x) = PC(x)$ pour $x \in \Pi$.

De plus, si (G, Π, Δ) est en plus homogène (existence d'une fonction longueur) alors les sous groupes paraboliques sont stables par intersection.

Attention! La préservation du support n'est pas forcément testable (à notre connaissance) C'est très difficile à tester en pratique.

Ex: $G = \langle a, b, c \mid b^2 = c^2, ab = ca, ac = ba \rangle$ ut de Geride et ne preserve pas le support.

Theo: (Cunha, Gebhardt, Gonzalez Torres, Wieh 19) le monoïde d'Artin Titi preserve le support

Theo (G 24) le monoïde dual par un groupe d'Artin Titi preserve le support

III De Geride à Geride, mais avec des groupoides.

1) Un pushout de généralisations?

Pour étudier les sous-groupes paraboliques des groupes de Kramers complexes on veut employer de la théorie de Geride.

Theo (Deligne 72, Deligne-Pan 99, Orlik-Solomon 88, Picard 00, Benis 15)

Tous les groupes de Kramers complexes sont des groupes de Geride...
... sauf quelques uns, qui sont seulement des groupes faibles de Geride

Groupoïde de Geride (ξ, C, Δ) ξ un groupoïde, $C \subseteq \xi$ une sous-catégorie qui engendre ξ , Δ une "application de Geride".

- Pour $u \in \text{Ob}(\xi)$, $\xi(u, u)$ est un groupe de Geride faible

Rq: Contrairement (à notre connaissance) à celle des groupes de Geride, la classe des groupes faibles de Geride est stable par centralisation et sous-groupes d'indice fini.

En considérant une "application de Geride parabolique". On trouve la définition d'un sous-groupoïde parabolique standard (ξ_s, C_s, δ) .

Def: Un groupe de la forme $\{s(u) \mid u \text{ est un sous-groupe parabolique standard de } G(u)\}$. Un sous-groupe parabolique est un $\{s(v, u) \mid u \in G(v, u)\}$

problème: les sous-groupes paraboliques standards ne sont pas toujours stables par intersection.

Solution: se restreindre à une famille bien choisie de sous-groupes paraboliques standards: un banc.

Def: Un banc de sous-groupes paraboliques standards est une famille T telle que

- $\{e\} \in T$, $\{1u\} \mid u \in \mathcal{O}(G)\} \in T$
- T est stable par l'automorphisme de Galois (conjugaison par Δ)
- L'intersection de deux éléments de T , si non vide, est dans T .

On peut maintenant définir la clôture T -parabolique standard, et parler de préservation du support par T :

$$x, y \in \tilde{C}, \alpha \in \mathcal{F}, x^\alpha = y \Rightarrow \text{SPC}_T(x)^\alpha = \text{SPC}_T(y).$$

Théorème 6.2.6: Si T préserve le support, alors tout endomorphisme dans $\mathcal{F}$ est inclus dans un sous-groupe T parabolique minimal $\text{PC}_T(x)$.

* Pas d'argument général pour l'intersection

* Comment construire des bancs d'après des sous-groupes paraboliques intérieurement?

* Traiter les questions restantes?

Cela est néanmoins suffisant pour traiter les derniers groupes de Hecke complexes manquants chez Gonzalez Peres et Tavarin pour obtenir:

Théorème (Gonzalez Peres et Tavarin 22, G.2.6.1)

Les sous-groupes paraboliques d'un groupe de Hecke complexe B sont stables par intersection.